

VIII-1 – FILTRAGE LINEAIRE

L'essor des télécommunications à la fin du 19ème et au début du 20ème siècle a conduit les scientifiques à développer de nombreux outils pour améliorer les réseaux. Un mathématicien allemand, Franz Breisig, s'est intéressé dans les années 1920 à la notion de quadripôle, c'est-à-dire aux circuits électriques qui comportent deux bornes d'entrée et de sortie. Dès que l'on souhaite transmettre une information électrique (signal Internet, téléphonique, etc.), la notion de quadripôle devient nécessaire. Dans ce chapitre, nous allons développer des outils permettant l'étude des quadripôles linéaires, mais également la notion de filtrage qui lui est intimement liée.

Le principe du filtrage repose sur le fait que tout signal périodique peut se décomposer en une composante continue (valeur moyenne) à laquelle s'ajoute une somme de signaux sinusoïdaux : c'est la décomposition en série de Fourier 1. Le filtrage consiste à agir sur chaque composante harmonique de manière différente : certaines seront supprimées ou atténuées, d'autres conservées.

Nous illustrerons le filtrage en étudiant des filtres types d'ordres un et deux. Les premiers seront traités avec des circuits RC, et les seconds avec des circuits RLC.

I – Signaux périodiques

I-1) Décomposition en série de Fourier

a) Théorème de Fourier

Sous certaines conditions de régularité dont la démonstration relève d'un cours de mathématiques et qui seront toujours satisfaites en physique, une fonction $f(t)$, périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est décomposable en une série de fonctions sinusoïdales de pulsations $n.\omega$, avec n entier naturel et d'amplitudes déterminées, sous la forme :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$\text{avec } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad \& \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Où $s_0 = a_0/2$ est la valeur moyenne du signal

- Ce développement unique est appelé développement en série de Fourier de la fonction f (en abrégé D.S.F.)
- Les coefficients a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f .
- Le terme $a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ est appelé fondamental.
- Le terme $a_n \cos(\omega t) + b_n \sin(\omega t)$ est l'harmonique de degré n .

b) Exemples

En pratique, lorsque l'on décompose un signal selon la méthode précédente, la somme est généralement tronquée et ne donne donc qu'une approximation de la fonction. Nous allons voir sur deux exemples classiques comment la forme du signal évolue suivant le nombre de termes sommés.

Considérons un signal triangulaire pair de période T , et de valeur moyenne non nulle, égale à s_0 . Le calcul des coefficients de Fourier donne la décomposition suivante, avec $\omega=2\pi/T$.

$$s(t) = s_0 - 4 \frac{s_{max} - s_{min}}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\omega t]}{(2n+1)^2}$$

$$= s_0 - 4 \frac{s_{max} - s_{min}}{\pi^2} \left(\cos[\omega t] + \frac{\cos[3\omega t]}{3^2} + \frac{\cos[p\omega t]}{p^2} + \dots \right)$$

La fonction $s(t) - s_0$ étant paire, il n'y a que des fonctions cosinus dans la décomposition.

On remarque que seul les harmoniques impairs interviennent et ils décroissent en $1/p^2$

La figure montre les courbes obtenues pour différentes sommes partielles

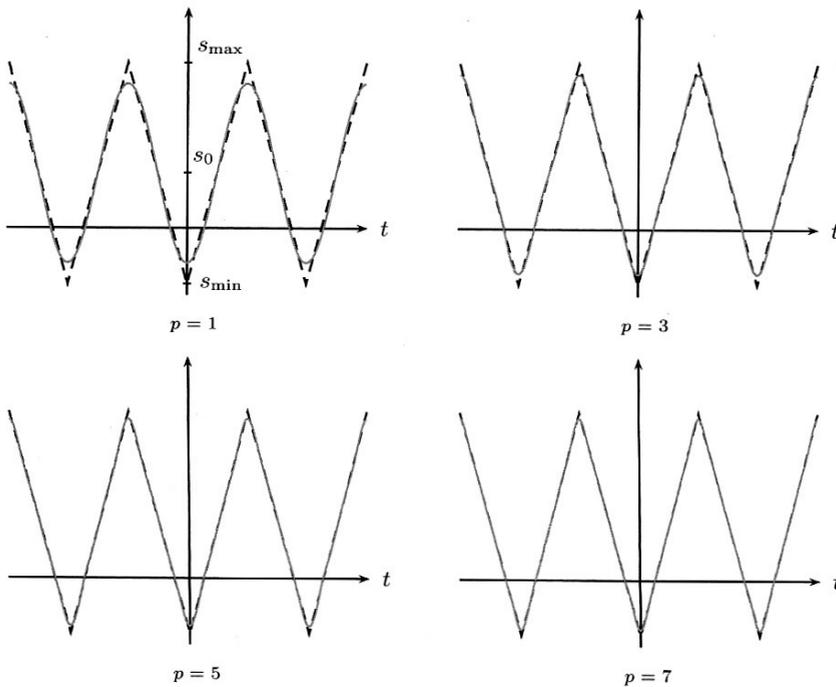


FIG. 8.1. Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire.

Plus la somme partielle comporte de termes, plus elle s'approche la fonction $s(t)$ de façon satisfaisante. Du fait de l'absence de discontinuité, la somme partielle converge très rapidement vers s .

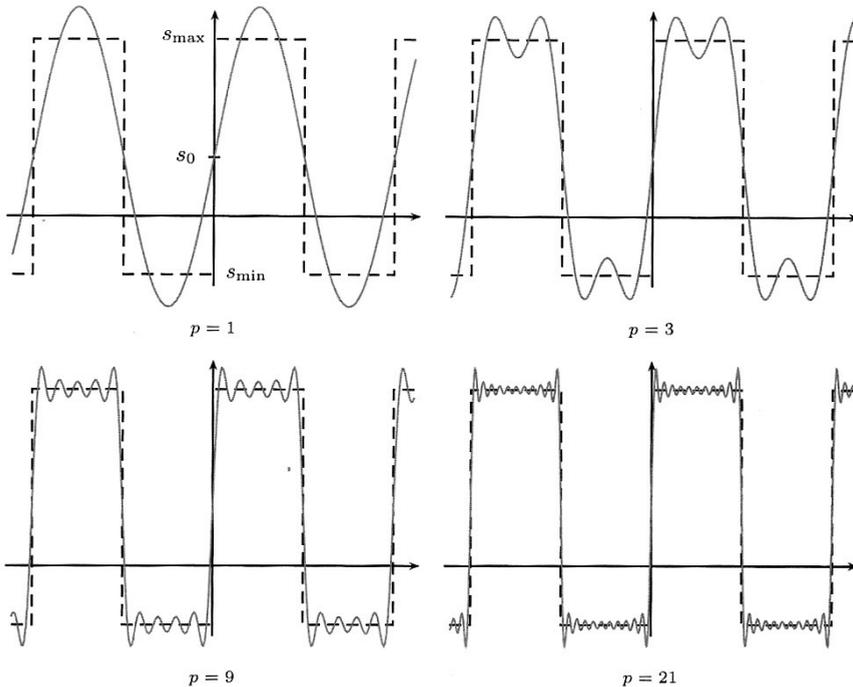
Pour $p = 7$ (soit $n = 3$) le signal est déjà très bien reconstitué.

Considérons maintenant un signal créneau, de période T et de valeur moyenne non nulle, égale à s_0 . Choisissons de plus $s(t) - s_0$ impaire, ainsi il n'y aura que des fonctions sinus dans la décomposition :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= s_0 + 2 \frac{s_{\max} - s_{\min}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{(2n+1)} \\
 &= s_0 + 2 \frac{s_{\max} - s_{\min}}{\pi} \left(\sin[\omega t] + \frac{\sin[3\omega t]}{3} + \frac{\sin[p\omega t]}{p} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

On remarque que seul les harmoniques impairs interviennent et ils décroissent en $1/p$.

La figure montre les courbes obtenues pour différentes sommes partielles.



Décomposition en série de Fourier d'un signal créneau.

Plus la somme partielle comporte de termes, plus elle approche la fonction $s(t)$. Néanmoins, pour $p = 9$, l'allure du signal est ressemblante, sauf au voisinage des discontinuités qui nécessitent de sommer un plus grand nombre de termes. De plus, les oscillations très rapides qui apparaissent au niveau des discontinuités du créneau correspondent au phénomène de Gibbs qui est un effet de bord inévitable, dû aux discontinuités de la fonction.

I-2) Analyse harmonique

$S(t)$ peut aussi s'écrire :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$= s_0 + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right]$$

On peut donc poser :

$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin(\varphi_n) = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{etc } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

On a alors :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\varphi_n) \cos(n\omega t) + B_n \sin(\varphi_n) \sin(n\omega t)]$$

$$\Rightarrow s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

L'écriture sous cette forme de la fonction s s'appelle le développement en série de Fourier de s .

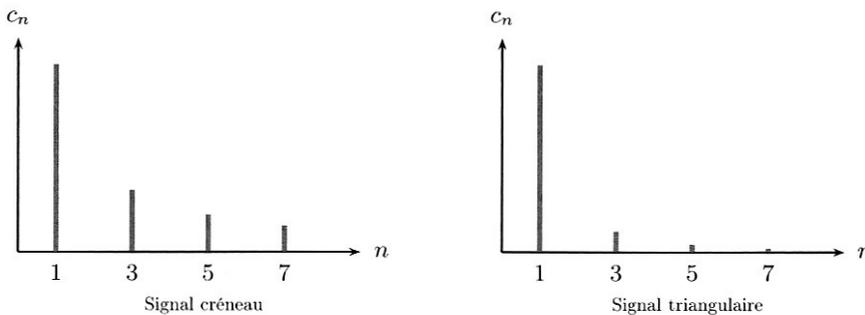
- Le coefficient s_0 est la valeur moyenne de la fonction s .
- Le terme $n = 1$ de la somme s'appelle le fondamental, de pulsation égale à celle du signal.
- Les termes suivants sont les harmoniques d'ordre n , de pulsation $n\omega$, d'amplitude c_n , et de phase à l'origine de temps φ_n .

Le spectre de Fourier d'un signal s est l'ensemble des coefficients de Fourier de s . En physique, ce spectre est souvent représenté en traçant l'amplitude c_n , (et parfois la phase φ_n) sous forme de diagrammes en bâtons.

Dans le cas général, il y a un nombre infini d'harmoniques ; néanmoins, leur amplitude décroît généralement assez vite avec n et le spectre est alors souvent limité aux premiers harmoniques.

On représente un spectre de Fourier en amplitude avec l'ordre de l'harmonique en abscisse, et en ordonnée l'amplitude c_n , de l'harmonique. Les spectres des signaux créneau et triangulaire étudiés précédemment sont donnés sur la figure.

La décroissance de l'amplitude des bâtons est en $1/n$ pour le créneau, et en $1/n^2$ pour le triangle : du fait des discontinuités du créneau, il faut en pratique plus d'harmoniques pour reconstituer le signal.



Spectres d'un signal créneau et triangulaire.

I-3) Valeur efficace

En mathématiques on démontre l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = s_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2} = s_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Le membre tout à droite est une somme des carrés des valeurs efficaces des composantes harmoniques. On l'omet pour la composante continue, car la valeur efficace d'un signal constant de valeur s_0 est s_0 .

D'où :

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses composantes (harmoniques et continu)

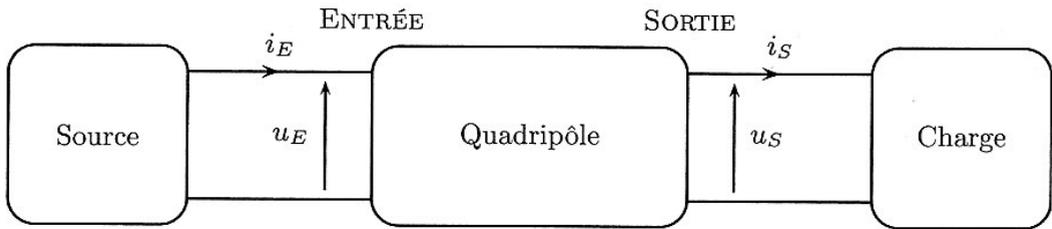
II – Quadripôle linéaire

II-1) Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

a) Quadripôle

Un quadripôle est un circuit électrique qui comporte quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux de sortie. Généralement, l'entrée est connectée à un générateur, ou à la sortie d'un autre quadripôle. Le circuit branché à la sortie du quadripôle s'appelle la charge (s'il n'y en a pas, la sortie est dite en circuit ouvert).

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement aux quadripôles linéaires, c'est-à-dire qui ne comportent que des dipôles linéaires, en régime sinusoïdal forcé.



Quadripôle et notations.

b) Fonction de transfert

On introduit les grandeurs suivantes, selon les notations de la figure :

- les tensions d'entrée u_e et de sortie u_s du quadripôle, ainsi que les courants d'entrée i_e et de sortie i_e . On remarquera les conventions d'orientation utilisées : l'entrée du quadripôle est en convention récepteur, et sa sortie en convention générateur. Ce choix, bien qu'arbitraire, comme toutes les orientations, est le plus fréquent.

Afin de formaliser l'étude des filtres (quadripôles qui effectuent une opération de filtrage), nous travaillerons avec un signal sinusoïdal de fréquence donnée, pour voir comment son amplitude et sa phase sont modifiées par le filtre (réponse fréquentielle du filtre linéaire). Une fois connu le comportement d'un signal de fréquence donnée, il est possible de reconstituer le comportement de n'importe quel signal grâce au principe de superposition et à la décomposition en série de Fourier. Travailler avec des signaux sinusoïdaux conduit naturellement à utiliser la représentation complexe.

Introduisons les tensions complexes :

$$\underline{u}_e = \underline{U}_e e^{j\omega t} = U_e e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

$$\text{et } \underline{u}_s = \underline{U}_s e^{j\omega t} = U_s e^{j(\omega t + \varphi_s)}$$

On appelle fonction de transfert (en tension) d'un quadripôle, en régime sinusoïdal forcé, la grandeur complexe définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$$

Elle est caractérisée par :

- son module, appelé gain $G(\omega) = H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$
- son argument, déphasage entre les tensions de sortie et d'entrée, $\varphi(\omega) = -\text{Arg}[\underline{H}(j\omega)]$

II-2) Impédances d'entrée et de sortie

Lorsqu'une source est branchée sur un quadripôle, elle débite un courant d'entrée i_e . Tous les composants du quadripôle étant linéaires, il est possible de modéliser l'ensemble du circuit situé après l'entrée du quadripôle, charge éventuelle comprise, par une impédance \underline{Z}_E , appelée impédance d'entrée, sur laquelle la source est branchée. Ainsi, vue depuis l'entrée, la source de tension u_E est connectée à une impédance \underline{Z}_E , dans laquelle elle débite un courant $i_E = \underline{u}_E / \underline{Z}_E$.

On appelle impédance d'entrée d'un quadripôle l'impédance vue de l'entrée, c'est-à-dire la grandeur complexe $i_E = \underline{u}_E / \underline{Z}_E$.

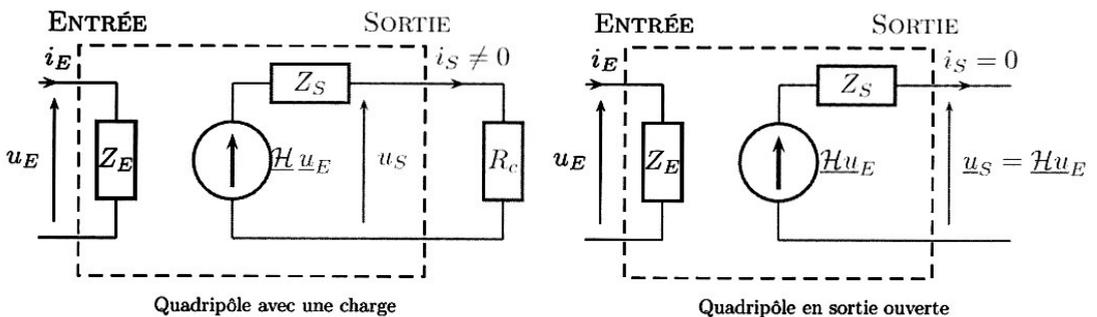
Elle est indépendante de la source, mais elle dépend de la constitution du quadripôle.

Appelons \underline{H} la fonction de transfert du quadripôle en sortie ouverte, telle que $\underline{u}_S = \underline{H} \underline{u}_E$: il y a donc une tension en sortie, en général non nulle, alors que le courant de sortie i_S est égal à zéro. La sortie se comporte donc comme un dipôle actif, puisqu'il existe une tension, même si aucun courant n'est débité. On peut alors la modéliser par une représentation de Thévenin, de fem complexe $\underline{H} \underline{u}_E$ et d'impédance interne \underline{Z}_S , appelée impédance de sortie du quadripôle (voir figure 8.5).

On notera que la fem dépend d'une autre tension, ici celle d'entrée : une telle source est une source commandée (ou liée).

La sortie d'un quadripôle se comporte, pour la charge, comme un dipôle actif, dont l'impédance interne du générateur de Thévenin équivalent est appelée impédance de sortie \underline{Z}_S .

D'après les deux définitions précédentes, il est possible d'adopter la représentation du quadripôle de la figure suivante. La source en sortie est une source commandée par la tension d'entrée.

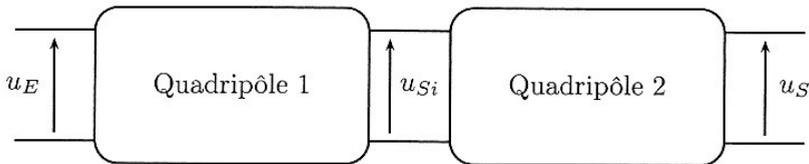


Entrée et sortie d'un quadripôle.

Il faut retenir les valeurs suivantes :

- Un générateur basse fréquence (GBF) possède une impédance de sortie de 50Ω ;
- Un oscilloscope possède une résistance d'entrée égale à $1M\Omega$.
- Un multimètre (utilisé en voltmètre) possède une résistance d'entrée de $10 M\Omega$.

II-3) Quadripôles en cascade



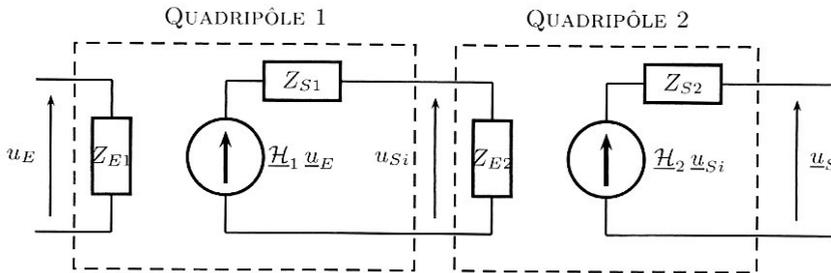
Quadripôles en cascade.

Considérons deux quadripôles en cascade, de fonctions de transfert en sortie ouverte respectives \underline{H}_1 et \underline{H}_2 . On notera \underline{Z}_{E1} et \underline{Z}_{S1} les impédances, en sortie ouverte, d'entrée et de sortie du premier quadripôle, et \underline{Z}_{E2} et \underline{Z}_{S2} celles du second. La fonction de transfert totale s'exprime par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_{si}} * \frac{\underline{U}_{si}}{\underline{U}_e} \neq \underline{H}_1 * \underline{H}_2$$

l'inégalité provenant du fait que le quadripôle 1 n'est pas en sortie ouverte. Le quadripôle 1 joue le rôle de source pour le quadripôle 2, ce dernier étant la charge du premier. Comme la fonction de transfert dépend de la charge, il est normal que le second quadripôle modifie la fonction de transfert du quadripôle 1.

Faisons intervenir les impédances de sortie et d'entrée des quadripôles.



Quadripôles en cascade, modélisation avec les impédances d'entrée et sortie.

Un diviseur de tension permet d'écrire :

$$u_{Si} = \mathcal{H}_1 u_E \frac{Z_{E2}}{Z_{E2} + Z_{S1}},$$

$$\mathcal{H} = \frac{u_S}{u_E} \frac{u_{Si}}{u_{Si}} = \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 \frac{Z_{E2}}{Z_{E2} + Z_{S1}}.$$

Il n'est possible d'avoir : $\underline{H} = \underline{H}_1 * \underline{H}_2$ que dans deux cas :

- Si $Z_{E2} \gg Z_{S1}$ ou si $Z_{S1} = 0$, c'est-à-dire qu'on retrouve une sortie ouverte pour la quadripôle 1.

De manière générale, la fonction de transfert équivalente pour des quadripôles qui se suivent (montés en cascade) n'est pas le produit des fonctions de transfert en sortie ouverte individuelles.

Afin de garantir le bon fonctionnement de ces quadripôles lorsqu'on les met en cascade, il faut réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et de forte impédance d'entrée.

II-4) Filtrés linéaires

a) Principe du filtrage

Nous avons vu que tout signal temporel peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux. Il arrive fréquemment que l'on souhaite supprimer ou seulement modifier l'importance d'une partie des fréquences présentes dans un signal.

Par exemple :

- Supprimer un grésillement (en général de haute fréquence) dans un enregistrement ;
- Supprimer des fréquences au-delà d'une certaine valeur dans un enregistrement audio : c'est le principe utilisé en compression audio MP3, où les hautes fréquences, peu audibles et qui ne contiennent pas d'information musicale essentielle, sont supprimées afin d'alléger la taille du fichier sonore ;
- Sélectionner une station de radio, ce qui nécessite de sélectionner une plage précise de fréquences autour de la fréquence d'émission de la station.

L'opération qui consiste à donner plus ou moins d'importance, à supprimer ou à amplifier certaines plages de fréquences dans un signal s'appelle filtrage.

Comme la fonction de transfert d'un quadripôle dépend de la fréquence, nous allons l'utiliser pour concevoir des filtres.

b) Bande Passante

Pour caractériser précisément les plages de fréquences du signal qui sont restituées ou atténuées, on introduit les notions de pulsation de coupure et de bande passante.

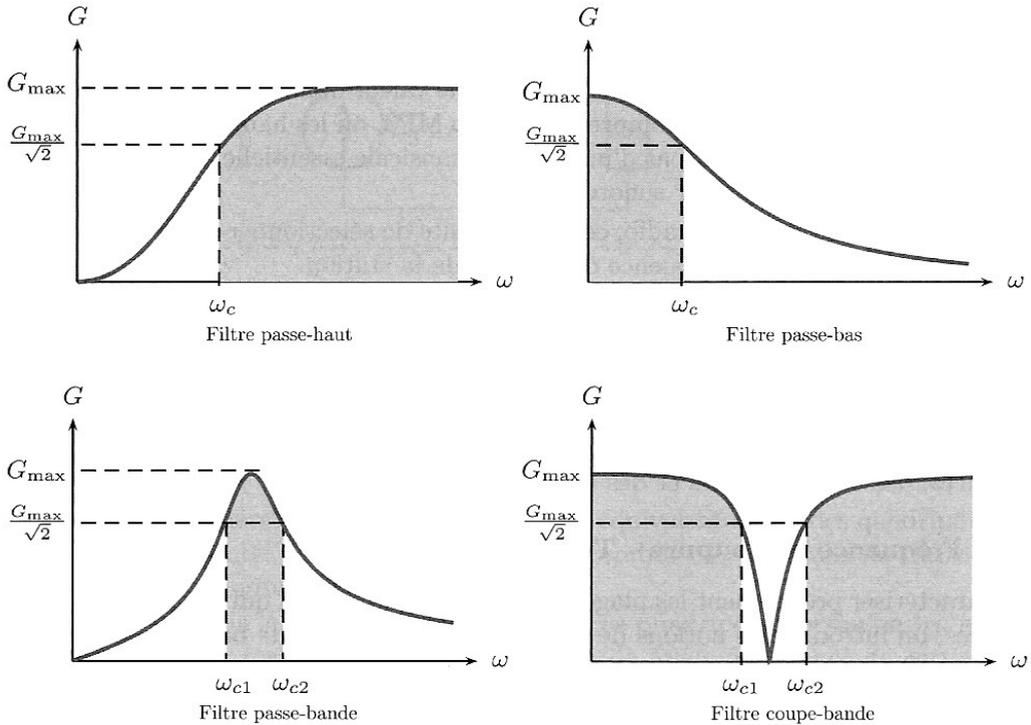
La ou les pulsations de coupure ω_c sont définies par $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ où G_{max} désigne la valeur maximale du gain G de la fonction de transfert.

La bande passante, de largeur $\Delta\omega$, est l'intervalle des pulsations tel que $G(\omega) > G(\omega_c)$. Un filtre coupe les pulsations (ou les fréquences) qui sont hors de la bande passante, et laisse passer celles qui s'y trouvent.

c) Type de filtres

Un filtre est dit idéal si le gain est constant (et non nul) dans la bande passante, et nul en dehors. Dans la pratique, le gain est une fonction continue, et ses variations sont donc progressives.

Il existe quatre types de filtres, caractérisés par la nature de leur bande passante :



Allure des gains pour les différents types de filtres. La bande passante est en gris.

- Filtre passe-bas : atténue ($G < 1$) les signaux de pulsation supérieure à une pulsation de coupure ω_c . La bande passante est donc $[0; \omega_c]$. Il est utilisé par exemple lors d'une démodulation, pour supprimer le souffle d'un enregistrement audio, etc.
- Filtre passe-haut : atténue les signaux de pulsation inférieure à une pulsation de coupure ω_c . La bande passante est donc $[\omega_c; +\infty[$. Il est utilisé par exemple pour supprimer un signal continu (mode AC de l'oscilloscope).
- Filtre passe-bande : ne laisse passer qu'une seule bande de pulsation comprise entre deux pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} .

ω_{c2} . La bande passante est donc $[\omega_{c1}; \omega_{c2}]$. Ce sont des filtres utilisés pour sélectionner une station de radio, une chaîne de télévision, etc.

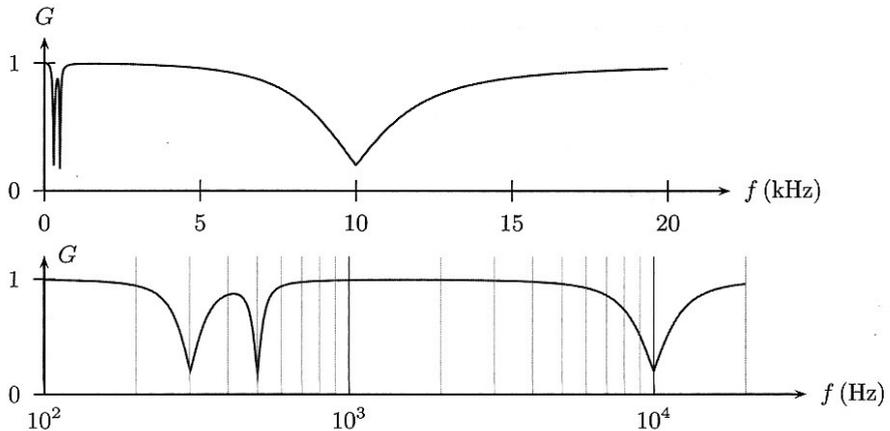
- Filtre coupe-bande (ou réjecteur de bande) : laisse passer tous les signaux, à l'exception d'une bande particulière de pulsation entre deux pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} . La bande passante est donc $[0; \omega_{c1}] \cup [\omega_{c2}; \infty[$. Ces filtres permettent de supprimer une plage de fréquences précise, et peuvent donc être utiles pour éliminer des fréquences parasites.

d) Gain en décibels

La plage de fréquences sur laquelle il est nécessaire de travailler est en général très large. Par exemple, pour un signal audio, il faut étudier les fréquences entre 20 Hz et 20 kHz. Il se pose donc un problème d'échelle lors de la représentation : comment travailler sur une gamme de fréquences si grande, tout en arrivant à distinguer ce qui se passe, par exemple, autour de 200 Hz et en même temps autour de 8 kHz ? Un moyen simple de résoudre cette difficulté consiste à utiliser une échelle logarithmique pour la fréquence.

La figure suivante montre l'intérêt de l'échelle logarithmique. Elle représente, pour une gamme de fréquences identique, une même courbe de gain selon deux échelles. Les deux minima à 300 et 500 Hz sont difficilement mesurables en échelle linéaire, à moins de restreindre l'intervalle d'étude autour de ces valeurs, alors qu'en échelle logarithmique ils sont facilement repérables. L'échelle logarithmique permet de

bien distinguer les trois minima, pourtant séparés de presque 10 kHz.



Comparaison d'une même courbe de gain en échelles linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

En échelle logarithmique, on appelle :

- Octave, un intervalle de fréquences compris entre une fréquence et le double de cette fréquence (notion plutôt utilisée en acoustique) ;
- Décade, un intervalle de fréquences correspondant à un rapport de 10 entre les fréquences extrêmes.

De la même manière, il est plus commode de travailler sur le logarithme (décimal) du gain que sur le gain lui-même.

Le bel est l'unité de mesure logarithmique X_B du rapport X de deux puissances :

$$X_B = \log \frac{P_2}{P_1}$$

Le nom de cette unité est un hommage au Britannique Alexander Graham Bell (1847-1922), l'inventeur du téléphone. Un bel correspondant à un facteur 10 entre les deux puissances, facteur trop important pour en faire une unité pratique, l'unité usuelle est le décibel, soit un dixième de bel :

$$X_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_2}{P_1}.$$

Le gain dont on dispose, via la fonction de transfert, est le rapport de deux tensions et non de deux puissances. Afin d'être cohérent, il faut comparer les puissances qui seraient fournies par ces deux tensions u_1 et u_2 à une résistance R .

$$\text{Ainsi, } X_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{U_2^2/R}{U_1^2/R} = 20 \log \frac{U_2}{U_1}$$

Le gain en décibels est défini par :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = 20 \log \left| \underline{H(j\omega)} \right| = 20 \log G(\omega)$$

C'est un nombre sans dimension qui s'exprime en décibel (symbole dB). Augmenter G_{dB} de 20 dB revient à multiplier le gain par 10, et le diminuer de 20 dB revient à diviser le gain par 10.

e) Diagramme de Bode

On appelle diagramme de Bode d'un filtre l'ensemble des deux courbes représentatives suivantes, tracées en fonction de ω en échelle logarithmique:

- **Le gain en décibels de la fonction de transfert G_{dB}**
- **L'argument de la fonction de transfert $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e = \underline{\text{Arg}(H(j\omega))}$**

Cette représentation graphique permet de résumer l'action d'un filtre sur les différentes fréquences.

Comme il est fréquent de travailler avec le gain en décibels, il est d'usage de définir aussi en décibels la fréquence de coupure. Puisque

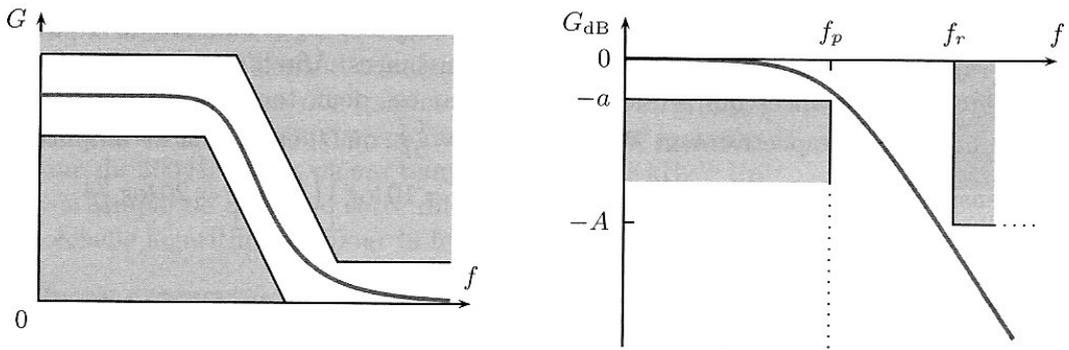
$$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -10 \log(2) = -3,0 \text{ dB}$$

On définit la fréquence (pulsation) de coupure à -3 dB par :

$$\mathbf{G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3}$$

f) Notion de gabarit

La réalisation d'un filtre est contrainte par un cahier des charges. On peut par exemple contraindre le gain entre deux courbes limites (voir figure, à gauche, qui illustre le gabarit d'un filtre passe-bas en échelle linéaire pour le gain) ou simplement spécifier une bande de fréquence que l'on souhaite transmettre (avec une atténuation maximale dans la bande passante de a dB) ainsi qu'une bande rejetée (avec une atténuation minimale A dB dans cette bande). Ce dernier cas est illustré à droite sur la figure, en échelle logarithmique, dans le cas d'un passe-bas pour lequel on a spécifié une bande passante $[0; f_p]$, avec une tolérance de a dB sur l'atténuation et une bande rejetée $[f_r; +\infty]$ où l'atténuation doit être supérieure à A dB.



Gabarits de filtres passe-bas.

Caractère moyennneur, intégrateur ou dérivateur

II-5) Comportement asymptotique d'un filtre

Les filtres que nous étudierons seront constitués d'un certain nombre de résistances, condensateurs et bobines. La fonction de transfert sera donc le rapport de deux polynômes de la variable $j\omega$.

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_p(j\omega)^p}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_p(j\omega)^q}$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow +\infty$, le terme dominant de la fonction de transfert sera de la forme $a(j\omega)^n$, où n est un entier relatif et a un facteur sans intérêt ici. Asymptotiquement, dans un diagramme de Bode (échelle logarithmique en abscisse) :

- Le gain en dB sera égal à $20\log(a) + 20n\log(\omega)$; il s'agit d'une droite de pente $20n$, que l'on exprimera en décibel par décade.
- La phase sera égale à $\arg a + \arg[(j\omega)^n] = \arg a + n\pi/2$, ce qui se représente par une asymptote horizontale.

II-6) Caractère dérivateur d'un filtre

Une opération de dérivation correspond à multiplier par $j\omega$; la fonction de transfert d'un dérivateur varie donc linéairement en fonction de ω (cas $n = 1$ dans le paragraphe précédent, ici non pas de manière asymptotique mais sur toute la gamme de fréquences en théorie).

Le diagramme de Bode d'un dérivateur est donc une droite de pente 20 dB/décade pour le gain en décibel et un déphasage constant $\pi/2$ quelle que soit la fréquence. Tout filtre possédant dans une certaine gamme de fréquences un comportement de ce type présentera un caractère dérivateur dans la gamme concernée.

Dérivateur :

- Pente : 20 dB/décade
- Phase : $+\pi/2$

II-7) Caractère intégrateur d'un filtre

Inversement, intégrer correspond à une division par $j\omega$, soit $n = -1$ dans le premier paragraphe. Tout filtre dont le diagramme de Bode en gain présente, dans une certaine gamme de fréquences, une pente de -20 dB/décade tout en assurant un déphasage constant à $-\pi/2$ se comporte comme un intégrateur pour la gamme de fréquences concernée.

Intégrateur :

- Pente : -20 dB/décade
- Phase : $-\pi/2$

II-8) Comportement moyennneur

D'après la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique, moyennner revient à extraire la composante continue du signal. Pour cela, il faut éliminer les harmoniques du signal ; leur pulsation est multiple de celle du fondamental, soit $\omega_0 = 2\pi / T$, où T est la période du signal. En conséquence, tout filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est nettement inférieure à la fréquence du signal d'entrée se comporte comme un moyennneur.

Moyennneur : Passe bas tel que $\omega_c < \omega_0$

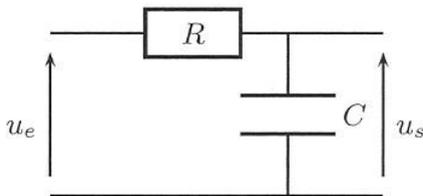
III - Filtres linéaires passifs d'ordres un et deux

Dans cette section III, nous allons illustrer les résultats précédents à l'aide de filtres linéaires passifs d'ordres un et deux. Les premiers seront traités avec des circuits RC, et les seconds avec des circuits RLC . Bien entendu, il en existe de nombreux autres, dont certains sont donnés en exercices. Ce sera néanmoins l'occasion de mettre en place la méthode d'étude d'un filtre, et de définir une fonction de transfert canonique pour chaque filtre, c'est-à-dire sa forme mathématique, indépendamment des composants qui constituent le filtre. Dans toute cette section, les quadripôles sont supposés en sortie ouverte.

III-1) Filtre passe-bas d'ordre 1

a) Etude qualitative

Considérons le circuit représenté à la figure suivante. Avant éventuellement de calculer la fonction de transfert, il est nécessaire d'effectuer une analyse qualitative du filtre pour connaître son type.



- À basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc $u_s = u_e$ (aucun courant ne circule dans R puisque la sortie est ouverte).
- À haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), il est équivalent à un fil, donc $u_s = 0$ puisque le potentiel reste constant le long d'un fil.

Le filtre laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences : il s'agit bien d'un filtre passe-bas.

b) Fonction de transfert

Un diviseur de tension permet d'obtenir :

$$\underline{H} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jRC\omega + 1}$$

Le dénominateur est de degré un en $j\omega$, ce filtre est d'ordre un.

Il est commode d'introduire la pulsation caractéristique de ce filtre, $\omega_0 = 1/RC$, et la variable sans dimension $x = \omega/\omega_0$ appelée pulsation réduite. La fonction de transfert se met alors sous forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}$$

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$$

avec H_0 le gain statique ($x = 0$, régime continu), qui n'est pas toujours égal à un comme avec le filtre étudié, et x la pulsation réduite.

On en déduit le gain et la phase pour le filtre étudié :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ et } \varphi(x) = -\text{Arg}(1 + jx) = -\text{Arctan}(x)$$

c) Comportement pseudo-intégrateur

Calculons la pulsation ω_c de coupure à -3 dB. Par définition, nous avons vu que $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui conduit immédiatement à $x=1$ d'où $\omega_c = \omega_0$.

Dans le régime haute fréquence, $x \gg 1$, ainsi $\underline{H} = \frac{1}{1 + jx} \approx \frac{1}{jx}$

On a donc dans ce domaine de fréquences $\underline{U}_s = \frac{1}{jx} \underline{U}_e$ qui est la représentation complexe de $u_s(t) = \frac{1}{RC} \int u_e(t) dt$

Si $\omega \gg \omega_0$, la tension de sortie est à un facteur près une primitive de la fonction d'entrée. On parle de montage pseudo-intégrateur.

d) Diagramme de Bode

Le gain en décibels se déduit facilement du gain :

$$G_{dB} = 20 \log G(x) = -10 \log(1 + x^2).$$

Etudions le comportement asymptotique à l'aide d'un tableau :

x	0	1	∞
\underline{H}	1	$1/(1 + j)$	$1/jx$
$G=H$	1	$1/\sqrt{2}$	$1/x$
G_{dB}	0	-3	$-20 \log(x)$
φ	0	$-\pi/4$	$-\pi/2$

Par conséquent :

- Si $x \ll 1$ (basses fréquences), la droite d'équation $G_{dB} = 0$ est asymptote à basses fréquences.
- Si $x \gg 1$ (hautes fréquences), la droite d'équation $G_{dB} = -20 \log x$ est asymptote à hautes fréquences : c'est une droite qui passe par l'origine ($x = 1$) dans ce mode de représentation, et est de pente -20dB/décade.

- Si $x = 1$ (donc $\log(x) = 0$), alors $G_{dB} = -3$ dB, c'est la pulsation réduite de coupure.

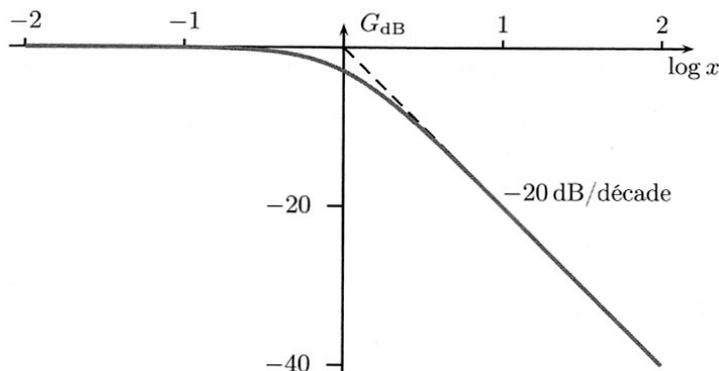
Le tracé des asymptotes donne le diagramme de Bode asymptotique (on prendra l'habitude d'indiquer les pentes nulles des asymptotes). Ensuite, en plaçant la pulsation de coupure, le tracé de la courbe de gain se fait facilement.

On admet généralement le fait que pour $x > 10$ et $x < 0,1$, le diagramme réel est confondu avec le diagramme asymptotique (règle connue sous le nom de la règle du dixième). Il est facile de le vérifier sur des applications numériques.

Exemple : pour $x = 0,1$, le gain en décibels vaut

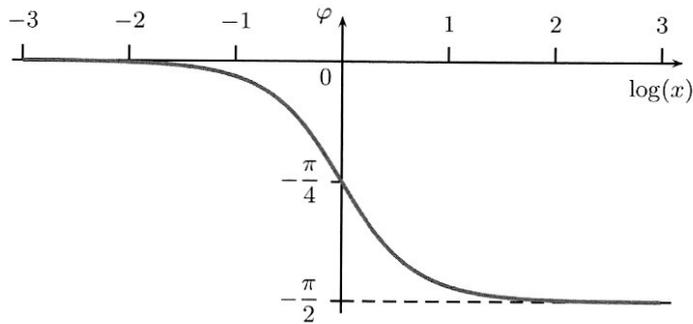
$$G_{dB}(x = 0,1) = -10 \log(1 + 10^{-2}) = -0,04 \text{ dB}$$

La courbe réelle est donc très proche de l'asymptote $G_{dB} = 0$. De la même manière, en $x = 10$, on obtient $G_{dB}(x = 10) = -20,04$ dB, ce qui est très proche des -20 dB de l'asymptote de pente -20 dB/décade.



Gain en décibels d'un filtre passe-bas du premier ordre.

Pour la phase à l'aide du diagramme asymptotique on obtient :

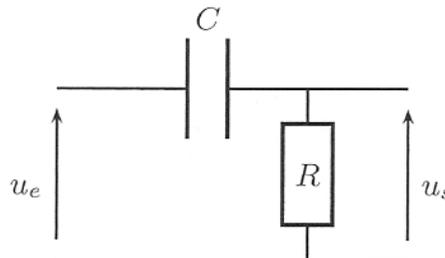


Phase d'un filtre passe-bas du premier ordre.

III-2) Filtre passe-haut d'ordre un

a) Étude qualitative

Considérons le circuit représenté à la figure :



- À basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc $u_s = 0$.
 - À hautes fréquences, il est équivalent à un fil, donc $u_s = u_e$.
- Le filtre est donc un passe-haut.

b) Fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient par un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}$$

Le dénominateur et le numérateur sont de degré un en $j\omega$, ce filtre est d'ordre un.

Il est commode d'introduire la pulsation caractéristique de ce filtre, $\omega_0 = 1/RC$, et la variable sans dimension $x = \omega/\omega_0$ appelée pulsation réduite. La fonction de transfert se met alors sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}}$$

Méthode : Il est souvent préférable de faire apparaître une constante au numérateur de la fonction de transfert. Cela simplifie considérablement son étude. On prendra donc l'habitude de le faire dès que possible.

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est : $\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1+jx}$ avec H_0 le gain en haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), qui n'est pas toujours égal à un comme avec le filtre étudié ici, et x la pulsation réduite.

On en déduit le gain pour le filtre étudié

$$- G(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$- \varphi(x) = -\arg\left(1 + \frac{1}{jx}\right) = -\text{Arctan}\left(-\frac{1}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

c) Comportement pseudo-dérivateur

En reprenant le même type d'analyse que pour le filtre passe-bas, la pulsation ω_c de coupure à -3 dB, est : $\omega_c = \omega_0$.

À basses fréquences ($\omega \ll \omega_c$), on a : $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} \approx jx$ donc dans ce domaine de fréquences $\underline{U}_s = jx \underline{U}_e$ qui est la représentation complexe de $u_s(t) = RC \frac{du_e(t)}{dt}$.

Le circuit se comporte comme un pseudo-dérivateur.

d) Diagramme de Bode

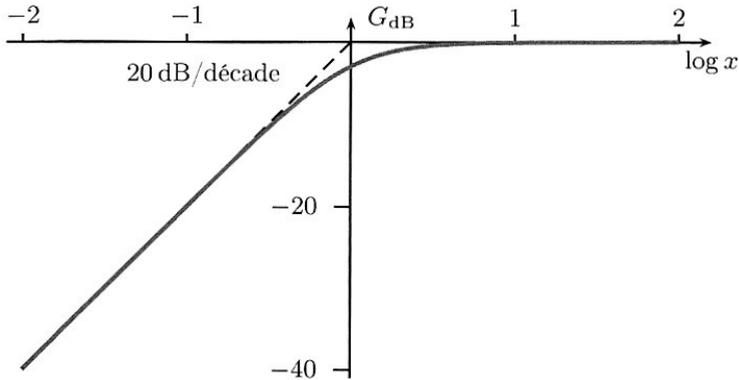
Le gain en décibels se déduit facilement du gain :

$$G_{dB} = 20 \log G(x) = -10 \log(1 + 1/x^2).$$

Etudions le comportement asymptotique à l'aide d'un tableau :

x	0	1	∞
\underline{H}	jx	$\frac{j}{1+j} = \frac{j-j^2}{2} = \frac{1+j}{2}$	1
$G=H$	x	$1/\sqrt{2}$	1
G_{dB}	$20\log(x)$	-3	0
φ	$\pi/2$	$\pi/4$	0

D'où le diagramme de Bode :



Gain en décibels d'un filtre passe-haut du premier ordre.

Les représentations du gain en décibels du filtre passe-haut et du filtre passe-bas sont donc symétriques par rapport à l'axe $\log(x) = 0$.

Pour ce qui concerne la phase φ , elle est identique à celle du passe-bas translatée en ordonnée de $+\pi/2$, car la fonction de transfert du filtre passe-haut est celle du passe-bas multipliée par jx , dont l'argument est $\pi/2$.

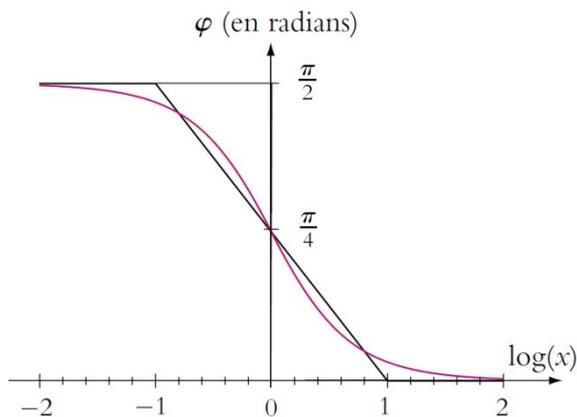
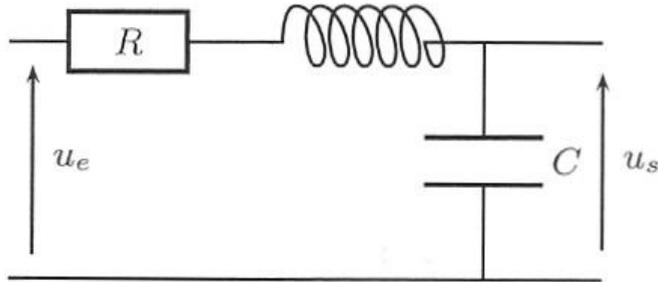


Diagramme de Bode en phase
d'un filtre passe-haut du premier ordre.

III-3) Filtre passe-bas d'ordre deux

a) Étude qualitative

Considérons le quadripôle représenté à la figure et commençons par étudier le comportement de ce filtre dans les cas limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.



À basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, et la bobine à un fil. Comme la sortie est ouverte, il n'y a pas de courant de sortie, donc aucun courant ne circule dans la résistance, et la tension à ses bornes est nulle. Par conséquent, $u_s(t) = u_e(t)$. Ce filtre laisse passer les basses fréquences.

À hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil, et la bobine à un circuit ouvert. La tension de sortie est prise aux bornes d'un fil, donc $u_s(t) = 0$. Ce filtre coupe les hautes fréquences.

Le filtre étudié est donc un filtre passe-bas.

b) Fonction de transfert

La fonction de transfert du filtre s'obtient par un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Le dénominateur est un polynôme de degré deux $j\omega$, ce filtre est d'ordre deux.

En introduisant la pulsation caractéristique de ce filtre, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la variable sans dimension $x = \omega/\omega_0$ appelée pulsation réduite et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$. La fonction de transfert se met alors sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1 + jRC\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \end{aligned}$$

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est avec H_0 le gain statique.

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

Le gain a pour expression : $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

La phase a pour expression : $\varphi(x) = -\text{Arg}\left(1 + j\frac{x}{Q} - x^2\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{x/Q}{1-x^2}\right)$

c) Étude du gain en décibels

Le gain en décibels se déduit facilement du gain :

$$G_{dB} = 20 \log G(x) = -10 \log\left((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right).$$

Etudions le comportement asymptotique à l'aide d'un tableau :

x	0	1	∞
\underline{H}	1	$\frac{Q}{j} = -jQ$	$-\frac{1}{x^2}$
G=H	1	Q	$\frac{1}{x^2}$
G _{dB}	0	20log(Q)	-40log(x)
φ	0	$-\pi/2$	$-\pi$

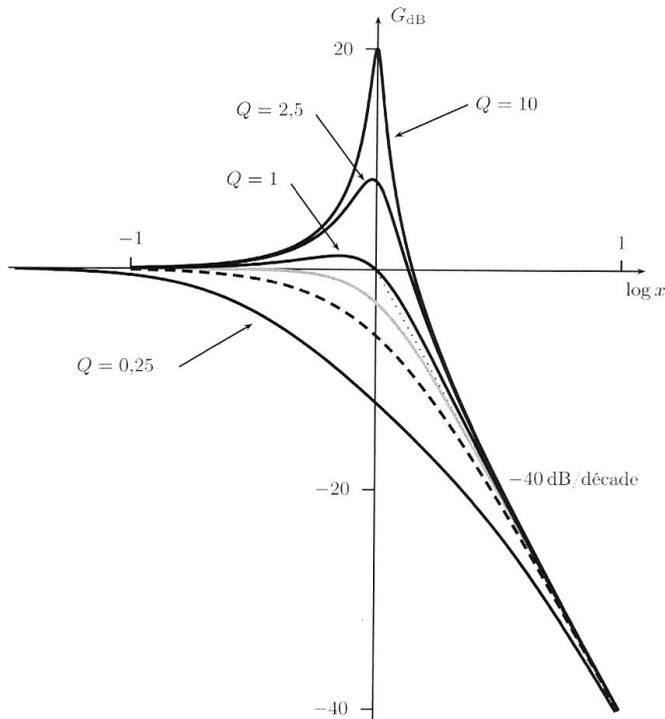
On rappelle que l'étude de ce filtre correspond à la résonance en tension aux bornes de C et qu'il y a résonance en x_r :

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Comme en $x = 1$ le gain est égal à Q (le maximum étant en x_r), dans ce cas l'amplitude peut prendre de très grandes valeurs.

La droite d'équation $G_{dB} = -40 \log(x)$, de pente -40 dB/décade, est asymptote à hautes fréquences. Cette pente (sa valeur absolue) est caractéristique des filtres du second ordre. Cela signifie qu'à chaque décade (multiplication de la fréquence par dix), l'amplitude du signal de sortie est divisée par cent : **la coupure des hautes fréquences est beaucoup plus efficace qu'avec un filtre du premier ordre** (-20 dB/décade, donc seulement division par dix à chaque décade).

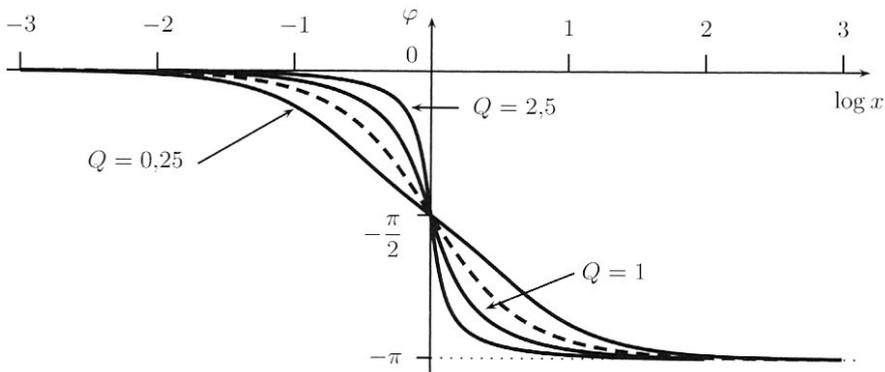
Le tracé du diagramme asymptotique ne pose pas de problème, néanmoins il faut faire attention pour le diagramme réel du fait de la résonance. La courbe en gris, correspondant à $Q = 1/\sqrt{2}$, elle distingue la limite entre les courbes qui vont subir une résonance des autres. (en pointillés $Q=1/2$)



Gain en décibels d'un filtre passe-bas du second ordre.

d) Étude de la phase

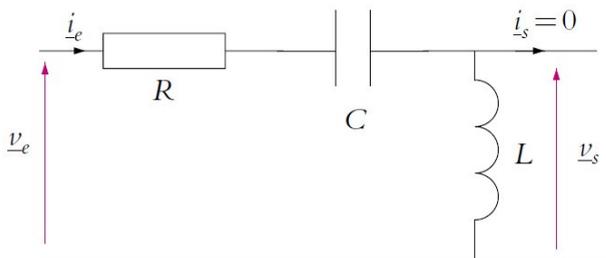
On notera que l'on retrouve ici le fait qu'à une asymptote de pente 20 ndB/décade de la courbe de gain correspond une asymptote horizontale de valeur $n\pi/2$ de la courbe de phase.



Phase d'un filtre passe-bas du second ordre.

e) Filtre passe-haut d'ordre 2

Le filtre passe haut d'ordre 2 a comme schéma électrique :



Exemple de filtre passe-haut du second ordre.

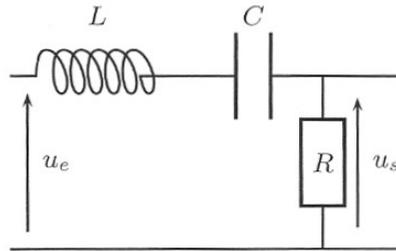
Et pour fonction de transfert :
$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = (jx)^2 \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

L'étude du filtre passe-haut d'ordre deux se déduit simplement de celle du filtre passe-bas, en ajoutant à la phase π et en effectuant une symétrie par rapport à l'axe vertical $\log(x) = 1$ sur la figure précédente.

III-4) Filtre passe-bande

a) Étude qualitative

Étudions les comportements limites du quadripôle représenté à la figure :



- A basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil, par conséquent $u_s(t) = 0$;
- A hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un circuit ouvert, donc $u_s(t) = 0$.

Ce filtre coupe basses et hautes fréquences, c'est un passe-bande.

b) Fonction de transfert

La fonction de transfert du filtre s'obtient par un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

D'où la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = \frac{1}{1 + \frac{Q}{jx} + jxQ} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} = H_0 \frac{j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$$

avec H_0 le gain maximum (en $x = 1$). La première forme est plus pratique pour l'étude mathématique ; la seconde correspond à la vraie forme canonique, dans laquelle le dénominateur est égal à $1 + j \frac{x}{Q} - x^2$, pour tous les filtres du second ordre.

Le gain du filtre s'écrit : $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$

La phase s'écrit :

$$\varphi(x) = -\text{Arg} \left(1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = -\text{Arctan} \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

Comme l'argument du numérateur de la fonction de transfert vaut $\pi/2$, et que le dénominateur est identique à celui du passe-bas d'ordre 2, la phase s'obtient en décalant de $\pi/2$ l'ordonnée de celle du filtre passe-bas d'ordre 2.

c) Diagramme de Bode

La fonction de transfert du filtre passe-bande est formellement identique à l'amplitude complexe de l'intensité dans un circuit RLC série. Il existe donc toujours un maximum en ω_0 .

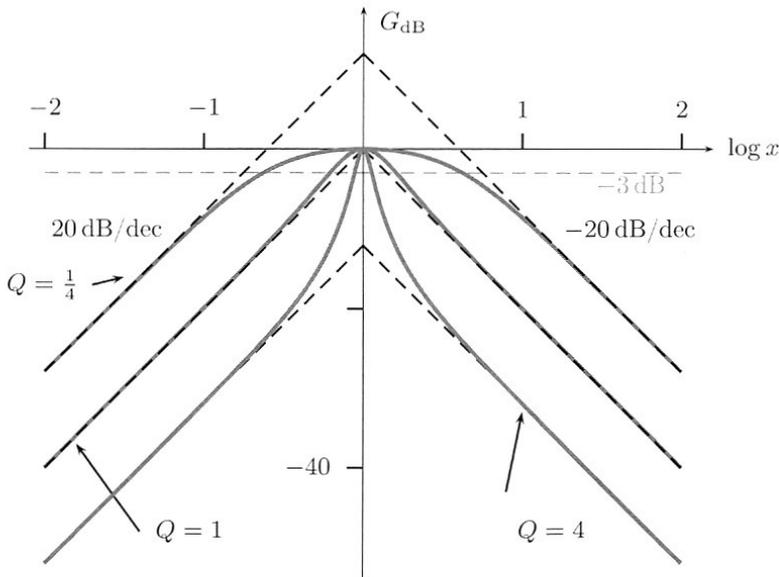
Etudions le comportement asymptotique à l'aide d'un tableau :

x	0	1	∞
\underline{H}	$j \frac{x}{Q}$	1	$\frac{j}{-Qx} = -\frac{j}{Qx}$
G=H	$\frac{x}{Q}$	1	$\frac{1}{Qx}$
G_{dB}	$20 \log(x) - 20 \log(Q)$	0	$-20 \log(x) - 20 \log(Q)$
φ	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Les asymptotes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées d'équation $\log(x)=0$. Le maximum du gain a lieu à la résonance en $x=1$ où $G_{dB}=0$, pour toute valeur de Q : le maximum est indépendant du facteur de qualité.

Les deux asymptotes précédentes se coupent lorsque $-20 \log Q + 20 \log x = -20 \log Q - 20 \log x$, donc pour $x = 1$. Elles se croisent au point d'ordonnée $-20 \log Q$, positive si $Q < 1$ et négative si $Q > 1$, donc :

- si $Q < 1$, le gain G_{dB} maximum est situé sous le point de croisement des asymptotes, la courbe réelle est donc sous les asymptotes : la résonance est floue, et le filtre peu sélectif.
- si $Q > 1$, le gain G_{dB} maximum est situé au-dessus du point de croisement des asymptotes, la courbe réelle est donc également au-dessus des asymptotes : la résonance est aiguë, et le filtre sélectif.



Gain en décibels d'un filtre passe-bande du second ordre.

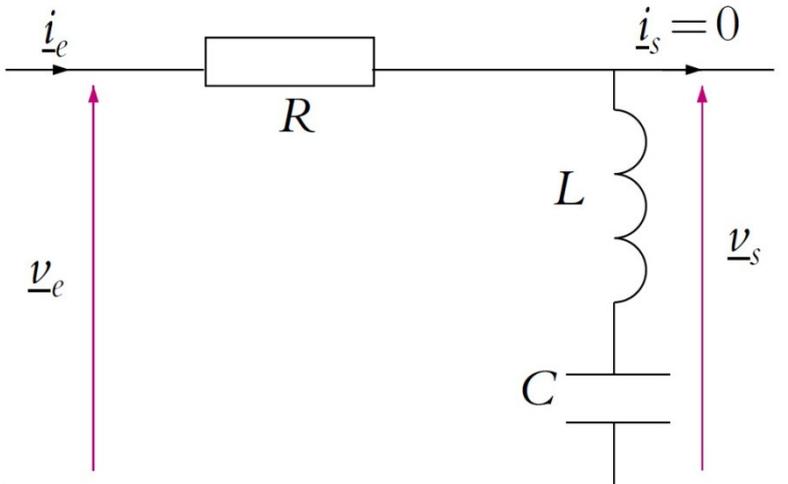
La largeur de la courbe de résonance est la bande de pulsations pour lesquelles l'amplitude est supérieure ou égale à l'amplitude maximale divisée par racine de deux. Elle est telle que : $\Delta x = 1/Q$

Plus Q est grand, donc plus l'amortissement est faible, plus la résonance est aiguë.

La définition de la largeur de la courbe de résonance correspond exactement à celle de la bande passante à -3 dB. Donc plus le facteur de qualité sera important, plus le filtre sera sélectif. De plus, nous avons vu que les pulsations réduites de coupure vérifient $x_1 x_2 = 1$; elles sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, car $\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2 = 0$, donc $\log x_1 = -\log x_2$. La courbe du gain en décibels est représentée sur la figure, ainsi que la coupure à -3 dB, ce qui permet de vérifier les propriétés énoncées précédemment.

d) Coupe-bande d'ordre 2

Le montage du coupe bande et le suivant :



Dont la fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = \underline{H}_{PasseBas} + \underline{H}_{PasseHaut}$$

IV - Filtrage d'un signal périodique

IV-1) Principe

On note $e(t)$ le signal, supposé T -périodique, envoyé en entrée d'un filtre linéaire. Le théorème de Fourier (voir théorème 8.4 page 198) permet d'écrire e sous la forme d'une série de Fourier :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

Le filtre étudié étant linéaire, il est possible d'appliquer le principe de superposition. Chaque harmonique du signal d'entrée e est traité

séparément par le filtre. Il suffit donc d'évaluer séparément la réponse du filtre à chaque harmonique, puis d'en faire la somme, pour obtenir le signal de sortie.

L'harmonique en de rang n du signal d'entrée e s'écrit

$$e_n(t) = E_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

Il a pour amplitude E_n , pour phase à l'origine des temps ϕ_n et sa pulsation est $n\omega$.

Le filtre linéaire est caractérisé par sa fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ où $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont respectivement le gain et la phase pour la pulsation ω .

L'effet du filtre sur l'harmonique en de rang n (qui pulse à $n\omega$) est de multiplier son amplitude E_n par $G(n\omega)$ et d'ajouter $\varphi(n\omega)$ à sa phase. En sortie de filtre, cet harmonique est donc devenu :

$$s_n(t) = G(n\omega)E_n \cos(n\omega t + \phi_n + \varphi(n\omega))$$

C'est un signal :

- d'amplitude $S_n = G(n\omega)E_n$,
- de phase à l'origine des temps $\phi_n + \varphi(n\omega)$
- et de pulsation $n\omega$.

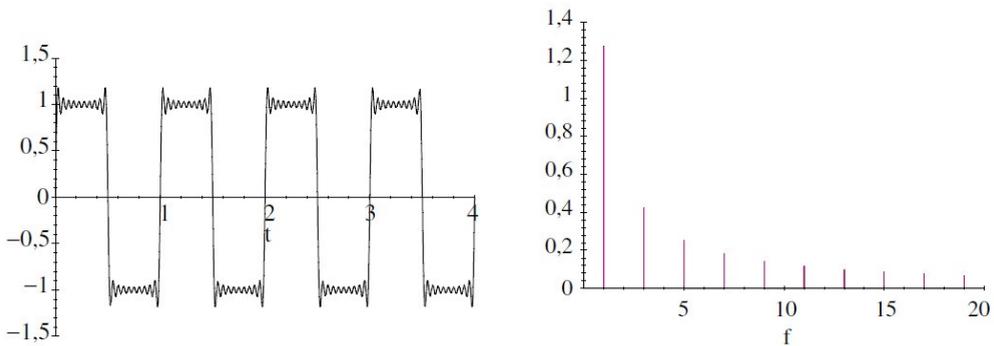
Par linéarité du filtre (principe de superposition), le signal s de sortie est la somme de tous les signaux s_n de sortie, soit :

$$s(t) = G(0)E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega)E_n \cos(n\omega t + \phi_n + \varphi(n\omega))$$

IV-2) Filtrage d'un créneau

a) Signal proposé

On fait la même analyse avec un créneau de fréquence f_0 représenté par les 20 premières harmoniques de son développement en séries de Fourier. Le signal d'entrée représenté sur la figure ci-dessous n'est pas un créneau idéal : il manque les harmoniques d'ordre élevé. On ne synthétise de même le signal de sortie qu'à partir des 20 premières harmoniques. De cette manière, on s'affranchit des écarts de reconstruction liés aux sommations partielles pour n'observer que l'influence du filtrage sur les signaux.

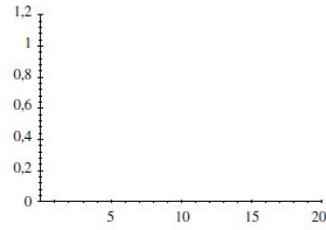
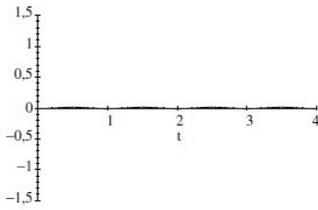


Créneau représenté par la somme partielle d'ordre 20 de son développement en séries de Fourier et son spectre.

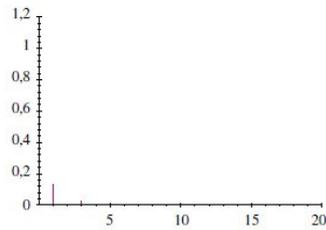
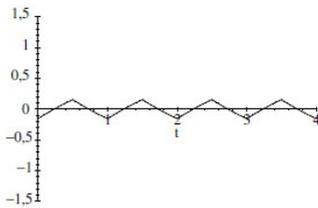
b) Filtrage par un passe-bas d'ordre 1

On utilise des filtres passe-bas du premier ordre dont les fréquences de coupure sont : $0, 0,1f_0$; $0, 1f_0$; f_0 ; $10f_0$ et $100f_0$. Les allures obtenues sont les suivantes :

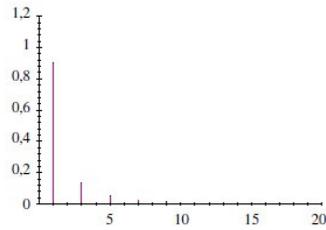
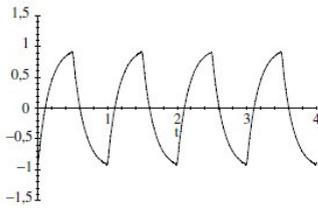
$$f_c = 0,01f_0$$



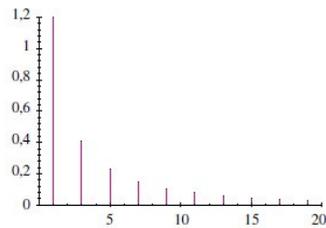
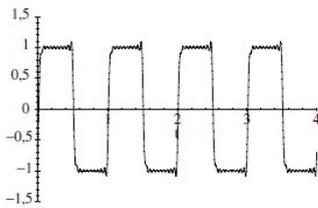
$$f_c = 0,1f_0$$



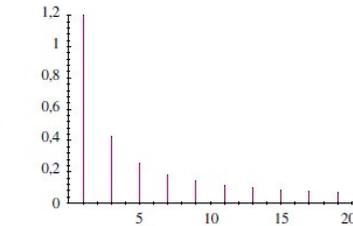
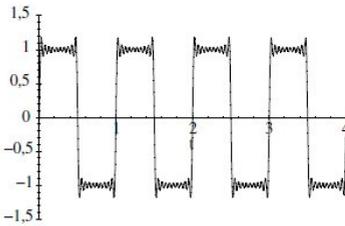
$$f_c = f_0$$



$$f_c = 10f_0$$



$$f_c = 100f_0$$



Filtrage d'un créneau de fréquence f_0 représenté par la somme partielle d'ordre 20 de son développement en séries de Fourier par un filtre passe-bas pour différentes fréquences de coupure f_c .

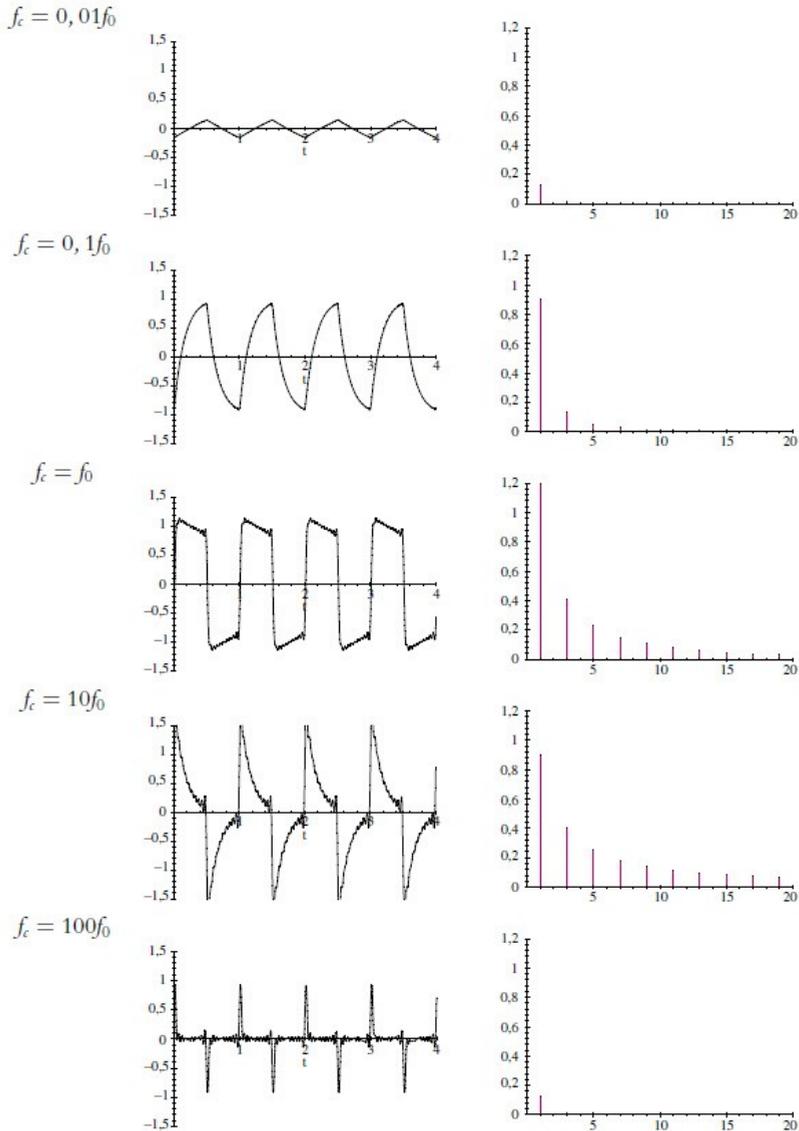
- Lorsque la fréquence de coupure est inférieure à la fréquence f_0 du créneau (cas $f_c = 0, 01f_0$), le signal est inexistant ou presque.
- Lorsque la fréquence de coupure se rapproche de f_0 (cas $f_c = 0, 1f_0$), on ne laisse passer que f_0 et ses tout premiers multiples : on obtient donc un signal triangulaire qui correspond à l'amorçage d'une sinusoïde. Le basculement du créneau entraîne une rupture qui se traduit par un point anguleux.
- Quand $f_c = f_0$, on a le même phénomène avec une amplitude plus forte : le « poids » du fondamental et des harmoniques augmente.
- Enfin, lorsque la fréquence de coupure est suffisamment grande ($f_c = 10f_0$ ou $f_c = 100f_0$), les fréquences que laisse passer le filtre permettent la reconstruction complète et sans déformation du créneau. Les amplitudes du fondamental et des harmoniques sont sensiblement les mêmes que celles du signal initial.

La sélection des composantes n'est pas très bonne du fait qu'on a un filtre du premier ordre : on a une pente à -20 dB par décade donc une diminution modérée des amplitudes. Avec un filtre d'ordre supérieur, ce serait meilleur.

c) Filtrage par un passe-bande

On utilise des filtres passe-bande du second ordre dont les fréquences de résonance sont $0, 01f_0$; $0, 1f_0$; f_0 ; $10f_0$ et $100f_0$.

Suivant la valeur du facteur de qualité Q , on n'obtient pas les mêmes comportements. Ainsi, pour un facteur de qualité $Q = 0, 1$, les allures obtenues sont les suivantes :



Filtrage d'un créneau de fréquence f_0 représenté par la somme partielle d'ordre 20 de son développement en séries de Fourier par un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 0, 1$ pour différentes fréquences de résonance f_c .

On est dans le cas d'un facteur de qualité médiocre : il ne sélectionne pas très précisément une fréquence.

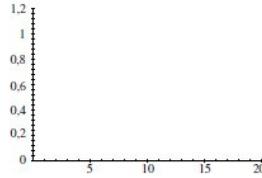
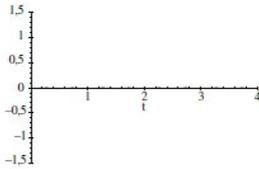
- Ainsi, lorsque la fréquence de résonance est très inférieure à la fréquence f_0 du créneau ($f_c = 0, 01f_0$), le signal est inexistant ou presque car toutes les composantes sont diminuées par rapport au signal initial.
- Lorsque la fréquence de résonance augmente et se rapproche de f_0 ($f_c = 0, 1f_0$), on commence à laisser passer le fondamental et plus faiblement les harmoniques : on observe un triangle de faible amplitude comme avec un filtre passe-bas.
- Quand la fréquence de résonance est proche de f_0 ($f_c = f_0$), le facteur de qualité est tel qu'il laisse passer le fondamental et quelques harmoniques : on obtient quasiment un créneau.
- Puis quand on continue d'augmenter la fréquence de résonance ($f_c = 10f_0$ puis $f_c = 100f_0$), le fondamental sort de la bande passante puis les autres harmoniques également, on retrouve des allures analogues à celles d'un filtre passe-haut.

Si on considère maintenant un facteur de qualité meilleur $Q = 10$, on a les résultats suivants :

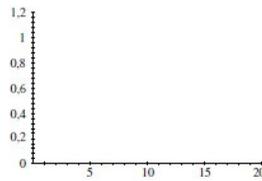
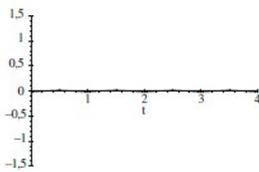
- Le signal est inexistant lorsque la fréquence de résonance est différente de f_0 . Lorsqu'elle devient égale à f_0 , on n'a que le fondamental : les harmoniques sont en dehors de la bande passante et sont par conséquent coupées ; on observe alors une simple sinusoïde.
- On notera que pour une fréquence de résonance valant dix fois la fréquence du créneau, on observe de faibles oscillations

: des harmoniques ont une amplitude relativement significative pour donner lieu à ce comportement.

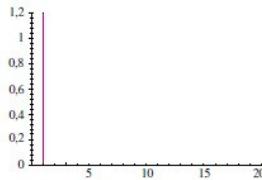
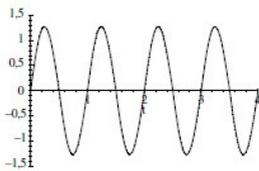
$$f_c = 0,01f_0$$



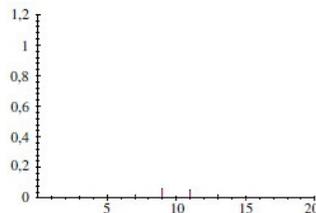
$$f_c = 0,1f_0$$



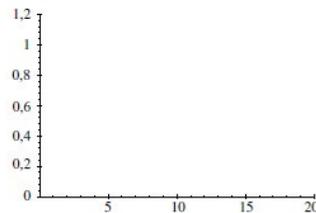
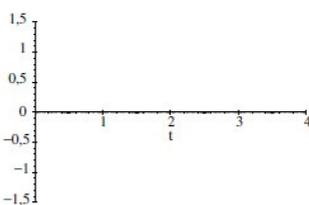
$$f_c = f_0$$



$$f_c = 10f_0$$



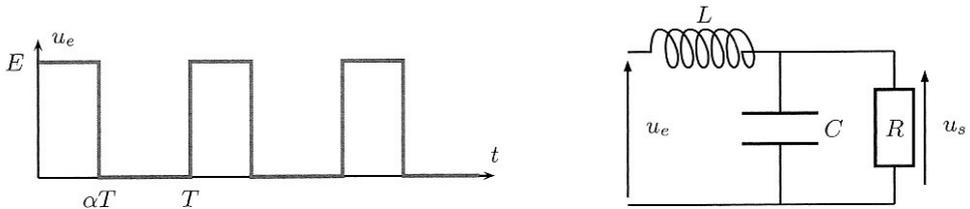
$$f_c = 100f_0$$



Filtrage d'un créneau de fréquence f_0 représenté par la somme partielle d'ordre 20 de son développement en séries de Fourier par un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 10$ pour différentes fréquences de résonance f_c .

IV-3) Exemple du filtrage d'un signal créneau pour obtenir une tension continue de valeur variable

La méthode usuelle pour fabriquer une alimentation de tension continue réglable (alimentation à découpage) consiste à envoyer une tension créneau de rapport cyclique α réglable sur un filtre passe-bas du type de celui représenté sur la figure (à droite), dans lequel la résistance R symbolise l'ensemble des circuits que l'on souhaite alimenter sous une tension presque parfaitement continue.



Signal créneau de rapport cyclique α (à gauche) et circuit étudié.

À basses fréquences, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert, donc $u_s = u_e$.

À hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil, donc $u_s = 0$. Ce filtre est un passe-bas.

Le signal d'entrée est rectangulaire, de rapport cyclique α variable ($0 < \alpha < 1$) ; sa décomposition en série Fourier (admise) s'écrit :

$$u_e(t) = \alpha E + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

$$\text{avec } C_n = \frac{2E}{n\pi} |\sin(n\pi\alpha)|$$

En ne conservant que la composante continue à l'aide du filtre passe-bas. La sortie est alors $u_s(t) = \alpha E$, tension continue réglable via le rapport cyclique α .

$$\text{En effet : } \underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + jL\omega} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{\underline{Z}}} \text{ et } \underline{Z} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{D'où : } \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R}(1 + jRC\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} - jLC\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

Par conséquent pour $x \ll 1$, on a $\underline{H} = 1$ et :

$$\begin{aligned} s(t) &= G(0)E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega)E_n \cos(n\omega t + \phi_n + \varphi(n\omega)) \\ &= E_0 + \dots = \alpha E \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0,5$ on obtient :

