# VII-1 – OSCILLATEURS AMORTIS EN REGIME LIBRE

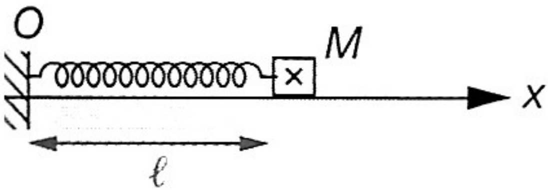
Le modèle de l'oscillateur harmonique étudié au chapitre I peut être amélioré afin de prendre en compte des termes dissipatifs. On obtient alors un oscillateur harmonique amorti, pouvant naturellement modéliser des systèmes mécaniques ou électriques. Afin d'étudier un tel oscillateur amorti, on choisit de l'exciter à un instant initial, puis d'étudier sa réponse, c'est ce que l'on appelle un régime libre. La résolution de l'équation différentielle régissant ces systèmes mène à différents types de réponses.

## I – Equation différentielle

### I-1) Oscillateur mécanique avec frottement visqueux

#### a) La force visqueuse

Considérons une masse m attachée à un ressort de raideur k et longueur à vide $l_0$ fixé en O et pouvant glisser sans frottement sur le sol.




Comme on l'a expliqué précedemment, si on écarte un peu la masse de sa position d'équilibre avant de la relâcher, celle-ci effectue des oscillations. Néanmoins, lorsque l'on réalise l'expérience, l'amplitude des oscillations décroît lentement et la masse finit par s'immobiliser. L'absence de frottements n'est pas réaliste. Il est alors possible d'améliorer la modélisation en ajoutant une force de frottement. La possibilité la plus simple, dans le cadre des vitesses pas trop élevées, est de considérer une force de frottement proportionnelle à la vitesse dite visqueuse :

$$\boldsymbol{\vec{f} = -\lambda\vec{v}}$$

où λ une constante. Le signe moins signifie que la force de frottement est ici opposée à la vitesse de la masse. De plus, la force est d'autant plus intense que la vitesse de la masse est élevée. Cette force proportionnelle à la vitesse est nommée frottement fluide et la constante λ est nommée constante de frottement fluide. Mettons le problème en équation en se plaçant dans le référentiel terrestre galiléen.

b) Equation différentielle

La position de la masse est repérée par l'abscisse x(t). Les forces exercées sur la masse sont :

- Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$ ;
- La réaction du support : $\vec{R} = R\overrightarrow{u_z}$ (le contact sol-support est supposé sans frottement) ;
- La force élastique exercée par le ressort :
$$\overrightarrow{F_{él}} = -k(x(t) - l_0)\overrightarrow{u_x}$$
- Le frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

Le principe fondamental de la dynamique pour la masse s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - k(x(t) - l_0)\overrightarrow{u_x} - \lambda\vec{v}$$

En projection sur $\overrightarrow{u_x}$, on obtient :

$$\boldsymbol{m\ddot{x} = -k(x(t) - l_0) - \lambda\dot{x}}$$

La position d'équilibre $x_o$ est donnée par :

$$0 = -k(x_0 - l_0) \Rightarrow x_0 = l_0$$

À l'équilibre, la longueur du ressort est égale à la longueur à vide. Il est essentiel de noter que la présence du frottement fluide ne change pas la position d'équilibre.

On pose alors pour simplifier $u(t) = x(t) - x_0, u(t)$ étant l'écart par rapport à la position d'équilibre ou plus simplement l'abscisse de la masse si l'origine 0' est choisie au niveau de la position d'équilibre. D'où : $m\ddot{u} = -k\mathrm{u} - \lambda\dot{\mathrm{u}} \Leftrightarrow \ddot{u} + \frac{\lambda}{m}\dot{\mathrm{u}} + \frac{k}{m}u = 0$

Afin de faciliter la comparaison avec d'autres situations physiques où cette équation se rencontre, on réécrit l'équation sous la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

**où :**

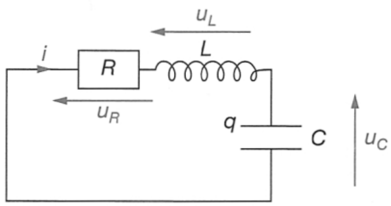
- $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ **est la pulsation propre du système (c'est-à-dire la pulsation des oscillations sans frottement)**
- **Q appelé facteur de qualité, une constante telle que** $\boldsymbol{\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$

Pour le moment, on constate simplement que Q décroît pour des frottements plus importants. L'équation différentielle décrit génériquement un oscillateur amorti. Notons que la présence des frottements se traduit ici par l'apparition d'une dérivée temporelle du premier ordre.

## I-2) Circuit RLC série

### a) Loi des mailles

L'équation différentielle précédente se rencontre dans de nombreux systèmes physiques. Nous allons l'établir dans le cadre d'un circuit comportant une bobine, un condensateur et une résistance en série (circuit RLC série).




La loi des mailles donne :

$$u_L + u_R + u_c = 0$$

Successivement, comme les dipôles sont en convention récepteur, c'est-à-dire avec les flèches représentant les tensions et intensité en sens opposé, on écrit les lois correspondantes avec un signe plus :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_c = 0$$

$$Or : \ i = C\frac{du_c}{dt} \ d'où : L\ddot{u}_c + R\dot{u}_c + u_c = 0$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0}$$

On retrouve la même équation différentielle en q(t) car $q = Cu_c$

On retrouve bien une équation de type oscillateur amorti (1) avec la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$ et le facteur de qualité Q définis par :

$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \; et \; Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

b) Méthode énergétique

Dans le circuit RLC série on a :

- La résistance, qui dissipe l'énergie électrique en énergie thermique (on constate l'augmentation de la température de la résistance ainsi que l'apparition d'un transfert thermique cédé à l'air ambiant)
- La bobine et le condensateur qui stockent ou restituent l'énergie électrique.

Soit :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_c = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt}i + Ri^2 + u_c i = 0$$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt}i + Ri^2 + u_c C\frac{du_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2\right) = -Ri^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(E_m) = -Ri^2$$

La résistance dissipe de l'énergie électrique tant que l'intensité est non nulle. On peut ainsi imaginer que l'évolution du système se fait jusqu'à disparition de tout signal, soit une annulation du courant i (et de la charge q).

## I-3) Analogie

| | Mécanique | Électronique |
|---|---|---|
| Équation différentielle | $m\ddot{x} + \boldsymbol{\lambda}\dot{x} + kx = 0$ | $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ |
| Pulsation propre | $\sqrt{\frac{k}{m}}$ | $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ |
| Variables | élongation $x$ | charge $q$ |
| | vitesse $v = \dot{x}$ | intensité $i$ |
| | masse $m$ | inductance $L$ |
| | ressort de raideur $k$ | capacité $\dfrac{1}{C}$ |
| | frottement proportionnel à $v$ de coefficient $\boldsymbol{\lambda}$ | résistance $R$ |
| | énergie cinétique $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ | énergie magnétique $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$ |
| | énergie potentielle $\frac{1}{2}kx^2$ | énergie électrostatique $\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$ |

Dès qu'on aura, quel que soit le domaine concerné, une équation différentielle du type oscillateur amorti, l'ensemble des résultats pourra être obtenu par simple analogie comme celle qu'on vient d'établir entre le ressort horizontal amorti et le circuit R,L,C série.

# II – Résolution analytique de l'équation différentielle

## II-1) Polynôme caractéristique

Nous allons commencer par donner la solution de l'équation différentielle : af''(t)+ bf'(t)+ cf(t)=0 où a, b et c sont des constantes réelles.

La dénomination mathématique de l'équation est équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Le détail de la résolution sera explicité dans le cours de mathématiques.

- On remarque que l'équation différentielle est linéaire : c'est-à-dire que si $f_1$ et $f_2$ sont solutions de l'équation alors $\alpha f_1+\beta f_2$ est aussi solution ($\alpha$ et $\beta$ étant des constantes).
- Le terme homogène signifie ici que le second membre (terme de droite) est nul, au lieu d'être une certaine fonction bien déterminée.
- L'équation différentielle est d'ordre deux (elle fait intervenir des dérivées secondes) donc deux constantes doivent apparaître dans l'expression de la solution. Elles seront déterminées par les conditions initiales.

Afin de résoudre l'équation différentielle af''(t)+ bf'(t)+ cf(t)=0, on pose l'équation dite caractéristique, du second degré d'inconnue r :

$$ar^2 + br + c = 0$$

et on étudie le discriminant : $\Delta=b^2-4ac$

## II-2) Solutions du polynôme

### a) Les trois régimes

On distingue alors les trois cas suivant le signe de $\Delta$ :

1- $\Delta>0$ : les deux racines réelles de l'équation caractéristique, notées $r_1$ et $r_2$, sont telles que :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - \beta \, et \; r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + \beta$$

$$où \; \alpha = \frac{-b}{2a} \; et \; \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La solution s'écrit alors :

$$f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

2- $\Delta<0$ : les deux racines complexes conjugées de l'équation caractéristique, notées $r_1$ et $r_2$, sont telles que :

$$r_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta \, et \; r_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta$$

La solution s'écrit alors :

$$f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

3- $\Delta=0$ : la solution réelle double de l'équation caractéristique est notée

$$r = \frac{-b}{2a} = \alpha$$

Alors, la solution est :

$$f(t) = (At + B)e^{\mathrm{r}t}$$

A et B sont deux constantes dont les valeurs restent à déterminer grâce aux conditions initiales.

### b) Des solutions bornées

L'équation différentielle de l'oscillateur amorti est un cas particulier d'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants. En effet, dans ce cas, les trois coefficients a, b et c sont de même signe.

On démontre et on va vérifier que les solutions obtenues sont bornées.

**Toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants**

$$af''(t)+bf'(t)+cf(t)=0$$

**restent bornées si et seulement si les trois coefficients constants a, b et c sont de même signe.**

# III – Les trois régimes de l'oscillateur amorti

## III-1) Polynôme caractéristique

On a posé : $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

D'où le polynôme : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \Rightarrow \Delta = 0 \text{ ssi } Q = \frac{1}{2}$

Le signe de $\Delta$ dépend donc de la valeur de Q par rapport à $\frac{1}{2}$.

## III-2) Régime pseudo-périodique: $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$

### a) Solutions

Les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique, notées $r_1$ et $r_2$, sont telles que :

$$r_{12} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\sqrt{-\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\alpha \pm i\omega$$

La solution s'écrit alors :

$$u(t) = A'e^{(-\alpha - i\omega)t} + B'e^{(-\alpha + i\omega)t}$$
$$\Leftrightarrow u(t) = e^{-\alpha t}\left(A'e^{-i\omega t} + B'e^{+i\omega t}\right)$$

Cherchons A' et B' sous la forme : $A' = \frac{A}{2}e^{-i\varphi}$ et $B' = \frac{A}{2}e^{+i\varphi}$

$$\Rightarrow u(t) = Ae^{-\alpha t}\frac{\left(e^{-i(\omega t + \varphi)} + e^{+i(\omega t + \varphi)}\right)}{2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow u(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

**On obtient donc deux parties dans cette solution :**

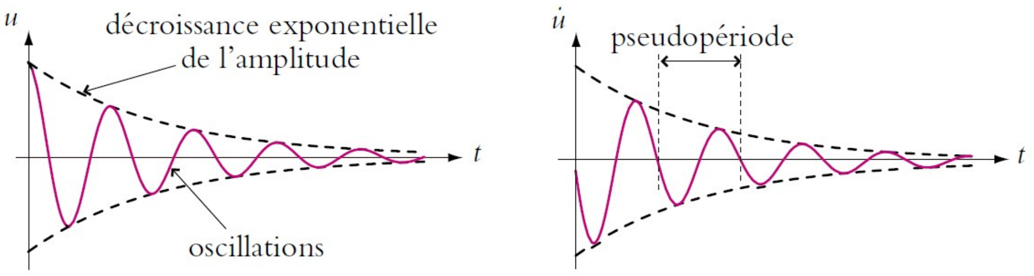
- **Des oscillations périodiques à la pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ correspondant à la partie imaginaire des solutions de l'équation caractéristique.**
- **Une atténuation exponentielle de l'amplitude associée à la partie réelle des solutions de l'équation caractéristique.**

**C'est pourquoi on qualifie ce régime de pseudopériodique ou encore de sinusoïdal amorti.**

b) Interprétation physique

On en déduit l'allure suivante sur laquelle on peut formuler les remarques suivantes :

- Elles tendent toujours vers 0 en oscillant quelles que soient les conditions initiales,
- Les conditions initiales imposent les valeurs à l'origine des courbes ainsi que leur tangente.
- La courbe est comprise entre deux exponentielles qui en constituent les enveloppes.




Régime pseudopériodique.

Cette situation correspond bien à de faibles frottements. En effet, les frottements n'empêchent alors pas l'apparition d'oscillations pour le système, mais font diminuer leur amplitude au cours du temps. Par analogie avec le régime harmonique, $\omega$ est nommée pseudo-pulsation.

On retiendra que la pulsation $\omega$ (et par conséquent la période) des pseudo-oscillations est différente de celle $\omega_0$ des oscillations harmoniques comme le montre la relation précédemment établie :

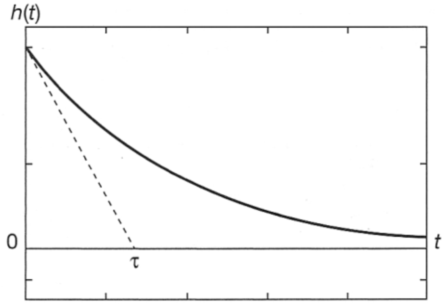
$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Au final, la masse finit par s'immobiliser dans la position u=0 c’est-à-dire à la position d'équilibre.

c) Durée du régime pseudopériodique

La durée avant l'immobilisation de la masse est à priori infinie car la solution ne devient définitivement nulle que pour un temps t infini. Ce résultat quelque peu excessif est lié à la simplicité de la modélisation. L'expression de la position fait apparaître des oscillations d'amplitude $\mathbf{Ae^{-\alpha t}}$ décroissante. Nombreux sont les phénomènes physiques dont la modélisation fait intervenir une exponentielle décroissante.

Nous allons un peu nous attarder sur son comportement en considérant la fonction : $\mathbf{h(t) = e^{-\alpha t} = e^{-\frac{t}{\tau}}}$ où $\tau$ est une constante.




On retrouve le même type de comportement décroissant que dans le cas des circuits RC et RL.

Ainsi en régime pseudopériodique on a démontré que :

- τ se lit sur le graphe comme l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote correspondant à la valeur finale.
- On utilise souvent le critère 3 τ, durée nécessaire pour que le terme exponentiel ait diminué de 95 % par rapport à sa valeur initiale.
- Dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti (en régime pseudo-périodique : $\boldsymbol{\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2Q}{\omega_0}}$

**En conséquence, le temps nécessaire à l'immobilisation de la masse est proportionnel au facteur de qualité.**

### d) Décrément logarithmique

On définit une grandeur permettant de mesurer la rapidité de la décroissance exponentielle de l'amplitude : il s'agit du décrément logarithmique. Pour cela, on considère deux instants successifs pour lesquels l'amplitude passe par un maximum, c'est-à-dire pour lesquels $cos\,(\omega t + \varphi) = 1$. Il s'agit de deux instants séparés par une pseudopériode.

Ainsi :

$$\delta = \mathrm{Ln}\left(\frac{u(t+nT)}{u(t+(n+1)T)}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{T}}}\right) = \alpha \mathrm{T} = \frac{\omega_0}{2Q}.\frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{\pi}{\mathrm{Q}}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{Q}^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Plus Q est grand, et moins est rapide la décroissance de l'exponentielle.

## III-3) Régime apériodique : $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$

### a) Solutions

Les deux racines réelles de l'équation caractéristique, notées $r_1$ et $r_2$, sont telles que :

$$r_{12} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1} = -\alpha \pm \omega$$

La solution s'écrit alors :

$$u(t) = Ae^{(-\alpha-\omega)t} + Be^{(-\alpha+\omega)t}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{u(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(Ae^{-\omega t} + \mathrm{B}e^{+\omega t})}$$

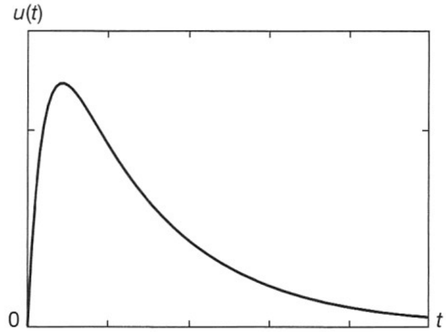
- La solution tend vers 0 à l'infini,
- Les conditions initiales imposent la valeur initiale ainsi que la pente initiale des courbes.
- Il n'y a pas d'oscillations mais uniquement des combinaisons linéaires d'exponentielles décroissantes.

**L'absence d'oscillations donne le nom d'apériodique à ce régime caractérisé par l'absence de phénomènes périodiques**.

b) Interprétation physique

Cette fois-ci, il n'y a pas des oscillations, mais seulement à un retour simple de la masse vers sa position d'équilibre. C'est le régime apériodique.

L'allure de la position u(t) est celle indiquée sur la figure. Au bout d'un temps assez long, la masse finit par s'immobiliser sur sa position d'équilibre.




On vérifie bien que la courbe de la figure correspond aux conditions initiales voulues. À t=0, la masse est sur la position d'équilibre, et sa vitesse initiale est donnée par la pente de la courbe à l'origine qui est bien positive. La masse est donc lancée vers la droite. Elle part dans cette direction puis revient vers sa position d'équilibre sans osciller : on retiendra qu'un régime apériodique présente au plus un extremum.

### c) Durée du régime apériodique

Nommons $r_2$ la plus petite racine de l'équation caractéristique. Alors, pour des valeurs du temps suffisamment élevées, l'une des deux exponentielles devient négligeable par rapport à l'autre :
exp $(r_2t)$ « exp $(r_1t)$ pour $r2 < r1 < 0$.

Par conséquent, aux temps assez élevés :

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}}(Ae^{-\omega t} + \mathrm{B}e^{+\omega t}) \sim \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}}(\mathrm{B}e^{+\omega t})$$

Au final, posons : $\mathbf{h(t) = e^{-(\alpha-\omega)t} = e^{-\frac{t}{\tau}}}$
où τ est une constante, alors :

$$\tau = \frac{1}{\alpha - \omega} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} = \frac{2Q}{\omega_0 - \omega_0\sqrt{1 - 4Q^2}}$$

$$= \frac{2Q}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}} = \frac{2Q}{\omega_0} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{4Q^2}$$

$$= \frac{1}{2Q\omega_0}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

Comme Q est petit dans le cas de ce régime on aboutit à $\tau_a \sim \frac{1}{2Q\omega_0}$.

## III-4) Régime critique : $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$

### a) Solutions

La racine réelle double s'écrit : es deux racines réelles de l'équation caractéristique, notées $r_1$ et $r_2$, sont telles que :

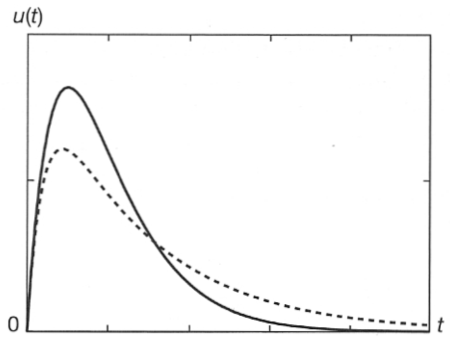
$$r_{12} = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\alpha$$

La solution s'écrit alors :

$$u(t) = (At + B)e^{-\alpha t}$$

On retrouve au premier abord les mêmes propriétés que le régime apériodique :

- La solution tend vers 0 à l'infini,
- Les conditions initiales imposent la valeur initiale ainsi que la pente initiale des courbes.
- Il n'y a pas d'oscillations.



### b) Durée du régime critique

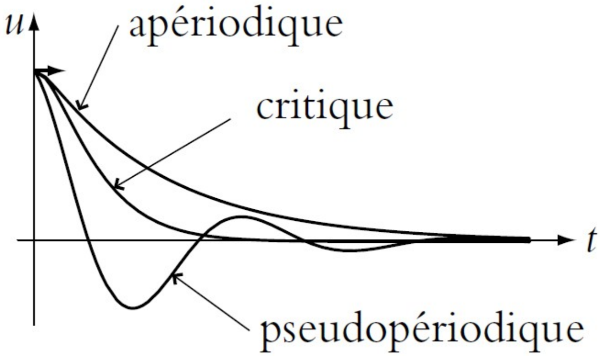
Dans l'expression précédente, la durée pendant laquelle le mouvement reste notable est liée au comportement de l'exponentielle.

On peut poser : $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2Q}{\omega_0}$

Comme $Q_C = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega_0}$

## III-5) Conclusion

On peut rassembler les résultats sur le graphique suivant :




Les trois régimes évoqués précédemment sont génériquement nommés régimes transitoires. Ils ont lieu pendant une durée finie précédant l'immobilisation totale de la masse. Ainsi, un régime transitoire est un type de fonctionnement ne durant qu'un certain laps de temps et précédant plus généralement un régime dit permanent, qui lui va durer indéfiniment.

Suivant les valeurs du facteur de qualité Q, la durée de l'évolution peut-être caractérisé par τ :

- $\tau_c = \frac{1}{\omega_0}$
- $\tau_p = \frac{2Q_p}{\omega_0}$
- $\tau_a = \frac{1}{2Q\omega_0}$

Vu les valeurs de Q :

- **le régime critique est le régime de durée minimale**