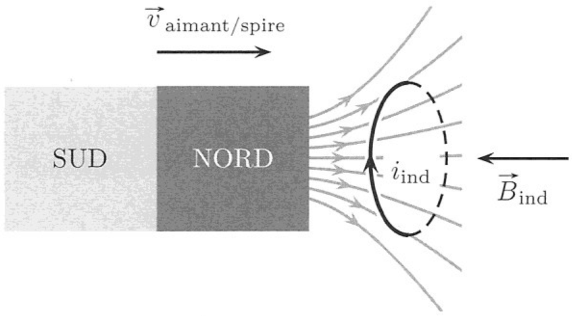
IV – Induction

I – Lois de l'induction

I-1) Expérience de Faraday

En 1831, le Britannique Michael Faraday a constaté qu'en approchant un aimant d'un circuit fermé (spire de cuivre), un courant électrique prend naissance dans la spire alors qu'il n'y a pas de générateur.

Induction dans une spire. Lors de l'approche de l'aimant, un courant électrique est induit dans la spire dans le sens indiqué par la flèche i_{ind}. Ce courant crée un champ magnétique induit B_{ind}.



I-2) Caractéristiques

Les caractéristiques de ce courant, appelé courant induit, sont les suivantes.

- L'intensité du courant induit croît avec la vitesse d'approche de l'aimant.
- L'intensité du courant induit croît si la surface de la spire croît.
- Le sens du courant induit est tel qu'il génère un champ magnétique $\overrightarrow{B_{ind}}$ tendant à s'opposer à la croissance du champ magnétique dû au rapprochement de l'aimant.

Les mêmes résultats sont obtenus si l'aimant est fixe et si la spire est approchée de l'aimant. Seul le déplacement relatif de l'aimant par rapport à la spire compte.

I-2) Lois de l'induction

a) Flux magnétique

Soit un circuit électrique orienté (arbitrairement) par le sens conventionnel du courant (flèche de i). Soit $\vec{S}$ le vecteur surface du circuit défini par le sens de i et la règle de la main droite. Si le circuit baigne dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, le flux magnétique ϕ à travers le circuit est défini par le produit scalaire :

$$\boldsymbol{\phi = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \vec{B}.\vec{S}\ si\ \vec{B}\ est\ uniforme}$$

L'unité SI du flux magnétique est le weber (Wb) : 1 Wb = 1 Tm².

L'apparition d'un courant électrique induit montre que tout se passe comme si le circuit contenait un générateur. La difficulté consiste à exprimer la force électromotrice de ce générateur. En relation avec les points expérimentaux observés et à la suite de mesures précises, Faraday a établi la loi qui porte son nom.

b) Loi de Faraday de l'induction (1831)

Soit un circuit électrique filiforme orienté arbitrairement par le sens conventionnel de i. Soit $\vec{S}$ le vecteur surface de ce circuit, orienté par i et la règle de la main droite. Le circuit est le siège d'une force électromotrice induite e, orientée conventionnellement dans le même sens que i (convention générateur) et telle que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

L'unité SI de e est le volt (V).

c) Utilisation de la loi de Faraday

La loi de Faraday nécessite de mettre en place des orientations et de les respecter durant toute la résolution d'un problème d'induction.

1- Orienter (arbitrairement) le circuit en choisissant un sens conventionnel pour le courant (flèche de i).
2- En déduire le vecteur surface $\vec{S}$ du circuit par la règle de la main droite.
3- Calculer le flux magnétique à travers le circuit : $\phi = \vec{B}.\vec{S}$ (expression valide seulement si $\vec{B}$ est uniforme à l'échelle du circuit).
4- En déduire la force électromotrice induite : $e = -\frac{d\phi}{dt}$
5- Dessiner le schéma électrique équivalent au circuit. Il s'agit du schéma de départ auquel on ajoute un générateur électrique de force électromotrice e orientée dans le même sens que i (convention générateur).
6- Le schéma équivalent permet d'écrire une ou plusieurs équations électriques pour calculer l'intensité du courant induit.

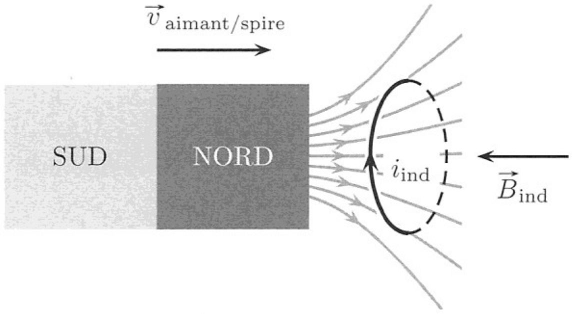
I-3) Loi de modération de Lenz

a) Définition

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

b) Applications

Cette loi est générale et nécessite, pour être appliquée correctement, de bien identifier les causes du phénomène d'induction. Deux visions sont possibles ici.



1- La cause de la naissance du courant induit est le déplacement de l'aimant. Le courant induit est dans un sens tel que la spire acquiert un moment magnétique orienté de la droite vers la gauche. Le côté nord de la bobine est donc à gauche de la bobine : il fait face au pôle nord et tend à repousser celui-ci (l'opposition à la cause est ici une répulsion mécanique via des forces magnétiques).

2- La cause de la naissance du courant est l'augmentation de l'intensité du champ magnétique B créé par l'aimant au niveau de la spire (du fait du rapprochement de l'aimant), ce champ étant dirigé de la gauche vers la droite. Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique (champ induit) dirigé vers la gauche. Il tend donc à s'opposer à la croissance du champ magnétique de l'aimant :
$\overrightarrow{B_{tot}} = \overrightarrow{B_{aimant}} + \overrightarrow{B_{ind}}$ **croît moins vite que** $\overrightarrow{B_{aimant}}$ **seul.**

II – Circuit fixe

II-1) Auto-induction

a) Champ magnétique propre / Champ extérieur

Lors de l'étude de l'induction dans un circuit électrique, on appelle champ propre le champ magnétique créé par ce circuit. Le champ magnétique créé par d'autres sources (autres circuits ou aimants) est appelé champ extérieur.

Le champ magnétique qui règne au voisinage d'un circuit électrique est la somme du champ propre et du champ extérieur,

$$\overrightarrow{B_{tot}} = \overrightarrow{B_{ext}} + \overrightarrow{B_{propre}}$$

b) Flux propre et inductance propre

- Définition

On appelle flux propre le flux magnétique créé par un circuit à travers lui-même (flux du champ magnétique propre à travers le circuit).

- Inductance propre

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité i crée à travers lui-même un flux magnétique propre proportionnel à i, $\boldsymbol{\phi_{propre} = Li}$

c) Inductance propre d'une bobine longue

- Flux magnétique

Le flux magnétique créé par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ à travers une bobine de N spires est :

$$\phi = N\,\vec{B}.\vec{S}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur surface d'une seule spire.

- Inductance propre

En négligeant les effets de bords, calculer le coefficient d'auto-inductance d'un solénoïde de section S de longueur l, possédant N spires. Donner sa valeur numérique avec N = 1000, l= 0,10 m, S = 0,001 m².

En négligeant les effets de bords, le champ magnétique propre dans le solénoïde est uniforme et vaut $\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{l} i\,\overrightarrow{u_z}$. Il y a N spires en tout, donc le flux propre à travers le solénoïde est N fois le flux à travers une de ses spires :

$$\phi = N\,\vec{B}.\vec{S} = \frac{\mu_0 N^2}{l} iS = Li \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{l} S = 12mH$$

d) Fem induite

L'égalité $\vec{B} = \overrightarrow{B_{ext}} + \overrightarrow{B_{propre}}$ implique que, dans le cas général, le flux magnétique à travers un circuit filiforme s'écrit :

$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre}\ avec\ \phi_{propre} = Li.$$

L'application de la loi de Faraday donne la force électromotrice induite orientée en convention générateur dans le circuit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - \frac{dLi}{dt} = e_{ext} + e_L$$

Si le circuit ne se déforme pas au cours du temps, le coefficient d'auto-inductance L est une constante et sort de la dérivée temporelle, ce qui donne le résultat suivant.

Dans un circuit indéformable, la force électromotrice induite s'écrit

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L\frac{di}{dt} = e_{ext} + e_L$$

- Le premier terme est la contribution du champ extérieur à la force électromotrice induite.
- Le second terme appelé force électromotrice auto-induite.

e) Méthode

Pour étudier un circuit filiforme fixe et indéformable dans un champ magnétique dépendant du temps, il faut respecter l'ordre suivant.

1- Orienter le circuit (choix de la flèche de i).
2- Calculer le flux magnétique.
3- Exprimer la fem induite $e = e_{ext} + e_L$

4- Représenter le schéma électrique équivalent, constitué des éléments réellement présents dans le circuit, auxquels on ajoute la fém. induite orientée en convention générateur.
5- Obtenir l'équation électrique du circuit à partir du schéma équivalent (le véritable schéma peut être oublié).

f) Exercice

Un circuit électrique filiforme plan, de résistance R, d'aire S et d'auto-inductance L, est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoïdalement dans le temps (pulsation temporelle ω) et orthogonal au plan du circuit :
$\vec{B}(t) = B_o\, cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.

Représenter le schéma électrique équivalent au circuit et établir l'équation électrique régissant le comportement de l'intensité électrique.

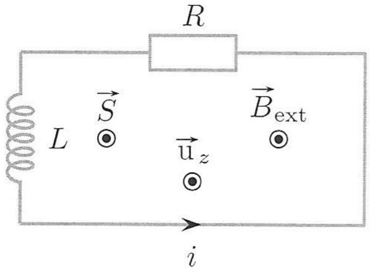
Le schéma électrique du vrai circuit est donné sur la figure de gauche ci-après. Il s'agit d'une boucle métallique d'aire S et de résistance R. On oriente arbitrairement le courant (flèche de i), ce qui donne l'orientation du vecteur surface $\vec{S}$ par la règle de la main droite : $\vec{S} = S\,\overrightarrow{u_z}$. Le flux magnétique total à travers le circuit est la somme du flux extérieur et du flux propre,

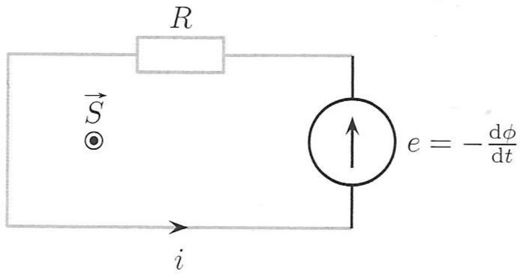
$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre} = \overrightarrow{B_{ext}}.\vec{S} + Li = B_o S\, cos(\omega t) + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L\frac{di}{dt} = B_o S\,\omega sin(\omega t) - L\frac{di}{dt}$$

Le schéma électrique équivalent s'obtient en ajoutant dans le vrai schéma un générateur (orienté comme i) délivrant la fem induite (en noir sur la figure de droite ci-après). Attention, la fem induite e tient déjà compte de la fem auto-induite. La bobine L est donc omise dans le schéma équivalent.

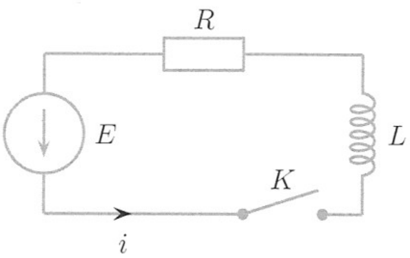


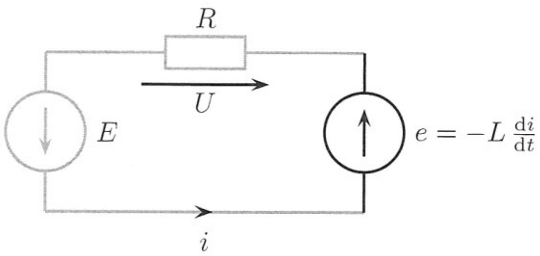


On déduit l'équation électrique e = Ri du schéma équivalent, ce qui donne :

$$B_o S\,\omega \sin(\omega t) - L\frac{di}{dt} = Ri \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = B_o S\,\frac{\omega \sin(\omega t)}{L}$$
$$\text{où } \tau = \frac{L}{R}$$

g) Loi de modération de Lenz





On considère un circuit électrique filiforme d'auto-inductance L, de résistance R, alimenté par un générateur de force électromotrice E constante. Il n'y a pas de champ magnétique extérieur : le seul phénomène d'induction dans le circuit est l'auto-induction. À l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur K.

Pour t > 0, on remplace K par un fil. En l'absence de champ magnétique extérieur, le seul flux magnétique à travers le circuit est le flux propre. La fem induite, donnée par la loi de Faraday, se résume à la fem auto-induite. Elle est orientée en convention

générateur, c'est-à-dire dans le sens de i sur le schéma électrique équivalent. La loi des mailles appliquée à ce circuit s'écrit :
E+e = U, avec U = Ri, soit :

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \; avec \; \tau = \frac{L}{R}$$

D’où :

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R} \Rightarrow i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Le temps $\tau = \frac{L}{R}$ représente le temps de montée du courant vers sa valeur limite E/R. Par conséquent, le temps de variation du courant croît avec L, ce qui est une conséquence de la loi de modération de Lenz.

Dans les circuits à fort coefficient d'auto-inductance, il est difficile. d'imposer des variations brutales de courant. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz.

h) Aspect énergétique de l'auto-induction

- Bilan d’énergie

D'après la loi des mailles, E+e= U. En multipliant membre à membre cette relation par i, on fait apparaître des puissances, qu'il conviendra d'orienter correctement :

$$Ei + ei = Ui$$

Les tensions E et e sont orientées en convention générateur, donc Ei et ei sont les puissances électriques fournies par le générateur de fem E et la fem auto-induite e au reste du circuit. Ainsi, (-ei) est la puissance reçue par e.

La tension U est orientée en convention récepteur : Ui est donc la puissance reçue par la résistance R.
En notant P les puissances, l'équation s'interprète comme :

$$P_{fournie\ par\ E} = P_{reçue\ par\ R} + P_{reçue\ par\ e}$$

$$\Leftrightarrow Ei = Ri^2 + \frac{Ldi}{dt}i$$

$$\Rightarrow Eidt = Ri^2\mathrm{dt} + \mathrm{Lidi} \Rightarrow \int_0^{\mathrm{t}} Eidt = \int_0^{\mathrm{t}} Ri^2\mathrm{dt} + \int_{\mathrm{i}_0}^{\mathrm{i(t)}} \mathrm{Lidi}$$

$$\Rightarrow E_{fournie\ par\ E} = E_{reçue\ par\ R} + E_{reçue\ par\ e}$$

Où :

$$E_{reçue\ par\ e} = \frac{1}{2}\mathrm{Li}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_0^2$$

On peut donc définir une énergie potentielle $\frac{1}{2}\mathrm{Li}^2$. Ce terme est lié à la croissance du flux magnétique propre (et donc du champ magnétique propre) lorsque i croît.

- Énergie potentielle magnétique d'un circuit

Un circuit magnétique d'inductance propre L, parcouru par une intensité électrique i, possède l'énergie potentielle magnétique

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

Cette énergie s'interprète comme l'énergie qu'a dépensée le générateur pour créer le champ magnétique propre lors de la croissance de i.

En raison de la continuité temporelle $E_m = \frac{1}{2}Li^2$, l'intensité i est toujours continue dans une branche contenant une bobine. Si on ouvre brutalement cette branche, une étincelle de rupture prend naissance.

II-2) Bobines en interaction

a) Inductance mutuelle entre deux bobines

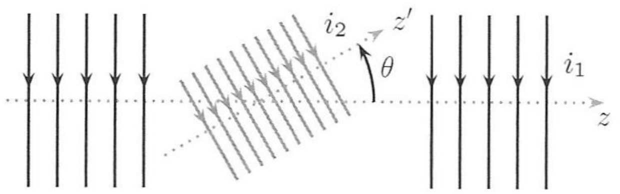
- Coefficient d'inductance mutuelle

Soit deux circuits filiformes. On définit le coefficient d'inductance mutelle M entre les deux circuits par :

$$\boldsymbol{\Phi_{1\rightarrow 2} \div M i_1 \ et\ \Phi_{2\rightarrow 1} \div M i_2}$$

b) Exercice

On considère un petit solénoïde possédant N_2 spires, de section S_2, placé à l'intérieur d'un grand solénoïde possédant N_1 spires, de section S_1, de longueur l_1. L'angle entre les axes des deux solénoïdes est θ (si θ vaut zéro, les courants dans les deux solénoïdes sont orientés dans le même sens). Déterminons le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.



En négligeant les effets de bords, le champ magnétique créé par le grand solénoïde est uniforme et vaut $\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} i_1 \overrightarrow{u_z}$. Le flux magnétique provoqué par le grand solénoïde à travers le petit est N_2 fois le flux magnétique à travers une spire du petit solénoïde :

$$\Phi_{1\rightarrow 2} = \overrightarrow{B_1}.N_2\overrightarrow{S_2} = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} i_1 N_2 S_2 cos\theta = M i_1$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} N_2 S_2 cos\theta$$

Selon la valeur de θ, M peut être positif ou négatif.

c) Utilisation des coefficients d'inductance

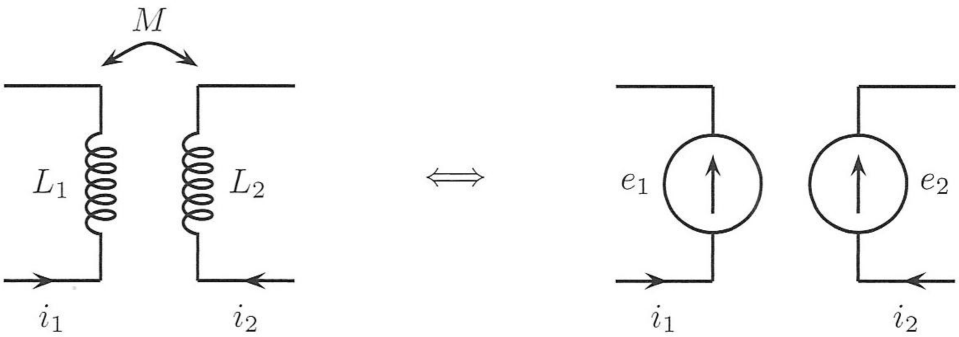
La schématisation de deux circuits couplés par inductance mutuelle est donnée sur la figure. Avec les coefficients d'inductance mutuelle et d'inductance propre, les flux à travers chaque circuit s'expriment par :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \; et \; \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

On applique la loi de Faraday à chaque circuit pour avoir les forces électromotrices induites :

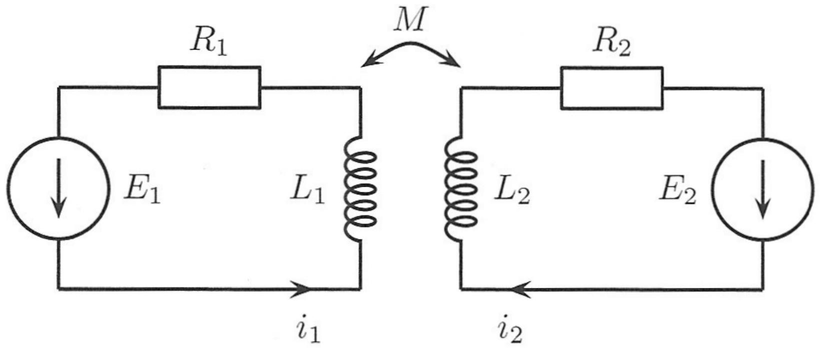
$$e_1 = -\frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} \; et \; e_2 = -\frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt}$$

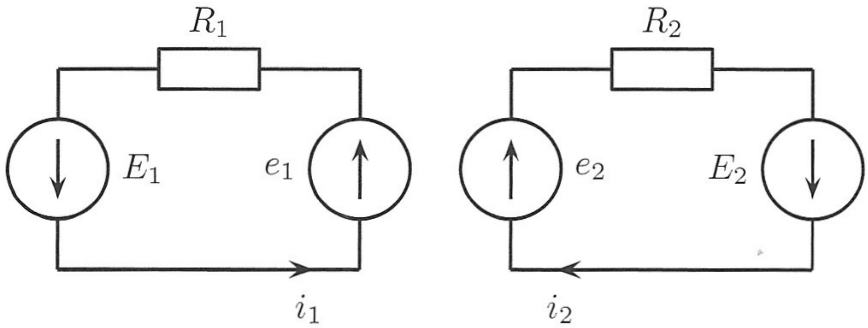
Cela permet d'avoir le schéma électrocinétique équivalent (à droite sur la figure), sur lequel les forces électromotrices induites sont orientées en convention générateur. On parle de couplage car la force électromotrice dans chaque circuit dépend des courants dans les deux circuits.



d) Circuits couplés par induction mutuelle

On considère deux circuits fixes couplés par inductance mutuelle, contenant chacun un générateur (fem respectives E_1 et E_2) et une résistance. On note L_1 et L_2 les coefficients d'inductance propre et M le coefficient d'inductance mutuelle. Les variations éventuelles des courants provoquent des fem induites, orientées en convention générateur, dont les expressions sont données par les relations précédentes.





Les équations électrocinétiques obtenues par application de la loi des mailles à chaque circuit s'écrivent :

$$E_1 - \frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} = R_1 i_1 \; et \; E_2 - \frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt} = R_2 i_2$$

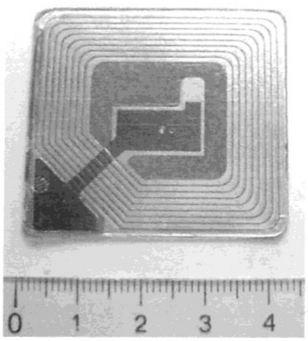
Ces équations couplent les deux courants : les intensités i_1 et i_2 interviennent simultanément dans les deux équations.

II-3) Applications des circuits couplés

- Des dispositifs électriques peuvent être chargés à distance (sans contact) par couplage inductif. C'est le cas de certaines voitures électriques de location. Le châssis de la voiture est équipé d'un circuit en forme de boucle (bobine) d'axe vertical. Dans le sol, sous la place de parking, se trouve également une bobine alimentée électriquement par le courant alternatif du secteur. Lorsque la voiture est garée sur sa place de parking, les deux bobines se font face, ce qui assure une valeur satisfaisante de leur coefficient d'inductance mutuelle. Les variations du courant dans la boucle du sol induisent des courants dans la boucle de la voiture, qui servent à recharger la batterie. Cela évite d'avoir à brancher un câble de raccordement. On retrouve aussi ce système dans les chargeurs de téléphone type Nokia Lumia, ou brosse à dents oral-B.

- Les cartes RFID (radio frequency identification) sont les « cartes magnétiques » lues par simple passage à distance devant un détecteur. Le lecteur est un circuit électrique parcouru par un courant variable $i_1(t)$, qui génère un champ magnétique temporellement variable dans son environnement. La carte RFID contient un bobinage (voir figure). Lorsqu'ils sont proches l'un de l'autre, carte et lecteur sont couplés par inductance mutuelle. Les variations temporelles du courant $i_1(t)$ dans le détecteur provoquent, par couplage magnétique, l'apparition d'un courant $i_2(t)$ dans la carte RFID. Ce courant $i_2(t)$ alimente une puce électronique qui le modifie (codage dans $i_2(t)$ des informations contenues dans la carte). Par couplage magnétique, $i_2(t)$ induit des variations sur $i_1(t)$ dans le lecteur, qui décode ainsi le contenu de la carte. Les cartes RFID peuvent être passives (sans alimentation autonome), car la fem induite par le champ du lecteur suffit à les alimenter.

Carte RFID servant d'antivol sur un article de magasin. L'échelle de la photographie est donnée par une règle graduée en centimètres.



- Les puces électroniques d'identification mises par les vétérinaires sous la peau des animaux domestiques ne sont autres que des cartes RFID de la taille d'un grain de riz.
- Les plaques de cuisson à induction contiennent une bobine parcourue par un courant temporellement variable et d'amplitude réglable. Cela crée un champ magnétique variable. Une casserole posée sur la plaque joue le rôle d'une seconde bobine. En effet, bien que non filiforme, le disque métallique du fond de la casserole peut être découpé par la pensée en des spires concentriques. Le champ variable créé par la plaque induit un courant dans ces spires fictives, qui s'échauffent par effet Joule.

II-4) Bilan énergétique pour deux circuits couplés

On reprend le schéma électrique précédent. Pour réaliser un bilan énergétique sur l'ensemble des deux circuits, on multiplie la première équation par i_1 et la seconde par i_2, ce qui fait apparaître des puissances électriques. On somme les équations ainsi obtenues, ce qui donne :

$$E_1 - \frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} = R_1 i_1 \; et \; E_2 - \frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt} = R_2 i_2$$

$$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

Lorsqu'une puissance s'identifie à une dérivée temporelle, la grandeur dérivée peut être définie comme une énergie potentielle à une constante près. La constante est choisie nulle par convention (quand il n'y a pas de courants, il n'y a pas de champ magnétique).

Énergie potentielle magnétique de deux circuits :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

s'interprète comme l'énergie potentielle magnétique de deux circuits. Elle correspond à l'énergie qu'ont dû fournir les générateurs aux deux circuits pour créer le champ magnétique lors de l'établissement des courants i_1 et i_2.

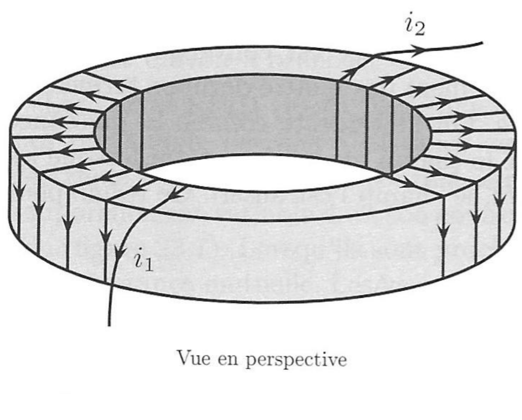
II-5) Transformateur de tension

a) Définition

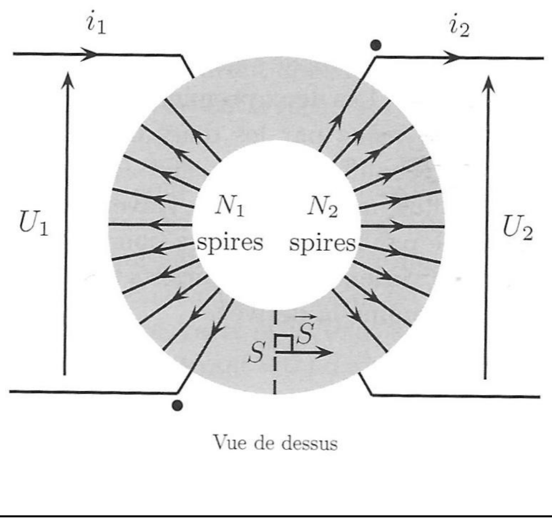
Les appareils américains fonctionnent en 110 V alternatif alors que le réseau français délivre du 220 V alternatif. Pour brancher sans dommages un appareil américain sur le réseau français, il faut donc transformer le 220 V de la prise électrique en 110 V.

Définition 23.13. Transformateur de tension

Un transformateur de tension convertit une tension alternative en une tension alternative de même fréquence mais de valeur efficace différente. Le fonctionnement du transformateur repose sur le phénomène de couplage par induction mutuelle.



Vue en perspective



Vue de dessus

- Relation de transformation en tension

Le champ magnétique étant parfaitement canalisé dans le tore, son flux Φ a la même valeur à travers toute section du tore : Φ s'appelle le flux commun. On oriente la section S du tore selon l'indication de la figure. D'après les orientations des courants, les flux magnétiques respectifs Φ_1 et Φ_2 à travers ces circuits sont liés à Φ par :

$$\Phi_1 = \mathrm{N}_1\Phi \text{ et } \Phi_2 = \mathrm{N}_2\Phi$$

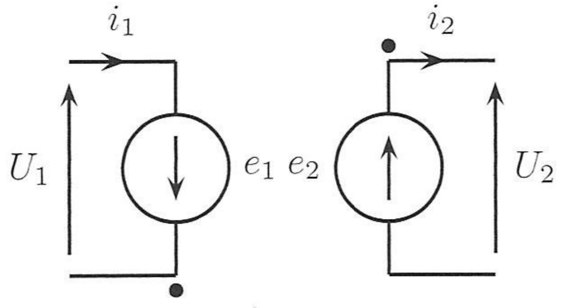
Les forces électromotrices respectives e_1 et e_2 induites dans les enroulements sont données par la loi de Faraday appliquée à chaque enroulement :

$$e_1 = -\frac{N_1 d\Phi_1}{\mathrm{dt}} \text{ et } \mathrm{e}_2 = -\frac{\mathrm{N}_2\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{dt}}$$

Elles sont représentées en convention générateur sur le schéma électrique équivalent de la figure suivante. Cette figure montre également que $U_1 = -e_1 \; et \; U_2 = e_2$.

D'où :

$$\boldsymbol{\frac{U_1}{U_2} = -\frac{e_1}{e_2} = -\frac{N_1}{N_2}}$$

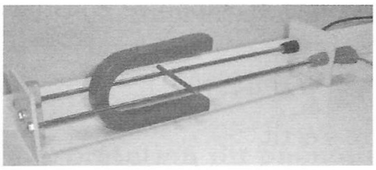


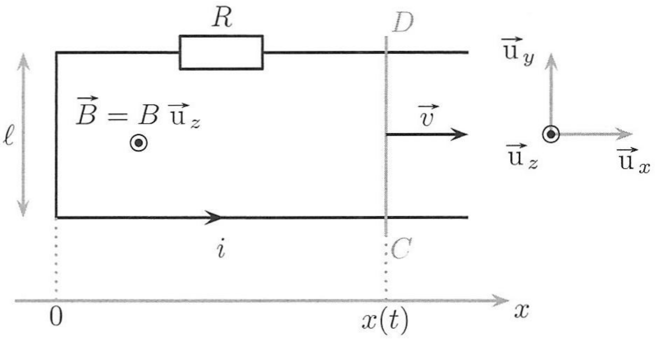
III – Circuit mobile

III-1) Dispositif des rails de Laplace

a) Présentation

Les rails de Laplace sont utilisés à titre pédagogique pour mettre en évidence le principe des générateurs électriques. Il s'agit de deux rails horizontaux fixes en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, notée [CD] sur la figure refermant le circuit. On note R la résistance du circuit. L'orientation du courant dans le circuit est fixée arbitrairement.





b) Équation électrique

Le flux magnétique à travers le circuit varie, car l'aire du circuit varie lors du mouvement de la barre. Avec l'orientation de i choisie, le vecteur surface du circuit est $\vec{S} = S\,\overrightarrow{u_z} = lx\,\overrightarrow{u_z}$ donc :

$$\Phi(t) = \vec{B}.\vec{S} = Blx$$

Dans cette expression de Φ, seul le flux extérieur (dû au champ magnétique de l'aimant) est pris en compte. Le circuit ne contenant qu'une seule spire, son coefficient d'auto-inductance est très faible (de l'ordre du pH), ce qui permet de négliger le flux propre devant le flux extérieur.

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

Le schéma électrique équivalent, donné sur la figure, permet d'écrire (en négligeant l'auto-induction)

$$e = Ri \Rightarrow -Blv(t) = Ri(t)(\acute{e}quation\ \acute{e}lectrique)$$

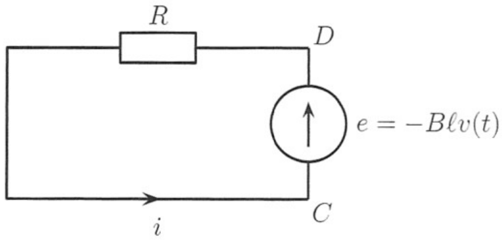


Schéma électrique équivalent à la situation. La fem induite est orientée en convention générateur (dans le même sens que i).

c) Équation mécanique

La barre étant parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique extérieur, elle est soumise, entre autres, à des actions de Laplace. Cela nécessite une étude mécanique. La barre de masse m est soumise à :

- Son poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$
- La réaction des rails $\vec{N} = N\overrightarrow{u_z}$ (N est verticale si on néglige les frottements) ;
- L'action de l'opérateur $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x}$ (F_{op} est algébrique et supposée constante pour la suite) ;
- Des actions de Laplace $\overrightarrow{F_{lap}} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = ilB\overrightarrow{u_x}$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit en projection sur $\overrightarrow{u_x}$:

$$ilB + F_{op} = \frac{mdv}{dt} \quad (\acute{e}quation\ m\acute{e}canique)$$

d) Solutions

On extrait $i = -\frac{Blv}{R}$ de l'équation électrique et on le remplace dans l'équation mécanique , ce qui donne

$$-\frac{l^2B^2v}{R} + F_{op} = \frac{mdv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

$$\text{où}\, \tau = \frac{mR}{B^2l^2}\ et\ v_{\text{lim}} = \frac{F_{op}R}{B^2l^2}$$

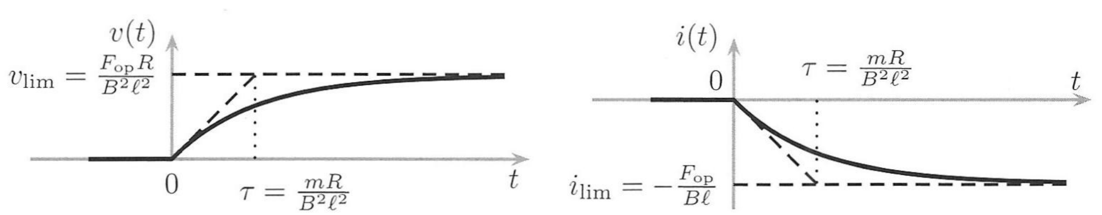
Les notations τ et v_{lim} permettent une mise sous forme canonique de l'équation et rendent les calculs plus lisibles. En prenant pour condition initiale v(0) = 0 et en supposant que F_{op} est constante, l'équation a pour solution :

$$v(t) = v_{\text{lim}}\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

L'intensité i s'en déduit par :

$$i = -\frac{Blv}{R} = i_{\text{lim}}\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \text{ où } i_{\text{lim}} = -\frac{F_{op}}{Bl}$$

Les solutions sont tracées sur la figure pour le cas F_{op}> 0 et B > 0 (il ne faut pas oublier que ces grandeurs sont algébriques).



Représentation de i et v en fonction du temps pour les rails de Laplace.

e) Interprétation du phénomène avec la loi de Lenz

En présence d'un champ magnétique, la barre est soumise à la force de Laplace $-\frac{l^2B^2v}{R}\overrightarrow{u_x}$. Cette force est résistante : elle s'oppose à la vitesse de la barre d'autant plus fort que la vitesse est grande. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz : le mouvement de la barre crée le courant induit, qui à son tour crée la force de Laplace, qui tend à s'opposer au mouvement de la barre.

La force de Laplace s'oppose ainsi au mouvement quel que soit le signe de B, conformément à la loi de modération de Lenz.

f) Bilan de puissance en induction

On multiplie l'équation électrique par i,

$$ei = Ri^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-B\ell vi}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } e}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}} \qquad \text{(bilan de puissance électrique).}$$

On multiplie l'équation mécanique par v,

$$F_{\text{op}} \cdot v + F_{\text{la}} \cdot v = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot v$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} + \underbrace{i\ell Bv}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par } F_{\text{la}}}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{c (barre)}}}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{(bilan de puissance mécanique).}$$

En comparant les équations on remarque sur cet exemple que

$$P_{fournie\ par\ e} = -P_{fournie\ par\ \overrightarrow{F_{la}}}$$

On généralise ce résultat par le théorème :

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance mécanique fournie au circuit par les actions de Laplace induites est l'opposé de la puissance électrique fournie au circuit par la fem induite,

$$\boldsymbol{P_{fournie\ par\ e} = -P_{fournie\ par\ \overrightarrow{F_{la}}}}$$

Cette relation est à la base du fonctionnement de tous les convertisseurs électromécaniques.

- Ce résultat n'est plus valable si le champ magnétique dépend du temps, car la fem induite et donc le courant induit sont modifiés, ce qui change les équations de bilan énergétique.

En sommant membre à membre les équations, les termes Blvi se simplifient et on obtient un bilan de puissance électromécanique complet,

$$\underbrace{F_{\text{op}} \cdot v}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par op}}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\text{barre})}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par }R}} .$$

La puissance fournie par l'opérateur à la barre sert, d'une part, à augmenter l'énergie cinétique de la barre (démarrage du générateur) et, d'autre part, à alimenter électriquement la résistance

g) Freinage électromagnétique

Dans le dispositif des rails de Laplace étudié précédemment, la force de Laplace tend à s'opposer au mouvement de la barre, conformément à la loi de modération de Lenz. En l'absence d'opérateur externe ($F_{op} = 0$), l'équation du mouvement de la barre se réduit à :

$$-\frac{l^2B^2v}{R} = \frac{mdv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ où } \tau = \frac{mR}{B^2l^2}$$

Cela conduit à une décroissance exponentielle de la vitesse avec un temps caractéristique $\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$ qui :

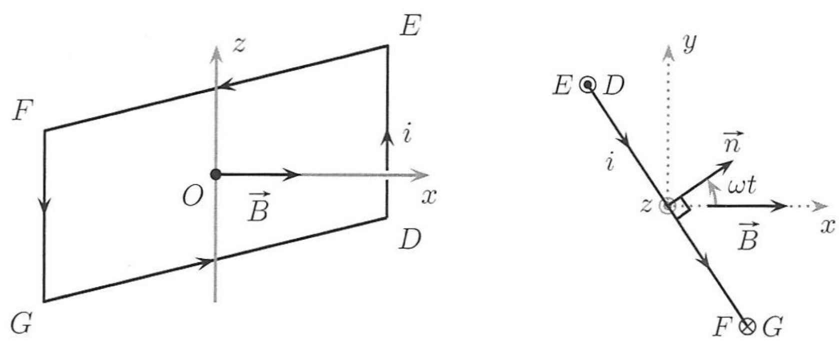
- Croît avec m (plus la barre est lourde, plus il lui faut de temps pour s'arrêter : c'est l'inertie mécanique de la barre) ;
- Décroît avec B (un champ magnétique intense donne des effets d'induction plus grands et le freinage par la loi de Lenz est plus intense).

C'est le principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds.

III-2) Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme

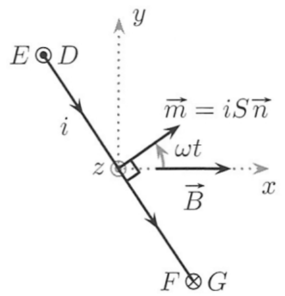
a) Présentation

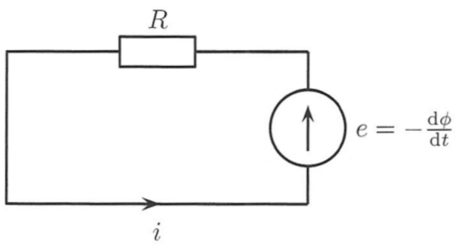
Cette section présente un générateur électrique constitué d'une bobine pivotant autour d'un axe dans un champ magnétique stationnaire. Par sa géométrie tournante, ce dispositif est plus réaliste que les rails de Laplace. Les idées physiques étant les mêmes que pour ce dernier dispositif, l'étude est présentée sous forme d'exercice corrigé.



On considère un circuit rectangulaire DEFG d'aire S orienté arbitrairement par l'intensité électrique i. Il peut pivoter sans frottements autour de l'axe z. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\overrightarrow{u_x}$ orthogonal à l'axe z. Les schémas donnent une vue en perspective et une vue de dessus (depuis les z positifs). Grâce à un couple $\overrightarrow{\Gamma_{op}} = \Gamma_{op}\overrightarrow{u_z}$ fourni par un opérateur, ce cadre tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (0, $\overrightarrow{u_z}$). La position angulaire du cadre est repérée par l'angle orienté entre le champ magnétique et la normale unitaire $\vec{n}$ au cadre : $\theta(t) = (\overrightarrow{u_x}, \vec{n}) = \omega t$. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe (Oz) et R sa résistance électrique. On néglige l'auto-induction.

b) Schéma électrique





On introduit le vecteur surface $\vec{S}$ du cadre, orienté par i et la règle de la main droite. L'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{S}$ est $(\vec{B}, \vec{S}) = \omega t$. Le flux magnétique à travers le cadre s'écrit :

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = BScos(\omega t)$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BSsin(\omega t)$$

Le schéma électrique donne l'équation :

$$e = Ri \Leftrightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{\omega BSsin(\omega t)}{R}$$

Le courant i est sinusoïdal alternatif. Sa pulsation temporelle ω est égale à la vitesse angulaire de rotation du cadre.

c) Equation mécanique

On introduit le moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$ du cadre. Le champ magnétique étant uniforme, le moment des actions de Laplace s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{la}} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -iSBsin(\omega t)\overrightarrow{u_z} = -\frac{\omega B^2 S^2 sin^2(\omega t)}{R}\overrightarrow{u_z}$$

On remarque que ce moment (en projection sur $\overrightarrow{u_z}$) a toujours signe opposé à celui de ω : il a donc tendance à ralentir le cadre, conformément à la loi de modération de Lenz.

Le courant induit, par son sens, tend à s'opposer (via les actions de Laplace) aux causes (rotation à la vitesse angulaire ω) qui lui ont donné naissance.

L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique au cadre en projection sur l'axe (Oz). Les seuls moments qui comptent sont Γ_{op} *et* Γ_{la}. En effet, le poids s'applique au centre de gravité du cadre (point O) et a donc un moment nul par rapport à l'axe. De même, les liaisons pivot sont sans frottement, donc exercent un moment nul par rapport à l'axe. Il reste :

$$\Gamma_{op} + \Gamma_{la} = \frac{Jd\omega}{dt} = 0 \ (car\ \omega\, est\ constante) .$$

d) Bilan énergétique

Pour le bilan de puissance électrique, on multiplie l'équation électrique par i :

$$ei = Ri^2$$
$$\Rightarrow \frac{\omega^2 B^2 S^2 sin^2(\omega t)}{R} = Ri^2$$
$$\Leftrightarrow P_{reçue\ par\ R} = P_{fournie\ par\ e}$$

Le bilan de puissance mécanique est obtenu en multipliant l'équation mécanique par ω :

$$\Gamma_{op}\omega + \Gamma_{la}\omega = 0 \Rightarrow \Gamma_{op}\omega - \frac{\omega B^2 S^2 sin^2(\omega t)}{R}\ \omega = 0$$

On retrouve le fait que $P_{fournie\ par\ e} = -P_{fournie\ par\ \Gamma_{la}}$.
En sommant membre à membre les deux équations de bilan énergétique électrique et mécanique, on obtient le bilan complet :

$$\Gamma_{op}\omega = Ri^2$$
$$\Leftrightarrow P_{fournie\ par\ op} = P_{reçue\ par\ R}$$

L'opérateur fournit de la puissance mécanique en faisant tourner le générateur qui, à son tour, alimente électriquement la résistance (en courant alternatif).

e) Méthode sur les bilans

- On multiplie l'équation électrique par i, pour obtenir des termes homogènes à UI.
- En translation on multiplie le PFD par v, pour obtenir des termes homogènes à Fv.
- En rotation on multiplie le TMC par ω, pour obtenir des termes homogènes à $\Gamma\omega$.

III-3) Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

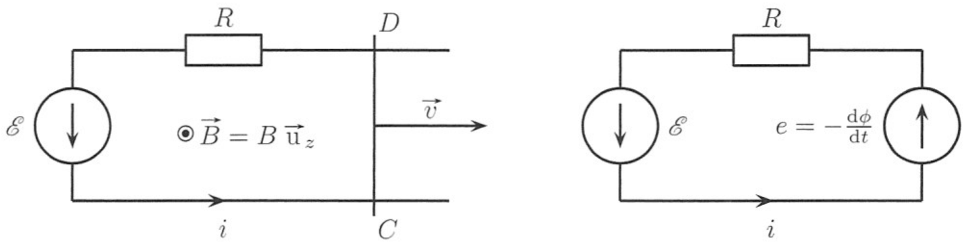
a) Moteur à courant continu à entrefer plan

- Evolution de la vitesse

Un générateur électrique crée un courant dans un circuit qui baigne dans un champ magnétique. Des forces de Laplace mettent alors le circuit en mouvement (effet moteur). Cependant, le circuit devient mobile, donc des phénomènes d'induction prennent naissance.

Pour fabriquer un moteur linéaire (donnant lieu à un mouvement de translation), on reprend les rails de Laplace en les alimentant par un générateur électrique de fem e.

La barre [CD] étant initialement immobile, le générateur fait circuler un courant. Étant plongée dans un champ magnétique, la barre est alors soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement. Le circuit est donc le siège d'une fem induite, ce qui donne le schéma électrique équivalent.



En négligeant l'auto-induction et en notant l la longueur de la barre, le flux magnétique et la fem induite se calculent par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -blv$$

Le schéma électrique équivalent de la figure donne, par application de la loi des mailles :

$$\varepsilon + e = Ri \Rightarrow \varepsilon - Blv = Ri$$

En l'absence d'opérateur ($F_{op} = 0$), l'étude mécanique de la barre est analogue aux précédentes. Sa projection sur $\overrightarrow{u_x}$ s'écrit :

$$i(t)lB = m\frac{dv}{dt}\ (\text{équation mécanique})$$

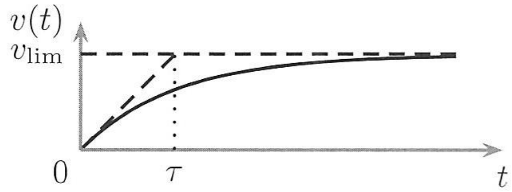
On élimine par exemple i de ces deux équations, ce qui donne :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{Bl}{m}(\varepsilon - Blv)}{R} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2v}{mR} = \frac{\varepsilon Bl}{mR}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}\ \text{où}\ \tau = \frac{mR}{B^2l^2}\ et\ v_{lim} = \frac{\varepsilon}{Bl}$$

En supposant que la vitesse initiale de la barre soit nulle (phase de démarrage du moteur), la vitesse est donnée par :

$$v(t) = v_{lim}\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$



Évolution de la vitesse du moteur linéaire de Laplace.

b) Force contre-électromotrice d'un moteur électrique

Lorsque la vitesse limite $v_{lim} = \frac{\varepsilon}{Bl}$ est atteinte, l'équation électrique indique que le courant est nul. **C'est une manifestation extrême de la loi de modération de Lenz : la fem induite est exactement opposée à la fem qui a causé le démarrage du moteur.**

c) Bilan énergétique

On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v, et on fait la somme membre à membre des deux équations ainsi obtenues. Les termes vBli se simplifient (on retrouve le fait que $P_{la} = -P_{fem\,induite}$ et il reste :

$$\mathscr{E}i = Ri^2 + mv\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathscr{E}i}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par }\mathscr{E}}} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{reçue par }R}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t}}.$$

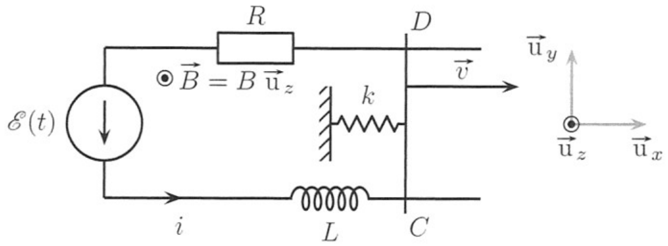
La puissance électrique apportée par le générateur sert à échauffer la résistance d'une part, et à accroître l'énergie cinétique de la barre (objet de masse m à mettre en mouvement) d'autre part.

d) Haut-parleur électrodynamique

- Principe

Un haut-parleur doit convertir un signal électrique (tension variable dans le temps) en signal mécanique (vibration d'une membrane pour émettre le son). C'est un transducteur électromécanique qui utilise les actions de Laplace et met en jeu des phénomènes d'induction.

La géométrie des véritables haut-parleurs rend difficile, voire impossible, le calcul du flux magnétique à travers le circuit mobile. Cela compromet l'application de la loi de Faraday. Pour contourner ce problème, on raisonne sur la géométrie simplifiée des rails de Laplace. Cela donne des équations électrique et mécanique analogues à celles d'un vrai haut-parleur. Ce modèle est donc suffisant pour illustrer le principe du haut-parleur.



Dans un modèle simplifié, un haut-parleur est représenté par des rails de Laplace horizontaux, plongés dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ orthogonal au plan du circuit. La barre [CD], de masse m et de longueur l, est la seule partie mobile. Elle est liée mécaniquement aux parties fixes du circuit par un ressort de raideur k, qui ne joue aucun rôle électrique. En plus de la réaction normale, les rails exercent sur la barre une force de frottements fluides $\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}\,(avec\ \lambda > 0)$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la barre par rapport aux rails. La barre, en se déplaçant, entraîne avec elle une membrane qui émet des ondes sonores. De ce fait, la barre est soumise à une force résistante supplémentaire $\vec{F} = -\alpha\vec{v}\,(avec\ \alpha > 0)$. On note L le coefficient d'auto-inductance (cela tient compte du fait que le circuit d'un vrai haut-parleur est bobiné).

- Equation éléctrique
  Calculons la fem induite dans le circuit lors du mouvement de la barre mobile [CD]

On note a la longueur du rectangle formé par le circuit lorsque l'ensemble est à l'équilibre mécanique (ressort ni tendu ni comprimé). On note x l'écart algébrique de position de la barre par rapport à cet état d'équilibre. L'aire du rectangle est donc (a + x).l et son vecteur surface associé est, d'après l'orientation choisie pour i :

$$\vec{S} = (a + x).\,l\overrightarrow{u_z}$$

Le flux magnétique extérieur est :

$$\Phi = (a + x).lB$$

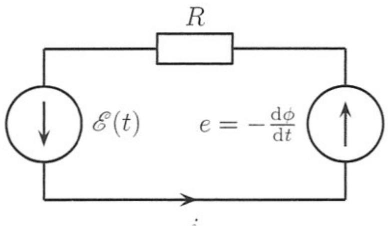
En tenant compte en plus du flux propre,le flux magnétique total à travers le circuit est :

$$\Phi = (a + x).lB + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - Blv$$

Où v vitesse de la barre en projection sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$.



L'équation électrique de la barre est :

$$\varepsilon + e = Ri \Leftrightarrow \varepsilon - Blv - L\frac{di}{dt} = Ri$$

- Equation mécanique

  La barre est soumise :

  - Aux actions de Laplace $F_{la} = ilB\,\overrightarrow{u_x}$,
  - A l'action de rappel du ressort $\overrightarrow{F_{ressort}} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$,
  - Aux forces de frottements fluides exercées par les rails et l'air $\overrightarrow{F_{frott}} = -(\lambda + \alpha)v\,\overrightarrow{u_x}$
  - Ainsi qu'à son poids : $\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$
  - Et à la réaction normale des rails $\vec{N} = N\,\overrightarrow{u_z}$

En projection sur $\overrightarrow{u_x}$, la loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit :

$$ilB - kx - (\lambda + \alpha)v = m\frac{dv}{dt}$$

Les équations électrique et mécanique sont linéaires en x(t) et i(t). En imposant $\varepsilon(t) = E\cos(\omega t)$, un régime forcé s'installe dans lequel toutes les grandeurs i, x et v sont sinusoïdales à la pulsation temporelle ω. Ainsi, la membrane vibre en émettant une onde sonore à la même pulsation ω que le signal électrique d'alimentation, ce qui est le but du haut-parleur.

- Bilan énergétique

Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$\varepsilon i - Blvi - L\frac{di}{dt}i = Ri^2$$

$$et\ ilBv - kxv - (\lambda + \alpha)v^2 = m\frac{dv}{dt}v$$

On réorganise les termes et on fait apparaître des dérivées remarquables :

$$\varepsilon i - Blvi = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$ilBv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - (\lambda + \alpha)v^2$$

Dans la première équation, le terme $-Blvi$ représente la puissance fournie par la fem « extérieure » induite (par le mouvement de la barre dans le champ magnétique extérieur).

Dans la seconde équation, le terme $+ilBv$ représente la puissance fournie par les actions de Laplace à la barre. Comme d'habitude, ces deux termes sont opposés.

On combine les deux équations de manière à faire disparaître ces deux termes :

$$\underbrace{\mathscr{E}i}_{\mathcal{P}_{\text{fournie par }\mathscr{E}}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)}_{\mathcal{E}_{\text{ma}}+\mathcal{E}_{\text{c}}+\mathcal{E}_{\text{p}_{\text{élast}}}} + \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2 + \alpha v^2}_{\mathcal{P}_{\text{pour vaincre les frottements}}}.$$

La puissance fournie par l'alimentation électrique ε sert à :

- Remplir (algébriquement) le haut-parleur d'énergie (cinétique, potentielle magnétique et potentielle élastique) ;
- Vaincre les frottements (effet Joule dans la résistance, frottements mécaniques de la barre sur les rails et frottements contre l'air).
- Le terme $-\alpha v^2$ (frottements contre l'air) est la puissance sonore émise par le haut-parleur. C'est le terme utile. Idéalement, il faudrait annuler $Ri^2 + \lambda v^2$ (résistance nulle et rails sans frottements).