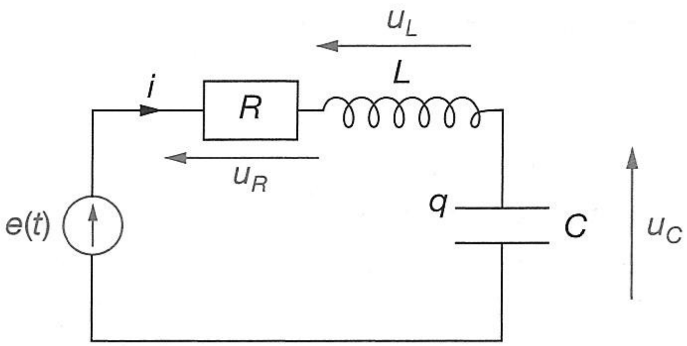
VII-2 – OSCILLATEURS EN REGIME SINUSOIDAL

Dans le chapitre précédent, on a étudié les régimes libres des oscillateurs. Pour cela, après avoir excité un système oscillant, on le laisse évoluer librement. Nous allons désormais nous intéresser à des oscillateurs, et plus généralement des systèmes linéaires, soumis continuellement à une excitation sinusoïdale.

I – Le régime sinusoïdal forcé

I-1) Oscillateur amorti

Considérons un circuit RLC série comportant un générateur basses fréquences (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω : $e(t) = e_0 cos(\omega t)$



La loi des mailles pour le circuit donne : e(t) = $u_c + u_L + u_R$

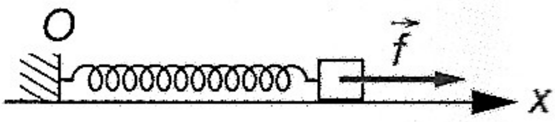
$$e(t) = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{Lc} = \frac{e(t)}{L} \; avec \; u_c = \frac{q}{C}$$

$$D'où : \ddot{u_c} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u_c} + \omega_0^2 \, u_c = \omega_0^2 \, e_0 cos(\omega t)$$

C'est exactement l'équation différentielle obtenue au chapitre précédent pour le régime libre, mais elle comporte un terme supplémentaire lié à l'excitation du générateur.

On peut imaginer le même type d'équation différentielle en mécanique ou l'excitation serait dû à une force supplémentaire : $\vec{f}(t) = \overrightarrow{f_0} cos(\omega t)$



I-2) Résolution de l'équation différentielle

Les deux situations physiques précédentes mènent à des équations différentielles similaires, que l'on mettra sous la forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 cos(\omega t)$$

La résolution mathématique de cette équation différentielle est, comme on l'a déjà évoqué précédemment, la somme de :

- La solution x_H (t) dite homogène de l'équation sans second membre, c'est-à-dire pour A_o=0 (à excitation nulle). On rappelle qu'on l'obtient à partir de l'équation caractéristique associée et on aboutit à un des trois régimes transitoires : apériodique, critique ou pseudopériodique ;

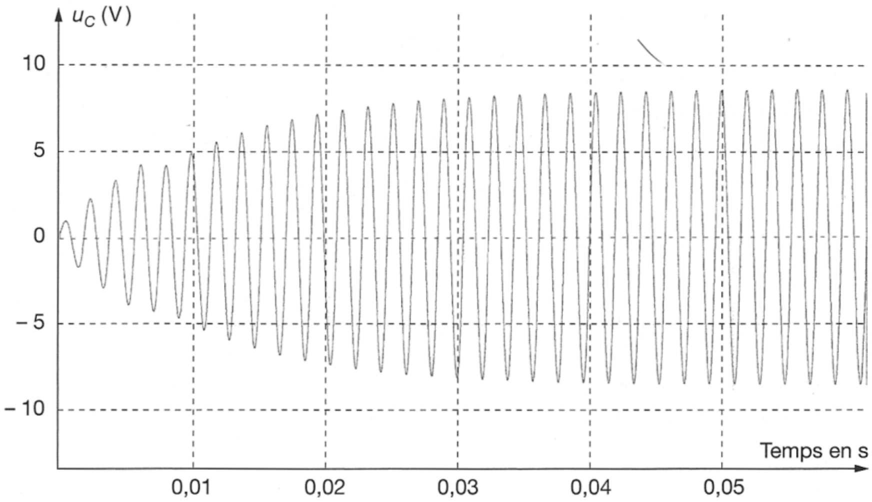
- Une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation. Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, une solution particulière peut en fait être cherchée sous forme sinusoïdale, de même pulsation.

$$x_p(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

La solution homogène correspond au régime transitoire et s'annule au bout d'un certain temps. En revanche, la solution particulière qui est sinusoïdale ici ne tend pas vers O. Ainsi, une fois le régime transitoire fini on a :

$$\boldsymbol{x(t) = x_h(t) + x_p(t) \sim x_p(t)}$$

La solution s'identifie quasiment à la solution particulière sinusoïdale. C'est ce qu'on appelle le régime sinusoïdal forcé. En pratique, comme on l'a expliqué au chapitre précédent, les régimes transitoires sont très courts en électrocinétique, de l'ordre d'une fraction de seconde. Ainsi, pour le circuit RLC, si le générateur est branché au temps t = 0, une évolution typique de la tension u_c aux bornes du condensateur est représentée sur la figure.



La charge du condensateur, initialement nulle, oscille sinusoïdalement après une durée de l'ordre de 30 ms : c'est le régime sinusoïdal forcé.

Ainsi, lorsqu'un système (linéaire) est soumis à une excitation sinusoïdale, les variables d'intérêt du système se mettent aussi à varier sinusoïdalement (avec la même pulsation) après un certain temps : c'est le régime sinusoïdal forcé.

II – Méthode de résolution : utilisation des complexes

II-1) Rappels sur les nombres complexes

L'ensemble des complexes est constitué des nombres z de la forme : $\underline{z}$= a + ib, où a, b sont des réels où i vérifie i² = -1.

Comme la lettre i est souvent utilisée pour représenter une intensité électrique, on cherche parfois à éviter les ambiguïtés de notation et on note j le complexe i.

Le nombre $\underline{z}$ = a + ib se représente dans le plan (dit complexe) par le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u_x} + b\overrightarrow{u_y}$

- Conjugué du complexe : $\underline{z^*}$= a + ib
- Module du complexe : $|z| = \sqrt{\underline{zz^*}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument du complexe : $arg(\underline{z}) = \varphi \ tel \ que \ tan\varphi = \frac{b}{a}$
- Multiplication :

$$|\underline{z}.\underline{z'}| = |\underline{z}|.|\underline{z'}| \text{ et } \arg(\underline{zz'}) = \arg(\underline{z}) + \arg(\underline{z'})$$

- Division :

$$\left|\frac{\underline{z}}{\underline{z'}}\right| = \frac{|\underline{z}|}{|\underline{z'}|} \text{ et } \arg\left(\frac{\underline{z}}{\underline{z'}}\right) = \arg(\underline{z}) - \arg(\underline{z'})$$

II-2) Notation complexe pour les signaux sinusoïdaux

Il reste à pouvoir déterminer de manière efficace une solution particulière de l'équation différentielle. Le moyen le plus rapide est d'utiliser la notation complexe.

À la grandeur sinusoïdale :

$$\mathrm{x}(t) = x_0 \, cos(\omega t + \varphi)$$

on associe la grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = x_0 \, e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{x_0} \, e^{j\omega t}$$

où $\underline{x_0} = x_0 \, e^{j\varphi}$ est appelé amplitude complexe de x(t). L'amplitude complexe $\underline{x_0}$ de la variable complexe x(t) contient deux informations :

- Son module $\left|\underline{x_0}\right| = x_0$ donne l'amplitude de variation de x(t), c'est-à-dire que x(t) varie entre ± x_o ;
- Sa phase $arg(\underline{x_0}) = \varphi$ (φ renseigne sur le déphasage entre x(t) et la grandeur excitatrice de référence (En général, la phase de la grandeur excitatrice est choisie nulle).

Il faut à ce point de la réflexion bien comprendre que la grandeur x(t) étudiée est physiquement de nature réelle : il s'agit d'une tension, intensité ou abscisse d'un point matériel... Afin de simplifier les calculs, on introduit une grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, notée avec une barre au-dessous afin d'éviter toute confusion. À la fin du raisonnement, il faut revenir à la notation réelle en prenant la partie réelle : $x(t) = Re(\underline{x}(t))$.

L'intérêt de la notation complexe réside entre autres dans la remarque suivante. Considérons la dérivation de la fonction sinusoïdale x(t) :

$$\mathrm{x}(t) = x_0\, cos(\omega t + \varphi) \text{ donne } \dot{\mathrm{x}}(t) = -\omega x_0\, sin(\omega t + \varphi)$$

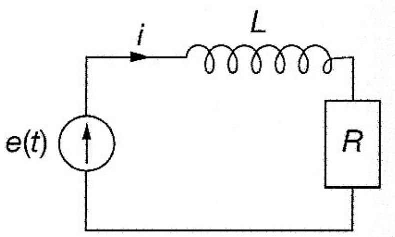
Alors que :

$$\underline{x}(t) = x_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}\ donne\ \underline{\dot{x}}(t) = j\omega\, x_0\, e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega \underline{x}(t)$$

Au lieu de transformer un cosinus en sinus, la dérivation n'est qu'une multiplication par $j\omega$ en notation complexe. Similairement, une intégration s'effectue au moyen d'une division par $j\omega$. En conclusion, tout le calcul à base d'équations différentielles se mène à l'aide de multiplications par des complexes. La situation est résumée dans le tableau suivant :

Régime quelconque	**Régime sinusoïdal forcé**
Fonction $f(t)$	Fonction $\underline{f}(t)$
$\frac{df}{dt}(t)$	$j\omega \underline{f}(t)$
$\int f(u)du$	$\frac{\underline{f}(t)}{j\omega}$

II-3) Exemple le circuit RL



Un circuit RL est alimenté par un générateur fournissant la tension $e(t) = e_0 cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé. Déterminons i(t) :

La loi des mailles pour le circuit donne : e(t) = $u_L + u_R$

$$\Rightarrow e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri$$

D'où en notation complexe avec : $\underline{i}(t) = \underline{I}\, e^{j\omega t}$

$$\Leftrightarrow Lj\omega\underline{i} + R\underline{i} = \underline{e_0} \Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e_0}}{R+jL\omega}$$

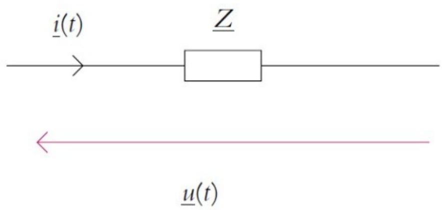
$$\Rightarrow I = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\ et\ tan(\varphi) = -\frac{L\omega}{R}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi)\ \text{où}\ tan(\varphi) = -\frac{L\omega}{R}$$

III – Impédances complexes

III-1) Définitions

On définit $\underline{Z}$ comme l'impédance complexe du dipôle considéré tel que $\underline{U} = \underline{Z}\underline{i}$



Représentation d'une impédance.

On appelle admittance complexe la grandeur : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Si on note $\underline{Z}$=R+jX et $\underline{Y}$=G+jB alors :

- R est appelée resistance
- X est appelée réactance
- G est appelée conductance
- Et B susceptance

III-2) Impédance et déphasage

L'impédance complexe peut s'écrire comme tout complexe sous la forme : $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$

On appelle impédance la grandeur Z (réelle) correspondant au module de l'impédance complexe Z.

Il faut faire particulièrement attention aux quantités qu'on manipule et savoir à tout moment s'il s'agit d'une grandeur complexe ou d'une grandeur réelle.

On peut noter que :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = Ze^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \Rightarrow Z = \frac{U}{I}\ et\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

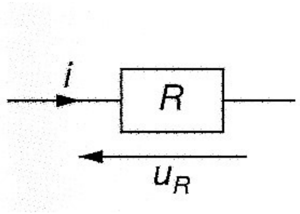
$$Comme\ \underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Zcos\varphi + Zsin\varphi$$

$$\Rightarrow R = Zcos\varphi\ et\ X = Rsin\varphi$$

On note que la connaissance de l'intensité (respectivement de la tension) complexe et de l'impédance complexe permet de déterminer complètement la tension (respectivement de l'intensité) complexe.

III-2) Résistance

Pour une résistance, la loi d'Ohm s'énonce uR = Ri.



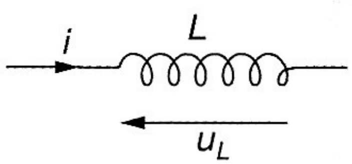
Le passage en régime sinusoïdal forcé est immédiat :

$$u_R = Ri = \underline{Z_R}\,\underline{i} \Rightarrow \underline{Z_R} = R$$

Bien entendu tension et intensité sont en phase.

III-3) Bobine

La relation entre le courant et la tension pour une inductance est, en convention récepteur :

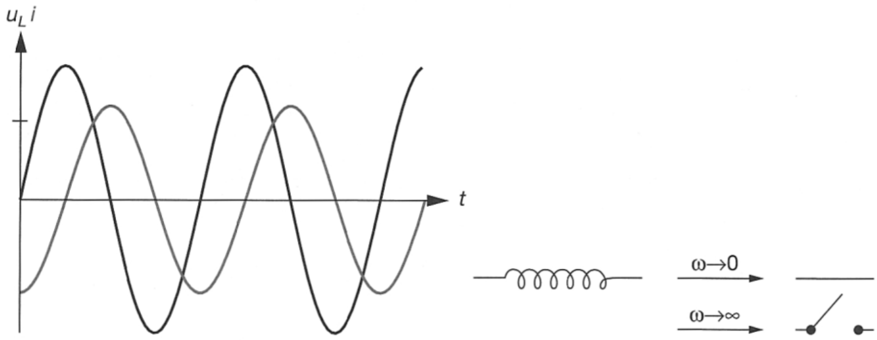


$$u_L = L\frac{di}{dt} = jL\omega\,\underline{i} = \underline{Z_L}\,\underline{i} \Rightarrow \underline{Z_L} = jL\omega$$

$\underline{Z_L}$ est appelée impédance complexe de la bobine

On remarque que $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire que la tension u_L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'intensité i.

Graphiquement, on obtient l'allure de la figure suivante.



On peut simplifier le comportement d'une inductance à faible ou grande pulsation :

- A faible pulsation : $\omega \to 0$, $Z_L \to 0$. Ainsi, à faible pulsation, une inductance se comporte comme une très faible résistance, c'est-à-dire comme un fil ou un court-circuit ;
- A haute pulsation : $\omega \to \infty$, $Z_L \to \infty$. Par conséquent, à haute pulsation, une inductance se comporte comme une très forte résistance, c'est-à-dire comme un interrupteur ouvert.

III-4) Condensateur

La relation entre la charge q, l'intensité i et la tension u_c est pour un condensateur, avec les conventions récepteurs :

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \underline{i} = jC\omega\,\underline{u} \Rightarrow \underline{Z_c} = \frac{1}{jC\omega}$$

Z_c est l'impédance du condensateur.

L'impédance d'un condensateur est imaginaire pure, ce qui signifie que la tension u_c et l'intensité sont en quadrature. Plus précisément, la tension u_c est en retard de $-\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'intensité i.

On peut de plus simplifier le comportement d'un condensateur à faible ou grande pulsation :

- A faible pulsation : $\omega \to 0$, $Z_C \to \infty$. Ainsi, à faible pulsation, un condensateur se comporte comme une résistance très élevée, c'est-à-dire comme un interrupteur ouvert ;
- A haute pulsation : $\omega \to \infty$, $Z_C \to 0$. Par conséquent, à haute pulsation, un condensateur se comporte comme une très faible résistance, c'est-à-dire comme un fil (ou un court-circuit).

III-5) Association de dipôles linéaires

On va déterminer les relations d'association de dipôles en notation complexe par analogie avec l'association de résistances en régime continu.

On a $\underline{U} = \underline{Z}i$, or en régime continu on avait U=Ri

Par conséquent les lois d'association des impédances sont les mêmes que celles des résistances en régime continu.

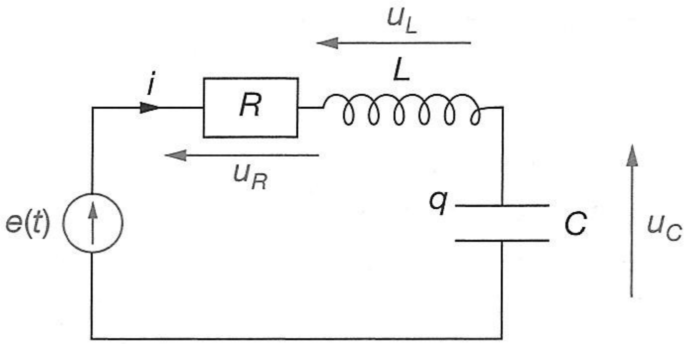
- En série : $\underline{Z_s} = \sum \underline{Z_i}$ et $\frac{1}{\underline{Y_S}} = \sum \frac{1}{\underline{Y_i}}$
- En parallèle : $\underline{Y_s} = \sum \underline{Y_i}$ et $\frac{1}{\underline{Z_S}} = \sum \frac{1}{\underline{Z_i}}$
- Diviseur de tension : $\underline{u_2} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_2}+\underline{Z_1}}\underline{u}$

- Diviseur de courant : $\underline{i_2} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}+\underline{Z_1}}\underline{i}$

IV – Résonance en intensité (ou vitesse)

IV-1) Amplitude complexe de l'intensité

Considérons un circuit RLC série comportant un générateur basses fréquences (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω : $e(t) = e_0 cos(\omega t)$



La loi des mailles pour le circuit donne : e(t) = $u_c + u_L + u_R$

$$e(t) = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c}$$

En notation complexe on obtient :

$$\Leftrightarrow -L\omega^2\underline{q} + Rj\omega\underline{q} + \frac{\underline{q}}{c} = \underline{e}$$

$$\Leftrightarrow \underline{q} = \frac{\underline{e}}{-L\omega^2 + Rj\omega + \frac{1}{C}}$$

Or : $\underline{i} = j\omega\underline{q}$

D'où :

$$\Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On peut mettre cette expression sous forme canonique :

$$\Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\frac{\underline{e}}{R}}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{\frac{\underline{e}}{R}}{1 + \left(j\frac{L\omega_0}{R}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{RC\omega_0\omega}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\frac{\underline{e}}{R}}{1 + \left(jQ\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\mathbf{D'o\grave{u} :}\quad \underline{\mathbf{i_0}} = \frac{\mathbf{i_m}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{jQ}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)}$$

$$\mathbf{o\grave{u}\ Q} = \frac{\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega_0}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{RC}\boldsymbol{\omega_0}}, \boldsymbol{\omega_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{LC}}}, \mathbf{i_m} = \frac{\boldsymbol{e_0}}{\mathbf{R}}\ \mathbf{et\ x} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_0}}$$

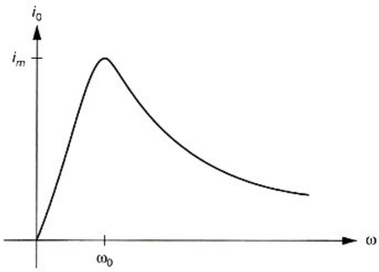
IV-2) Amplitude de l'intensité

$$\text{On a } \underline{i_0} = \frac{\mathrm{i_m}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)} \Rightarrow i_0 = \frac{\mathrm{i_m}}{\sqrt{1 + \mathrm{Q}^2\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)^2}}$$

L'amplitude i_0 de l'intensité tend vers 0 quand la pulsation ω devient très élevée ou très faible. Elle est maximale quand le terme entre parenthèses du dénominateur s'annule, soit quand : x=1

Ainsi, l'intensité est maximale pour une pulsation de résonance égale à la pulsation propre : $\omega_r = \omega_0$, On dit alors qu'il y a résonance d'intensité.

Plus généralement, une résonance intervient lorsqu'un système physique répond de manière maximale à une excitation. La courbe donnant l'évolution de l'amplitude de l'intensité en fonction de la pulsation est tracée pour Q = 1. À la résonance, l'amplitude de l'intensité est maximale et vaut $\mathrm{i_m}$.



Tout se passe comme si l'inductance et le condensateur étaient absents : le générateur se comporte alors comme s'il était directement branché sur une résistance R. D'un point de vue pratique, la résonance peut poser des problèmes dans un circuit électrique vu l'intensité élevée circulant dans celui-ci.

IV-3) Bande passante

On s'intéresse au domaine de fréquence dans lequel l'amplitude de l'intensité reste importante, c'est-à-dire assez proche de son maximum i_m. Le critère usuellement retenu pour quantifier cette bande passante est de considérer la zone de fréquences pour laquelle l'amplitude reste supérieure à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$. On définit alors les pulsations de coupure $\omega_1 \ et \ \omega_2$ par :

$$\frac{i_0}{i_m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{Q}^2\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \mathrm{Q}^2\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \ \pm 1 = \mathrm{Q}\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right) \Leftrightarrow \pm \frac{1}{\mathrm{Q}} = x - \frac{1}{\mathrm{x}}$$

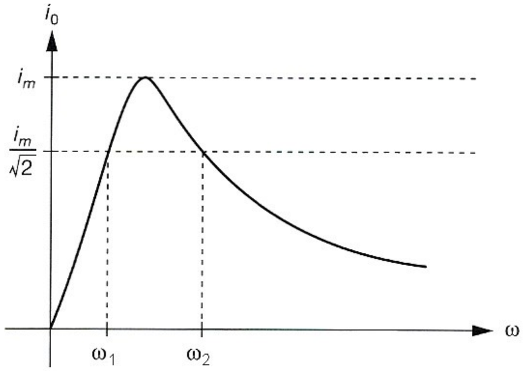
$$\Leftrightarrow \mathrm{x}^2 \pm \frac{1}{Q}\mathrm{x} - 1 = 0$$

Les racines du polynôme sont de la forme :

$$x = \frac{\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} > 0$$

Les pulsations de coupure correspondent aux deux racines positives d'où :

$$x_{1,2} == \pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$



Ce résultat est un peu compliqué et peut se mettre sous une forme nettement plus simple en exprimant la bande passante Δx :

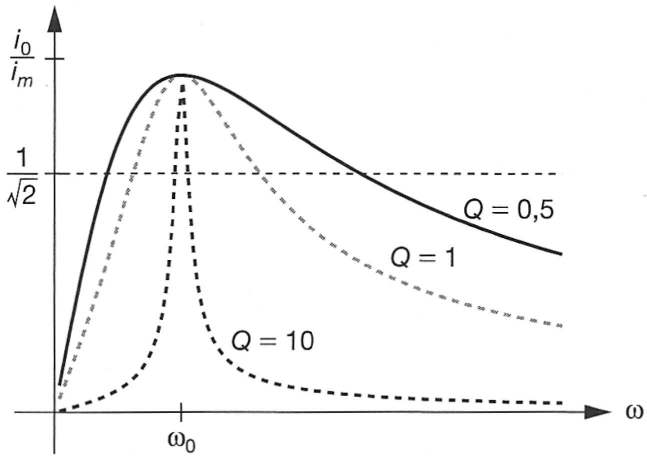
$$\boldsymbol{\Delta x = |x_2 - x_1| = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}}$$

Ce résultat fondamental renseigne très clairement sur le sens physique du facteur de qualité Q. Un oscillateur de facteur de qualité élevé ne réagit notablement qu'à des excitations de fréquences très proches de la fréquence de résonance f_o. Plus précisément, l'écart à la fréquence de résonance doit être inférieur à $\Delta f = f_o/Q$.

Pour fixer les idées, un résonateur à quartz (à la base du fonctionnement des montres à quartz) possède un facteur de qualité de l'ordre de Q=10 000 : on dit que le circuit est très sélectif ou que la résonance est très aiguë.

En revanche, si le facteur de qualité est faible, la bande passante devient très importante. Dans le cas d'un circuit RLC, le facteur de qualité vaut Q=0,3 pour les valeurs typiques R = 1000Ω, L = 10mH et C = 0,1μF. Cela correspond à un circuit très peu sélectif.

La forme précise de l'amplitude de l'intensité réduite i_o/i_m, (c'est-à-dire ramenée à un maximum de 1) est tracée en fonction de la pulsation pour les facteurs de qualité Q = 0,5 , Q = 1 et Q = 10 sur la figure. La variation de la bande passante selon le facteur de qualité est très claire.



IV-4) Phase de l'intensité

D'autres informations peuvent être données par la différence de phase $\Delta\varphi$ entre l'intensité et la tension excitatrice du générateur.

Ici : $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_e=\varphi$

Ainsi, le déphasage entre intensité et tension excitatrice est :

On a ici :

$$\Delta\varphi = Arg\left(\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right) = Arg\left(\underline{\mathbf{i_0}}\right) = \varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \mathrm{Arg}\left(\frac{\mathrm{i_m}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)}\right) = -\mathrm{Arg}\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)\right)$$

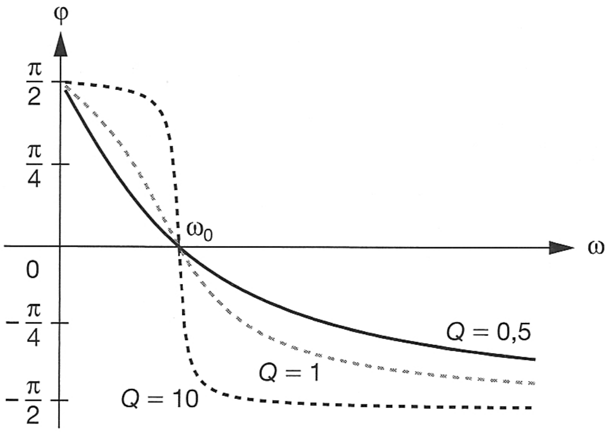
D'où :

$$tan(\varphi) = -Q\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - \mathrm{x}\right)$$

Le fait que tangente soit définie à Pi près est embêtant pour conclure sur le déphasage. Regardons d'un peu plus près les fonctions équivalentes à $\underline{\mathbf{i_0}}$: $\underline{\mathbf{i_0}} = \frac{\mathbf{i_m}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{jQ}\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)}$

x	0	1	∞
$\underline{\mathrm{i}_0}$	$\frac{-\mathrm{i_m x}}{jQ}$	$\mathrm{i_m}$	$\frac{\mathrm{i_m}}{jQ\mathrm{x}}$
φ	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Cela donne l'allure générale de la figure 26. Il reste simplement à commenter l'influence du facteur de qualité Q sur l'évolution de la ur Sur la figure sont tracées les variations de la phase φ en fonction de la pulsation pour les facteurs de qualité Q = 0,5 , Q = 1 et Q = 1 :

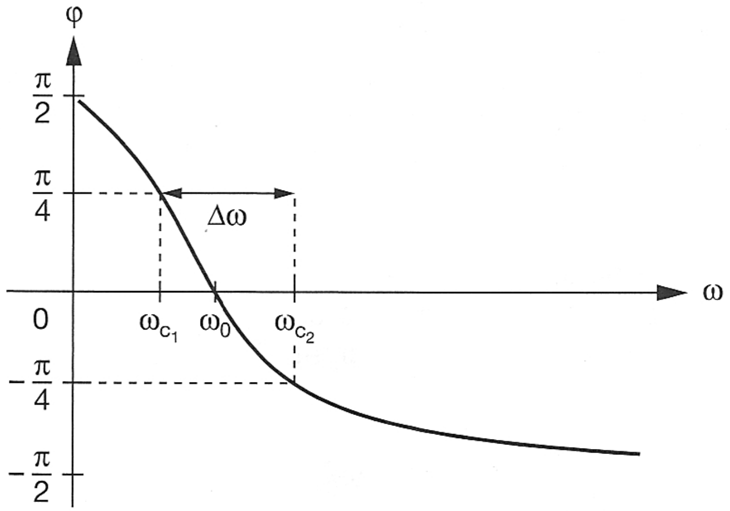


Pour un facteur de qualité élevé, la phase varie très rapidement au voisinage de ω_0, et ces variations restent très localisées autour de ω_0. En revanche, pour un facteur de qualité faible, les variations sont plus lentes et réparties sur un domaine de pulsation étendu.

Plus quantitativement, on remarque d'après l'expression que les pulsations de coupure vérifient :

$$\pm 1 = \mathrm{Q}\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right) \Leftrightarrow tan(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$$

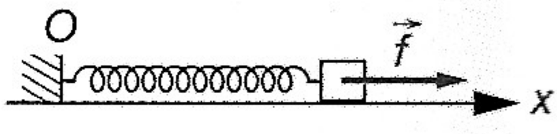
En d'autres termes, les pulsations de coupure sont celles pour lesquelles l'intensité et la tension du générateur sont déphasées de $\pm\frac{\pi}{4}$.



IV-5) Résonance en vitesse

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique amorti en mécanique auquel on ajoute une force excitatrice :

$$\vec{f}(t) = \overrightarrow{f_0}cos(\omega t)$$



L'équation différentielle s'écrit : $m\vec{a} = \vec{f}(t) - k(l - l_0)\vec{u}_x - \lambda\vec{v}$

En effectuant le changement de variable $u = l - l_0$ et en projettant sur $\vec{u}_x$ on obtient :

$$m\ddot{u} = \mathrm{f} - k\mathrm{u} - \lambda\dot{\mathrm{u}}$$
$$\Leftrightarrow f = m\ddot{u} + \lambda\dot{\mathrm{u}} + k\mathrm{u}$$

La loi des mailles pour le circuit RLC avait donné :

$$e(t) = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c}$$

On retrouve les analogies vu précédemment : $q \leftrightarrow u \; et \; i \leftrightarrow v$

Par conséquent :
La résonance en intensité est l'analogue de la résonance en vitesse.
La résonance en charge (ou en tension aux bornes du condensateur) sera l'analogue de la résonance en élongation

$$\text{D'où : } \underline{\mathrm{v}_0} = \frac{\mathrm{v_m}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{\mathrm{x}}\right)}$$

$$\text{où } \mathrm{Q} = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\mathrm{k}}{\lambda\omega_0}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \mathrm{i_m} = \frac{f_0}{\lambda} \text{ et } \mathrm{x} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

V – Résonance en tension aux bornes du condensateur (ou en élongation)

V-1) Equation canonique

- En mécanique on a : $f = m\ddot{u} + \lambda\dot{u} + k\mathrm{u}$
- En électricité on a : $e = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c}$

Les deux équations peuvent s'écrire :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2\,u = A_0 cos(\omega t) \text{ où } A_0 = \frac{f}{m} = \frac{e}{L}$$

En notation complexe on obtient :

$$-\omega^2\,\underline{u} + j\omega\,\frac{\omega_0}{Q}\underline{u} + \omega_0^2\,\underline{u} = A_0$$

$$\Leftrightarrow \underline{u} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{f_0}{m} \text{ ou } \frac{e_0}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{f_0}{m\omega_0^2}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

V-2) Résonance d'élongation

Étudions dans un premier temps les variations de l'amplitude u_0 des oscillations en fonction de la pulsation pour une force excitatrice d'amplitude f_0 fixée.

$$u_0 = \frac{\frac{f_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{\frac{f_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

On remarque déjà qu'à pulsation très élevée, l'amplitude u_0 des oscillations tend vers 0. En revanche, à pulsation nulle, $u_0 = \frac{f_0}{m\omega_0}$.

Il reste à savoir, dans quelles conditions la courbe passe par un maximum. Elle passe par un maximum si le dénominateur est minimum c'est-à-dire :

$$-4x(1-x^2)+\frac{2x}{Q^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(1-x^2)=\left(\frac{1}{Q}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-\frac{1}{2Q^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} > 0 \text{ ssi } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

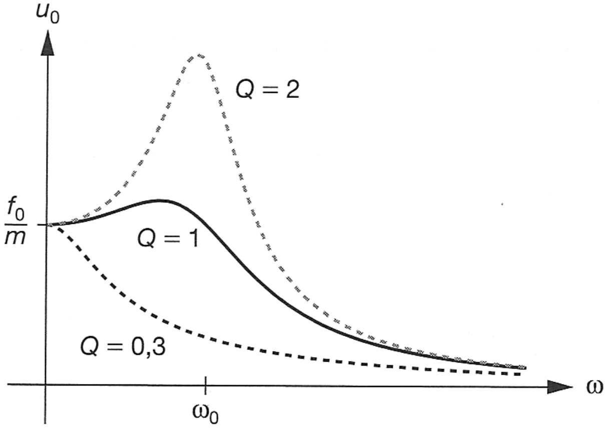
La résonance d'élongation n'existe que pour les oscillateurs mécaniques de facteur de qualité suffisamment élevé, contrairement à la résonance d'intensité dont l'existence est systématique.

Une autre différence avec la résonance d'intensité est la valeur de la pulsation de résonance. Celle-ci est donnée, quand elle existe, par :

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} > 0 \text{ ssi } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Elle est donc forcément différente de la pulsation ω_0.

Similairement au cas de la résonance d'intensité, un facteur de qualité élevé se traduit par une acuité de la résonance autour de la pulsation de résonance. On peut le constater numériquement sur la figure.



V-3) Bande passante

Les pulsations de coupure de la bande passante sont définies par :

$$\frac{u_0}{u_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$or \;\; u_{max} = \frac{\frac{f_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \left(\frac{1-1/2Q^2}{Q}\right)^2}} = \frac{\frac{f_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1-1/2Q^2}{Q^2}}}$$

$$= \frac{\frac{f_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} \sim \frac{Qf_0}{m\omega_0^2} \; si\ Q\ est\ grand$$

L'amplitude des oscillations est d'autant plus importante que Q est grand.

On démontre que si Q est grand la bande passante est de la forme :

$$\text{Si } Q \gg 1 : \; \Delta x = |x_2 - x_1| = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q}$$

En général, il est préférable d'éviter la résonance d'élongation dans les systèmes physiques. Donnons quelques exemples :

- Dans un amortisseur de véhicule (aisément modélisable par un système ressort-masse), la résonance d'élongation n'est pas souhaitable. Précisons un peu le problème. La réponse à une excitation, liée par exemple à une irrégularité de la route, devient importante au voisinage d'une certaine fréquence. L'amplitude des oscillations peut alors être élevée, ce qui est gênant pour les passagers. Il faut se débrouiller pour supprimer la résonance ou plus vraisemblablement repousser la fréquence de résonance en dehors du domaine d'excitation ;
- Les résonances sont aussi à éviter sur les ponts. Des oscillations de grande amplitude peuvent créer de gros dégâts ;
- Les grandes tours peuvent être assimilées à un oscillateur mécanique amorti. L'excitation peut être due au vent ou à une secousse sismique. Là aussi, il est important de repousser la fréquence de résonance en dehors du domaine spectral de l'excitation.

V-4) Phase de l'élongation

L'étude du déphasage ψ entre l'élongation et la force excitatrice permet d'obtenir des informations complémentaires.

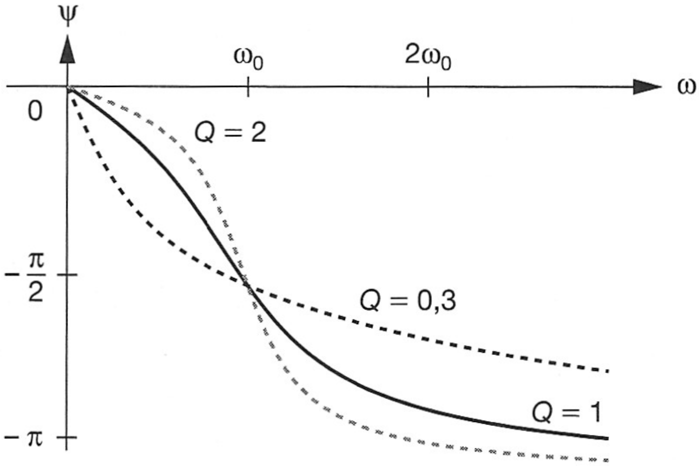
Soit :

$$\underline{u} = \frac{\frac{f_0}{m\omega_0^2}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Rightarrow \tan(\psi) = -\frac{x/Q}{1 - x^2} = \frac{x/Q}{x^2 - 1^2}$$

Le fait que tangente soit définie à Pi près est embêtant pour conclure sur le déphasage. Regardons d'un peu plus près les fonctions équivalentes à $\underline{u}$:

x	0	1	∞
$\underline{u}$	$\frac{f_0}{m\omega_0^2}$	$\frac{f_0 Q}{jm\omega_0^2}$	$-\frac{f_0}{mx^2\omega_0^2}$
φ	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

On en déduit l'allure générale :



À la résonance d'élongation, le déphasage ψ ne possède pas de valeur remarquable, contrairement à la pulsation propre pour laquelle il vaut : $-\frac{\pi}{2}$

L'influence du facteur de qualité est la même que pour la résonance d'intensité. Un facteur de qualité élevé rend plus rapide la rotation de phase.