IX-1 Cinématique du point et du solide

I – Notion de référentiel

I-1) Observateurs

L'objectif de la mécanique est d'étudier en toute généralité les mouvements des corps.

La cinématique a pour objet la description des mouvements des corps, sans chercher à en déterminer les causes.

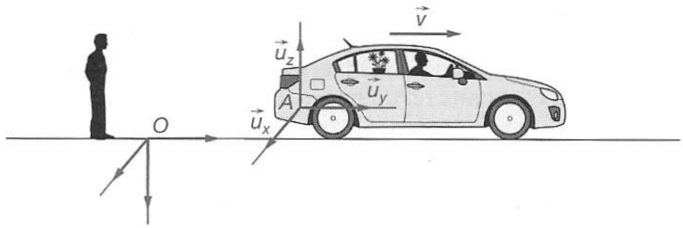
La cinématique s'intéresse donc à l'évolution de la position des corps au cours du temps. Afin de procéder à cette étude, des personnes (ou des dispositifs physiques) vont devoir effectuer des mesures. Ces personnes ou dispositifs sont appelés observateurs. Les observateurs sont donc amenés à mesurer des distances et des temps. Ils doivent être munis d'appareils permettant ces mesures, que l'on nommera génériquement règle et horloge. Afin que les mesures de différents observateurs soient cohérentes, un système d'unités doit avoir été préalablement fixé.

I-2) Référentiels

La première difficulté rencontrée lors de l'étude du mouvement d'un corps est liée au fait que le mouvement observé dépend de la personne qui réalise l'étude : c'est ce que l'on appelle le caractère relatif du mouvement.

Par exemple, considérons une voiture, et plus précisément une fleur à l'intérieur de la voiture. Pour le conducteur de la voiture, la fleur est indiscutablement immobile. En revanche, une autre personne immobile au bord de la route constate que la fleur est en mouvement, emportée par la voiture. Les points de vue différents de ces deux observateurs sont tout aussi valables l'un que l'autre et il n'existe a priori aucune raison d'en privilégier un.

Il est essentiel en mécanique de préciser quel est le type d'observateur, c'est ce que l'on appelle le choix du référentiel.



Une manière relativement simple de procéder est d'utiliser un solide dit de référence. Un solide est un corps S indéformable, c'est-à-dire que les distances entre deux points quelconques de S ne varient pas au cours du temps. Dans ce solide, on fixe trois axes concourants qui lui sont rigidement liés. Par exemple, pour le référentiel lié à la Terre nommé référentiel terrestre, on peut imaginer deux axes tracés sur la route et un axe s'enfonçant dans le sol. Ce n'est pas la seule manière de procéder : il est possible de considérer un jeu d'axes se coupant en un point autre que O et orientés différemment. Le référentiel lié à la voiture comporte trois axes liés à la voiture, comme par exemple ceux indiqués sur la figure. La première difficulté dans la description des mouvements est levée : une fois un référentiel fixé, tous les observateurs immobiles dans ce référentiel s'accorderont sur la nature du mouvement d'un corps donné.

Un référentiel est la donnée d'un système d'axe liés à un solide, muni d'une horloge.

La donnée d'un système d'axes liés à un solide se fait aisément en précisant un point fixe du solide, ainsi que trois vecteurs fixes par rapport à ce solide. Ainsi, sur la figure 1, le référentiel lié à la voiture peut être déterminé par $(A, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ (plus une horloge). On a alors utilisé un repère : il s'agit d'un point (A ici) auquel on a adjoint une base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ de l'espace. En pratique, on choisira cette base : orthonormée directe : pour le moment, on se satisfera du critère selon lequel la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est directe si on peut faire coïncider le pouce de la main droite avec $\overrightarrow{u_x}$, l'index avec $\overrightarrow{u_y}$ et le majeur avec $\overrightarrow{u_z}$. Cette notion sera développée plus tard en détail.

En d'autres termes, un référentiel est donc la donnée d'un repère rigide et d'une horloge.

En mécanique dite classique ou newtonienne, tous les observateurs mesurent le même temps quel que soit le référentiel auquel ils sont liés, à condition évidemment d'avoir au préalable synchronisé leurs horloges.

Cela signifie qu'ils lisent tous la même valeur sur leur propre horloge pour un événement donné. C'est ce que l'on appelle le temps absolu. Même si l'idée du temps absolu apparaît naturelle, elle mène à des contradictions lors d'expériences suffisamment précises. Il faut alors faire appel à la Relativité.

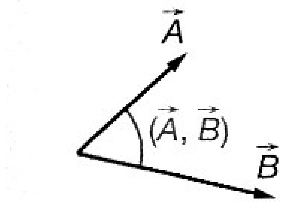
II - Le produit scalaire

II-1) Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs A et B est le nombre (c'est-à-dire le scalaire) :

$$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos(\vec{A},\vec{B})$$

où $(\vec{A},\vec{B})$ est l'angle entre les vecteurs$\vec{A}\ et\vec{B}$.



Le produit scalaire est :

- Symétrique : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- bilinéaire : quels que soient les vecteurs $\vec{A},\vec{B}\ et\ \vec{C}$ et les réels μ et λ :
  - $\vec{C}.\left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right) = \lambda\vec{C}.\vec{A} + \mu\vec{C}.\vec{B}$
  - $\left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right).\vec{C} = \lambda\,\vec{A}.\vec{C}. + \mu\,\vec{B}.\vec{C}$

Comme cela a été indiqué précédemment, les bases de l'espace usuel de dimension 3 seront systématiquement orthonormées. Le caractère orthonormé d'une base est directement lié à la notion de produit scalaire. En effet :

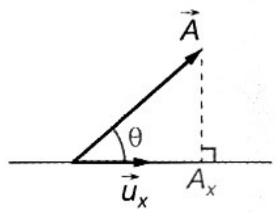
- $\overrightarrow{u_\iota}.\overrightarrow{u_\iota} = 1\,pour\ i = x,y,z$
- et $\overrightarrow{u_\iota}.\overrightarrow{u_J} = 0\,pour\ i \neq j$

II-2) Projection d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{A}$. On nomme projection (orthogonale) de $\vec{A}$ sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ la quantité :

$$A_x = \vec{A}.\overrightarrow{u_x} = \|\vec{A}\| cos\theta$$

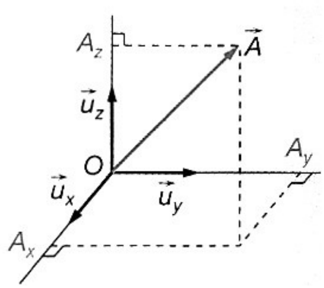
où θ est l'angle entre $\vec{A}$ et $\overrightarrow{u_x}$. Alors, vu la définition du cosinus d'un angle, la projection A_x s'interprète géométriquement comme indiqué sur la figure.



En physique, de nombreuses lois ont une nature vectorielle, comme le principe fondamental de la dynamique. La projection d'une telle loi mène à une relation souvent plus simple à exploiter.

II-3) Utilisation des coordonnées du vecteur

Un vecteur $\vec{A}$ s'écrit alors dans la base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ comme : $\vec{A} = A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\overrightarrow{u_y} + A_z\,\overrightarrow{u_z}$. où A_x (respectivement A_y, A_z) est la projection de A sur $\overrightarrow{u_x}$ (respectivement $\overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$).



On déduit de ce qui précède l'expression en coordonnées du produit scalaire de deux vecteurs. Si :

- $\vec{A} = A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\overrightarrow{u_y} + A_z\,\overrightarrow{u_z}$.
- $\vec{B} = B_x\overrightarrow{u_x} + B_y\overrightarrow{u_y} + B_z\,\overrightarrow{u_z}$

Alors le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ s'écrit comme :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

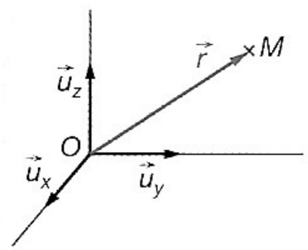
III – Système de coordonnées

III-1) Vecteur position

Après avoir choisi un référentiel, on note $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ un repère servant à définir ce référentiel. La position d'un point M à un instant t donné est alors définie sans ambiguïté : le vecteur position $\vec{r}$ du point M est à l'instant t:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}\ .$$

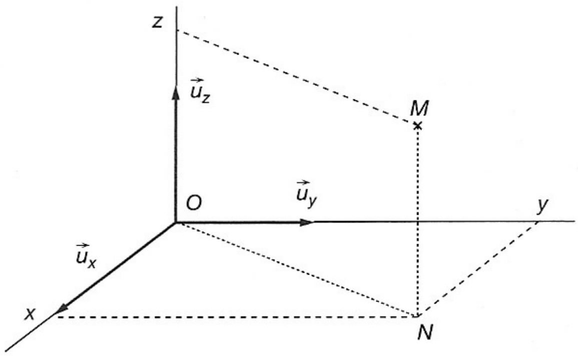
Il s'agit alors de décrire le vecteur position à l'aide de coordonnées.



III-2) Coordonnées cartésiennes

a) Vecteur position

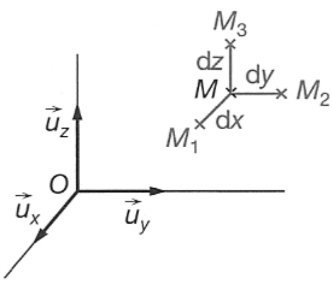
La manière la plus simple de donner des coordonnées au vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est d'utiliser ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$



où les coordonnées sont les projections orthogonales du vecteur position sur les vecteurs de la base. On notera qu'à chaque point de l'espace correspond un unique triplet (x, y, z).

b) Vecteur déplacement élémentaire

Considérons un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z). Imaginons que la coordonnée x varie de la quantité infinitésimale dx à y et z fixés. À partir du point M s'effectue un mouvement caractérisé par un déplacement dx selon $\overrightarrow{u_x}$ et menant au point M_1, soit $\overrightarrow{MM_1} = (d\overrightarrow{OM})_x = dx\,\overrightarrow{u_x}$.



De même pour les autres coordonnées :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (d\overrightarrow{OM})_y = dy\,\overrightarrow{u_y}\ et\ \overrightarrow{M_2M_3} = (d\overrightarrow{OM})_z = dz\,\overrightarrow{u_z}$$

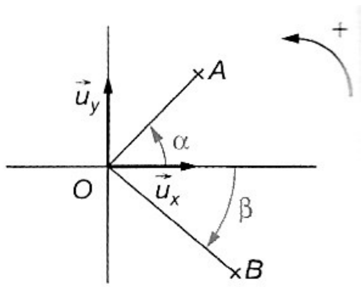
En ajoutant les contributions, on obtient le déplacement élémentaire du point M au point M', qui s'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes comme :

$$d\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\vec{r} = d\vec{M} = d\vec{l} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

III-3) Coordonnées cylindriques

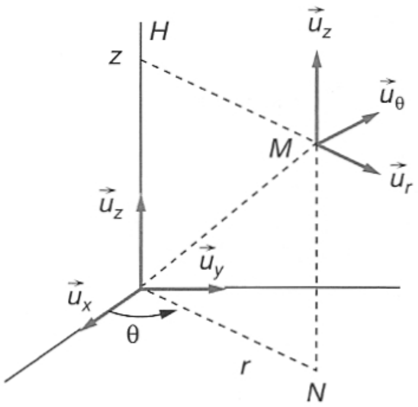
a) Angle orienté

Un angle orienté du plan xOy est un angle muni d'un signe. Il est positif s'il correspond à une rotation dans le sens de $\overrightarrow{u_x}\ vers\ \overrightarrow{u_y}$ (flèche avec un plus sur la figure), c'est-à-dire le sens trigonométrique. Il est négatif sinon.



b) Les coordonnées

Les coordonnées cartésiennes apparaissent naturelles pour les mouvements ne privilégiant aucun axe. En revanche, si un axe choisi comme (O, $\overrightarrow{u_z}$) joue un rôle particulier pour un mouvement, il est utile de lui donner un statut spécial et de définir un nouveau jeu de coordonnées, appelé coordonnées cylindriques. La coordonnée z est définie de la même manière que précédemment : $z = \vec{r}.\overrightarrow{u_z}$.



Ensuite, on considère le point N projection orthogonale de M sur le plan z = 0. On définit alors r comme la distance entre O et N (c'est-à-dire finalement la distance entre M et l'axe Oz, soit HM), puis θ comme l'angle orienté entre $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{ON}$.

Au final, on obtient :

- r = HM = distance de M à l'axe Oz ∈ $\mathbb{R}^+$
- $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{ON}) \in [0,2\pi[$
- $z = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_z} \in \mathbb{R}$

On remarquera que pour les points de l'axe Oz, l'angle θ peut être choisi quelconque. On a là une singularité du système de coordonnées.

c) Base locale cylindrique

À ce point, il est utile de définir la base locale cylindrique. **Le concept de base locale signifie que les vecteurs de la base dépendent du point M considéré**. Soit M un point hors de l'axe Oz. On définit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ comme le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{ON}$ ou de manière équivalente $\overrightarrow{HM}$.

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{1}{r}\overrightarrow{HM} = \frac{1}{r}\overrightarrow{ON}$$

Enfin, on définit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ de telle manière que $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ soit une base orthonormée directe. En pratique, cela signifie que $\overrightarrow{u_\theta}$ correspond à une rotation de + π / 2 radians autour de l'axe Oz.

À tout point M (hors de l'axe Oz), on associe une base cylindrique locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.

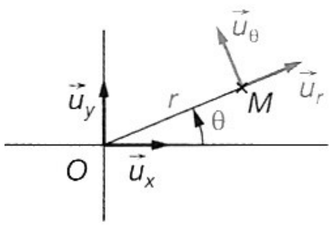
Dans la base locale, on peut réécrire le vecteur position de manière simple :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

d) Coordonnées polaires

Dans le cadre d'un mouvement plan caractérisé par la coordonnée z constante, les coordonnées cylindriques se simplifient. On choisit l'origine O du repère dans le plan du mouvement, de telle manière que celui-ci soit caractérisé par z= 0. Les deux coordonnées polaires (r, θ) suffisent à décrire la position d'un point. La base locale se réduit alors à $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. Enfin, le vecteur position s'écrit :

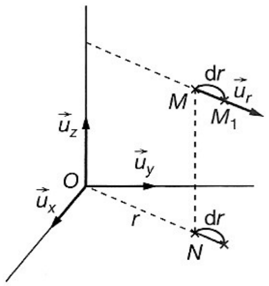
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

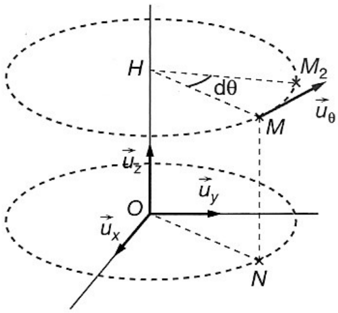


e) Déplacement élémentaire

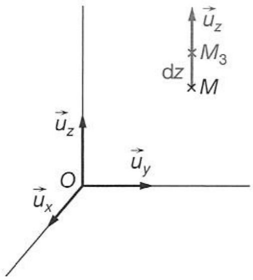
On procède comme précédemment en coordonnées cartésiennes. Intéressons-nous à un point M de coordonnées cylindriques (r,θ,z).

Si la coordonnée r varie de dr (θ et z ne variant pas), alors le point se déplace radialement, c'est-à-dire selon $\overrightarrow{u_r}$, de la distance dr, soit soit $\overrightarrow{MM_1} = (d\overrightarrow{OM})_r = dr\,\overrightarrow{u_r}$. Ensuite, si la coordonnée θ varie de dθ (à r et z fixés), un déplacement $(d\overrightarrow{OM})_\theta$ s'effectue le long du cercle de rayon r passant par M tel que $\overrightarrow{MM_2} = (d\overrightarrow{OM})_\theta = rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$.





Enfin, la variation dz de z produit le déplacement $\overrightarrow{MM_3} = (d\overrightarrow{OM})_z = dz\,\overrightarrow{u_z}$.



En ajoutant les contributions, on aboutit au déplacement élémentaire du point M en M', lié à une variation élémentaire de chacune des coordonnées cylindriques :

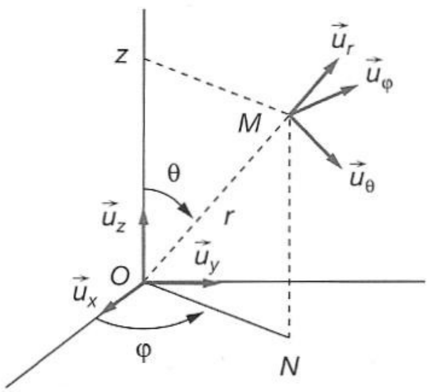
$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r d\theta \overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}.$$

III-4) Coordonnées sphériques

a) Les coordonnées

Lorsqu'un point donné de l'espace joue un rôle spécifique, il est souvent utile de privilégier ce point en utilisant des coordonnées sphériques. Le point privilégié est choisi comme origine O du repère $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

- La coordonnée radiale r est définie par: $r = \|\overrightarrow{OM}\| = OM > 0$
- Ensuite, la colatitude θ est définie par l'angle θ = $(\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{OM})$. La colatitude est un angle géométrique prenant ses valeurs dans l'intervalle [0, π].
- Enfin, la longitude φ est l'angle φ = $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{ON})$, et varie par exemple dans [0, 2π[. Au final, on obtient :



b) Base locale sphérique

On définit alors la base locale sphérique ($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}$). Soit M un point hors de l'axe Oz.

- On définit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ comme le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{u_r} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$
- Ensuite, le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ dans le plan ($\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_r}$), dans le sens correspondant à une augmentation de θ.
- Enfin, on définit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\varphi}$, de telle manière que ($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}$) soit une base orthonormée directe. En pratique, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$, est parallèle à x0y, pointant dans le sens d'augmentation de φ.

Dans la base locale, le vecteur position s'exprime très simplement :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ur}.$$

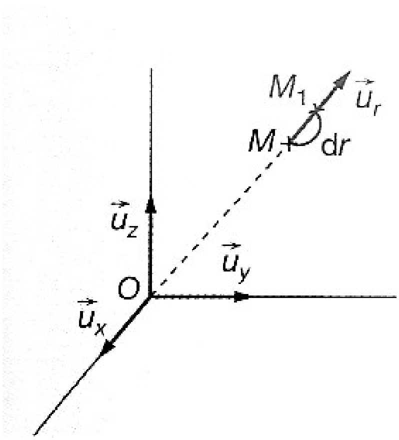
c) Déplacement élémentaire

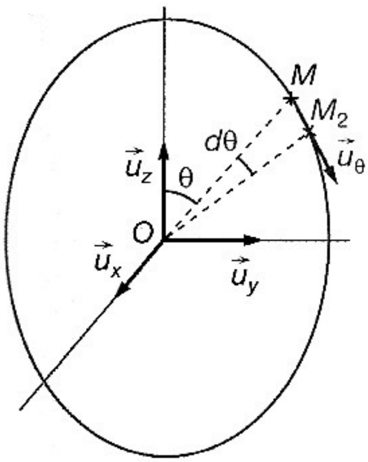
On suit un raisonnement similaire à celui utilisé précédemment en coordonnées cylindriques. Intéressons-nous à un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ).

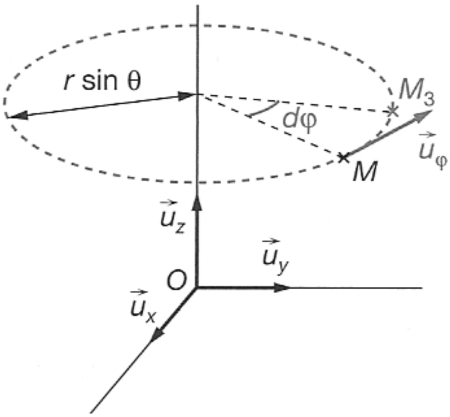
Si la coordonnée r varie de dr (θ et φ ne variant pas), alors le point se déplace radialement, c'est-à-dire selon $\overrightarrow{ur}$, de la distance dr, soit $\overrightarrow{MM_1} = (d\overrightarrow{OM})_r = dr\,\overrightarrow{u_r}$.

Ensuite, si la coordonnée θ varie de dθ (avec les autres coordonnées constantes), un déplacement élémentaire s'effectue à partir de M sur le cercle de rayon r passant par M. Alors, $\overrightarrow{MM_2} = (d\overrightarrow{OM})_\theta = rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$.

Enfin, la variation de φ de dφ produit un déplacement repéré par la variation angulaire dφ sur le cercle de rayon rsinθ passant par M et centré sur l'axe Oz (Fig. 27). Ce déplacement est caractérisé par $\overrightarrow{MM_3} = (d\overrightarrow{OM})_\varphi = \mathrm{r}\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$.







En ajoutant les contributions, on aboutit au déplacement élémentaire du point M en M', lié à une variation élémentaire de chacune des coordonnées sphériques :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + rsin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

III-5) Coordonnées d'un vecteur quelconque

Dans ce qui précède, on a exprimé le vecteur position d'un mobile dans trois types de bases, cartésienne, cylindrique et sphérique. Il est possible de généraliser cette problématique, c'est-à-dire exprimer un vecteur quelconque dans les trois bases précédentes. En effet, on dispose de trois bases de l'espace, la base cartésienne et les bases locales cylindrique et sphérique.

Tout vecteur $\vec{A}$ peut être exprimé dans l'une ou l'autre de ces deux bases. En toute généralité, on notera :

- $\vec{A} = A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\overrightarrow{u_y} + A_z\,\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cartésiennes.
- $\vec{A} = A_r\overrightarrow{u_r} + A_\theta\overrightarrow{u_\theta} + A_z\,\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cylindriques.
- $\vec{A} = A_r\overrightarrow{u_r} + A_\theta\overrightarrow{u_\theta} + A_\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$ en coordonnées sphériques.

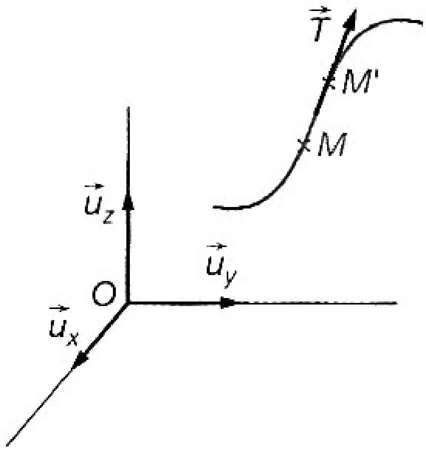
IV - Vecteurs vitesse et accélération

IV-1) Trajectoire

Soit R un référentiel donné et un point matériel mobile dans ce référentiel.

Sa trajectoire, est définie comme l'ensemble des points de l'espace successivement occupés par le mobile, est représentée par une courbe. La trajectoire est alors décrite par ses coordonnées cartésiennes. Chacune des coordonnées du point évolue au cours du temps et s'écrit donc comme une fonction du temps.

Notons qu'à une trajectoire donnée correspondent plusieurs types de mouvement. Par exemple, une même trajectoire circulaire peut être parcourue à vitesse constante ou non.



IV-2) Vecteur vitesse

a) Définition

La position à l'instant t du point mobile est notée M, et celle à l'instant tout juste postérieur t + Δt est M'. Alors, le vecteur vitesse du point à l'instant t est défini par :

$$\vec{v}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Ce qui peut aussi s'écrire:

$$\vec{v}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Donc :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse (souvent appelé plus simplement vitesse) ainsi défini correspond à son interprétation usuelle. Plus un point parcourt une distance importante entre deux instants proches, plus la norme de sa vitesse est élevée. Insistons sur le fait que la vitesse est une grandeur vectorielle : la notion de vitesse d'un point matériel concerne à la fois sa norme et sa direction. En revanche, dans le langage courant, le terme « vitesse » se rapporte plutôt à la norme.

Ainsi, un physicien distingue un mouvement à vitesse constante (c'est-à-dire un mouvement rectiligne uniforme) d'un mouvement de vitesse de norme constante (dont la trajectoire associée peut être quelconque) appelé mouvement uniforme…

En termes de dimensions, une vitesse est homogène à une distance divisée par un temps, ce que l'on note :

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{L.T^{-1}} \Leftrightarrow (\mathbf{m.s^{-1}}).$$

On retiendra enfin que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. En effet, il est colinéaire à $\overrightarrow{MM'}$, où M et M' sont deux points très proches de la trajectoire et donc alignés selon le vecteur tangent $\vec{T}$.

Il reste à écrire l'expression de la vitesse en fonction des coordonnées.

b) Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point mobile doivent alors être interprétées comme des fonctions du temps, qui peuvent varier. D'après l'expression (3), le déplacement élémentaire MM' s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\vec{r} = d\vec{M} = d\vec{l} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

On déduit alors l'expression du vecteur vitesse :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\,\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Les quantités dx et dt étant élémentaires, leur quotient s'identifie directement à la dérivée. Une dérivée temporelle est souvent notée par un point au-dessus de la quantité dérivée.

c) Coordonnées cylindriques

Procédons similairement en coordonnées cylindriques. Lorsque les coordonnées (r, 0,z) varient de (dr, dθ, dz), l'expression du déplacement $\overrightarrow{MM'}$ du point considéré est :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r d\theta \overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}.$$

On a donc l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z}}$$
$$\boldsymbol{= \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

En coordonnées polaires cela devient :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$$

d) Coordonnées sphériques

De même :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$
$$\boldsymbol{= \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}}$$

IV-3) Vecteur accélération

a) Définition

Le vecteur accélération $\vec{a}$ (aussi appelé plus simplement accélération) s'interprète comme la variation temporelle du vecteur vitesse. Si le vecteur vitesse d'un point mobile à l'instant t est $\vec{v}$, puis $\overrightarrow{v'}$ à l'instant légèrement ultérieur t + Δt, on définit :

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{v'}} - \vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t} + \Delta \boldsymbol{t}) - \vec{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{t})}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{dt^2}$$

L'accélération est ainsi la dérivée temporelle du vecteur vitesse (ou la dérivée seconde du vecteur position).

Une accélération non nulle correspond donc à un changement de vitesse, que ce soit en norme et/ou en direction.

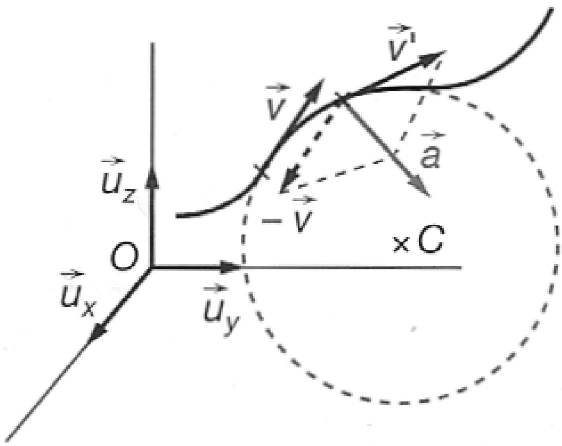
Tout comme la vitesse, l'accélération est une grandeur vectorielle, donc bien à exprimer comme telle. Dans le langage courant, le terme d'accélération d'un mouvement est plutôt relié à une augmentation de norme de vitesse, il s'agit d'être précis dans les dénominations !

Du point de vue des dimensions, l'accélération est le quotient d'une vitesse par un temps, c'est donc une distance divisée par le carré d'un temps :

$$\textbf{[a] = L.T}^{-2} \Leftrightarrow \textbf{(m.s}^{-2}\textbf{)}.$$

D'un point de vue expérimental, les vecteurs vitesse et accélération se déduisent de relevés de position (voir TP).

b) Direction du vecteur accélération



Des informations peuvent être extraites de l'examen du vecteur accélération :

Par sa définition $\vec{a}$ est proportionnelle à $\overrightarrow{v'} - \vec{v}$ donc l'accélération est tournée vers « l'intérieur de la trajectoire », ce que l'on exprime mathématiquement en disant qu'elle est dirigée dans la concavité de la trajectoire.

Précisons cette notion. Toute courbe régulière ressemble localement à un cercle. L'intérieur de la concavité est du côté du centre C de ce cercle. L'inverse du rayon de courbure (appelée aussi rayon osculateur) de ce cercle se nomme courbure de la courbe

c) Coordonnées intrinsèques

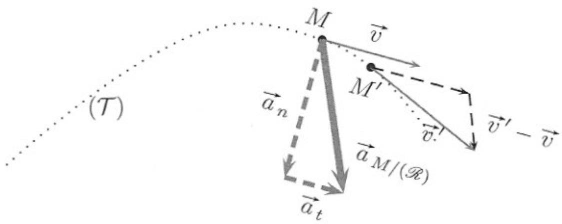
Soit : $\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$, où v est la norme du vecteur vitesse et $\vec{T}(t)$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire à l'instant t.

Alors, $\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$

Or $\frac{d(\vec{T}.\vec{T})}{dt} = 2\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{dt} = 0\ car\ \|\vec{T}\| = 1$=T'. Cela signifie que $\frac{d\vec{T}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{T}$: la tangente à la trajectoire. Notons le vecteur unitaire normal à $\vec{T}$

Ainsi : $\boldsymbol{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}}$

a_T et a_N sont appelées les coordonnées intrinsèques de $\vec{a}$.



Comme pour le vecteur vitesse, il reste à exprimer le vecteur accélération dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques.

d) Coordonnées cartésiennes

Rappelons l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Il s'agit alors de dériver cette relation :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z} + \frac{dx}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_x}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_y}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}$$

Sachant que les vecteurs $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$sont fixes, on aboutit à :

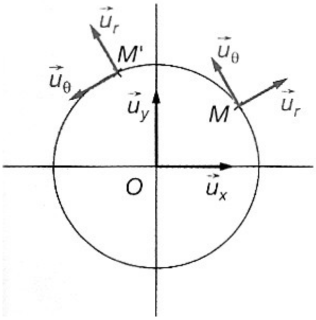
$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$$
$$= \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

e) Coordonnées cylindriques

Il s'agit de dériver là aussi l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques. Ainsi : , ,

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$$
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$
$$+ \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$$

Contrairement au cas des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de la base locale varient au cours du temps. Il est alors nécessaire d'évaluer leur dérivée temporelle.



On a :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}$$
$$et\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\overrightarrow{u_y}$$

Donc :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{u_y} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\overrightarrow{u_y}\right) = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$et\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{u_x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_y} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}\right) = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

Par conséquent :

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Il est utile de bien vérifier l'homogénéité de cette expression. Chacun des termes est homogène à une longueur divisée par le carré d'une distance.

En polaires : $\boldsymbol{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$

V - Quelques exemples da mouvements de points matériels

V-1) Mouvement non accéléré

Il s'agit là du cas le plus simple :

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cste} = \overrightarrow{v_0} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_0}t + \overrightarrow{cste} = \overrightarrow{v_0}t + \overrightarrow{OM_0}$$

Par conséquent, le vecteur vitesse ne varie ni en norme, ni en direction. La trajectoire est alors une droite uniformément parcourue. On parle alors de mouvement rectiligne uniforme.

V-2) Mouvement à vecteur accélération constant

Ce mouvement a déjà été étudié en Terminale S. Il s'agit par exemple d'une masse en chute libre dans un champ de gravitation uniforme, ou d'une particule chargée placée dans un champ électrique uniforme.

Un choix habile des vecteurs de la base cartésienne s'impose. Le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ est pris unitaire selon la direction de l'accélération :

$$\vec{a} = a\overrightarrow{u_x}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = at\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{cste} = at\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{v_0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}at^2\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{v_0}\mathrm{t} + \overrightarrow{OM_0}$$

Supposons que : $\overrightarrow{OM_0} = \vec{0}\ et\ \overrightarrow{v_0} = v_{0\mathrm{z}}\overrightarrow{u_z} + v_{0\mathrm{x}}\overrightarrow{u_x}$

Alors : $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}at^2 + v_{0\mathrm{x}}\mathrm{t}\right)\overrightarrow{u_x} + (v_{0\mathrm{z}}\mathrm{t})\overrightarrow{u_z}$

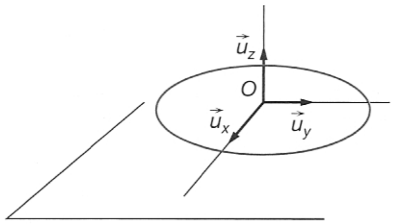
$$Donc : x = \frac{1}{2}at^2 + v_{0\mathrm{x}}\mathrm{t}\ et\ z = v_{0\mathrm{z}}\mathrm{t}$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}a\left(\frac{z}{v_{0\mathrm{z}}}\right)^2 + v_{0\mathrm{x}}\frac{z}{v_{0\mathrm{z}}}$: Mouvement parabolique

V-3) Mouvement circulaire

a) Cas général

Un autre cas très fréquent est le mouvement circulaire. On peut le rencontrer par exemple pour un satellite en orbite autour de la Terre. Ce mouvement est plan, et effectué à distance constante du centre du cercle choisi comme origine O. Le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, sera pris perpendiculaire au plan de la trajectoire.



Les coordonnées polaires permettent une description assez simple de la situation. La coordonnée radiale r(t) est alors constante et égale au rayon R de la trajectoire. La donnée de la seconde coordonnée θ(t) permet de positionner le point mobile sur le cercle. De manière générale, la fonction θ(t) est quelconque, et on nomme vitesse angulaire la quantité $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$. La vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{R}\,\overrightarrow{u_r} + R\omega\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

La vitesse est dite orthoradiale et est bien tangente à la trajectoire circulaire.

On étudie alors le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} + (R\dot{\omega})\overrightarrow{u_\theta}$$

Si le mouvement est uniforme alors : $\vec{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$

Celui-ci est bien dirigé dans la concavité comme on l'a expliqué précédemment.

Étudions plus en détail les projections du vecteur accélération sur les vecteurs tangent et normal à la trajectoire. Tout d'abord, en notant $\vec{T}$ le vecteur tangent à la trajectoire, la composante tangentielle de l'accélération est :

$$\vec{a}.\vec{T} = \vec{a}.\overrightarrow{u_\theta} = R\dot{\omega}$$

Cette quantité s'identifie bien à la dérivée $\frac{dv}{dt}$ de la norme de la vitesse

$$Et\ \vec{a}.\vec{N} = \vec{a}.-\overrightarrow{u_r} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Ainsi, la composante normale de l'accélération est égale au carré de la norme de la vitesse divisé par le rayon de la trajectoire. En fait, cette relation reste valable pour toute trajectoire en utilisant pour R le rayon du cercle osculateur : tout mouvement est localement assimilable à un mouvement circulaire.

$$\boldsymbol{\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}\vec{N} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} + (R\dot{\omega})\overrightarrow{u_\theta}}$$

b) Circulaire uniforme

Si $\theta(t)$ est de la forme $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, où ω et θ_0 sont des constantes, le cercle est parcouru uniformément $\Rightarrow \dot{\omega} = 0$.

Alors : $\vec{a} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}\vec{N} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$

On obtient le résultat important suivant :

Dans le cas d'un cercle parcouru uniformément, le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle et possède une norme constante.

VI – Cinématique du solide

VI-1) Le solide

Un solide est un système matériel indéformable, ce qui signifie que la distance entre deux points quelconques d'un solide reste la même au cours du temps.

Ce modèle assez simple est pourtant bien approché par de nombreux corps dans la vie courante. Par exemple, un stylo, une chaise, ou bien un ballon de football sont des solides — dans des conditions habituelles d'utilisation. Par opposition, une feuille de papier, ou une voiture ne sont pas des solides (dans ce dernier cas, les roues peuvent tourner indépendamment de la carrosserie et les distances entre certains points des roues et de la carrosserie peuvent varier). **Ainsi, un ensemble de solides ne forme pas en général un solide.**

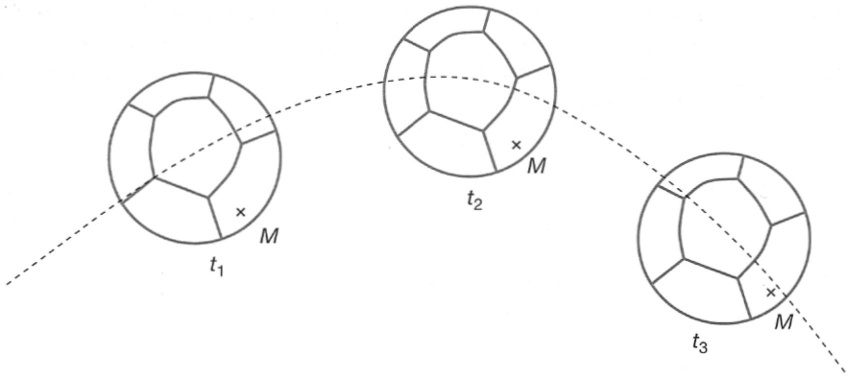
Étudions deux cas particuliers de mouvements d'un solide.

VI-2) Translation d'un solide

Dans un mouvement de translation, tous les points du solide ont même vecteur vitesse à un instant donné : **quels que soient les points A et B du solide :** $\vec{v}\,(A) = \vec{v}\,(B)$.

Le point essentiel est qu'à un instant fixé, le vecteur vitesse de tous les points soit identique. En revanche, cette même vitesse peut varier au cours du temps, mais de manière identique pour tous les points. La translation peut ainsi être quelconque : rectiligne, mais aussi circulaire ou elliptique…

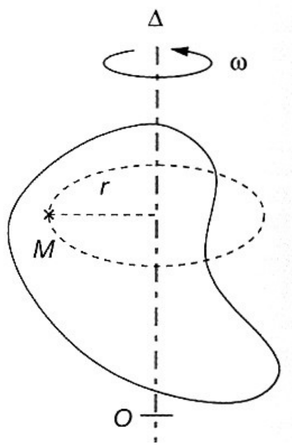
Par exemple, un ballon de football lancé sans effet (c'est-à-dire sans rotation sur lui-même) est en translation. Comme on le verra par la suite, la translation est dans ce cas parabolique.



VI-2) Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

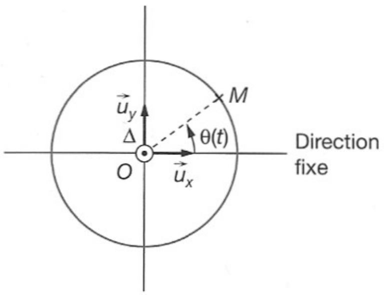
a) Vitesses

Soit Δ une droite (fixe) de l'espace. Un solide est dit en mouvement de rotation autour de l'axe fixe Δ si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de l'axe Δ.



Soit M un point du solide, à la distance r de l'axe Δ. Notons sa position au cours du temps à l'aide d'un angle θ(t) repéré par une certaine direction fixe de l'espace $\overrightarrow{u_x}$ (une vue de dessus est représentée sur la figure). On appelle alors vitesse angulaire de rotation du solide la quantité :

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$



On pourrait s'inquiéter de l'influence du choix du point M sur la vitesse angulaire ω. Il n'en est rien : vu sa rigidité, le solide entraîne l'ensemble de ses points de la même manière. Cette vitesse angulaire ω peut varier dans le temps, suivant que le mouvement de rotation accélère ou ralentit.

La vitesse du point M s'exprime alors très simplement. En utilisant les coordonnées cylindriques d'axe Oz = Δ en repérant l'angle θ par rapport à $\overrightarrow{u_x}$, on obtient :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

- Le point M reste à la même distance r de l'axe, soit $\dot{r} = 0$
- Et à la même altitude repérée selon Δ, soit $\dot{z} = 0$.

Ainsi, $\boldsymbol{\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$

Tous les points du solide possèdent alors un vecteur vitesse orthoradial (dirigé selon $\overrightarrow{u_\theta}$), de norme d'autant plus importante que le point est éloigné de l'axe. Notamment, tous les points du solide situés sur l'axe de rotation Δ possèdent une vitesse nulle.

b) Vecteur rotation

Pour exprimer $\vec{v}$, il est commode d'introduire le vecteur rotation instantanée du solide tel que :

$$\vec{\Omega} = \omega\overrightarrow{u_\Delta} = \omega\overrightarrow{u_z}$$

A l'aide de ce vecteur on peut écrire :

$$\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$$

c) Conclusion

Pour un solide indéformable en rotation autour de l'axe fixe Δ :

- **L'axe de rotation Δ est l'ensemble des points dont la vitesse est nulle**
- **Le vecteur rotation instantanée $\boldsymbol{\vec{\Omega}}$ est colinéaire à l'axe de rotation et sa norme représente la vitesse angulaire du solide autour de Δ**
- **Si O est un point quelconque de Δ et M un point du solide : $\boldsymbol{\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$**

VI-4) Mouvement d'un solide : cas général

En fait, le mouvement d'un solide est tellement contraint que l'on peut le décrire dans le cas le plus général comme la composition d'une translation et d'une rotation particulières.