III-3 LENTILLES MINCES

Dans ce chapitre, on va étudier :

- Les lentilles minces afin de mieux comprendre les instruments d’optique.

I – Constitution

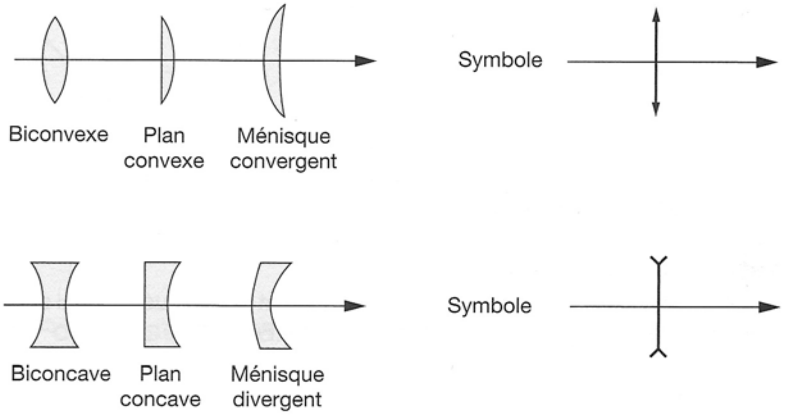
I-1) Lentilles minces

Une lentille mince est constituée d'un milieu transparent, du verre généralement, délimité par deux dioptres sphériques dont les centres sont situés sur l'axe de révolution Δ. On ne s'intéresse ici qu'au **modèle de lentilles dont l'épaisseur au niveau de l'axe est petite devant les rayons de courbure des faces, on parle de lentilles minces.**

I-2) Lentilles à bords minces ou épais

On distingue les lentilles à bords minces des lentilles à bord épais dont les propriétés sont très différentes, comme le montre la suite de l'étude. Pour chacune de ces catégories, on adopte alors un symbole composé d'un segment orthogonal à Δ, terminé par deux points de flèches pointant :

- Vers l'extérieur si la lentille mince est à bords minces ;
- Vers l'intérieur, s'il s'agit d'une lentille mince à bords épais.



I-3) Centre de la lentille

a) Modélisation

On note S_1 et S_2 les deux sommets des faces de la lentille situés sur l'axe Δ. Dans le modèle de lentille mince, ces sommets sont confondus : $S_1 = S_2$. On appelle centre optique O le point ainsi défini. Dans les représentations schématiques, le symbole de la lentille est placé en un point de l'axe Δ, qui correspond au centre optique.

b) Rayon passant par O

Un rayon lumineux incident rencontrant une lentille mince au niveau du centre optique subit deux réfractions par des dioptres assimilables à des plans perpendiculaires à l'axe. En effet, les plans tangents aux faces de lentille au niveau des sommets sont parallèles entre eux et constituent donc une lame de verre à faces parallèles. Le rayon émergent a donc même direction que le rayon incident et, dans le modèle de lentille mince, on néglige le décalage car $S_1 = S_2$.

Le rayon passant par le centre optique d'une lentille mince n'est pas dévié.

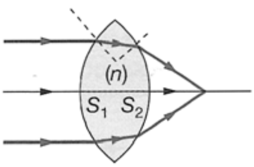
II – Foyers d'une lentille

II-1) Lentille convergente (à bords minces)

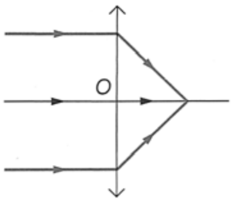
Pour distinguer une lentille d'une autre, on considère la marche d'un rayon incident parallèle à l'axe.

Le rayon est proche de Δ pour être paraxial, mais pas confondu avec lui.

Si la lentille est à bords minces, le rayon lumineux rencontre l'axe Δ après traversée de la lentille.



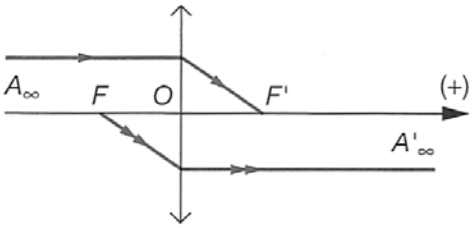
de schéma équivalent : ($S_1, S_2 \rightarrow O$).



Le point F' d'intersection du rayon émergent avec l'axe est identique pour tous les rayons incidents parallèles à l'axe. Cette propriété découle du stigmatisme approché, obtenu dans les conditions de Gauss : en effet, F' est le conjugué d'un point A, situé à l'infini sur l'axe A.

On appelle foyer image le point F' conjugué d'un point objet situé à l'infini sur l'axe. Il est réel dans le cas d'une lentille à bords minces.

Une lentille à bords minces possède un foyer image réel, elle est dite convergente.

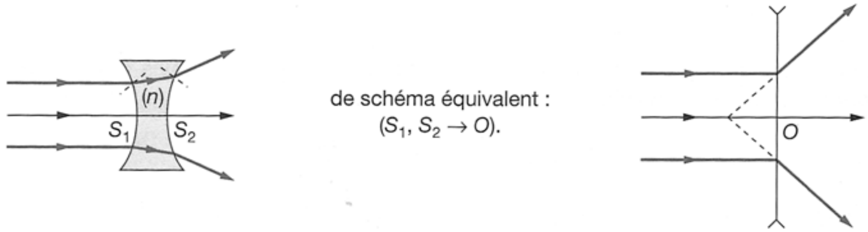


Si on considère un rayon incident passant par le point F, symétrique de F' par rapport au centre optique O, le rayon émergent est parallèle à l'axe optique. F se révèle donc conjugué avec un point image A', situé à l'infini sur l'axe : F est le foyer objet de la lentille.

Le point F, symétrique du point F' par rapport à la lentille, est le foyer objet. Il est réel pour une lentille convergente.

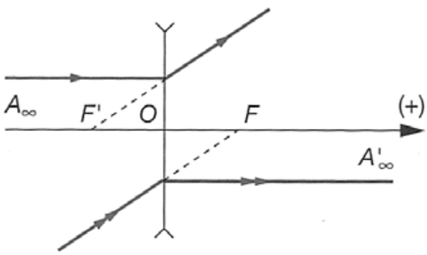
II-2) Lentille divergente (à bords épais)

Dans le cas d'une lentille à bords épais, un faisceau de lumière incident parallèle à l'axe donne un faisceau émergent qui diverge.



On peut tout de même définir un foyer image F', qui s'avère être virtuel.

De même, le foyer objet *F,* conjugué d'un point *A',* situé à l'infini sur l'axe optique, se révèle être virtuel.



Une lentille à bords épais est divergente, ses foyers objet et image sont virtuels.

II-3) Distances focales

La position des foyers d'une lentille est ainsi définie par :

- La distance focale image de la lentille : $f' = \overline{OF'}$;
- La distance focale objet : $\overline{OF} = -f'$

Une lentille convergente a une distance focale image positive, une lentille divergente a une distance focale image négative.

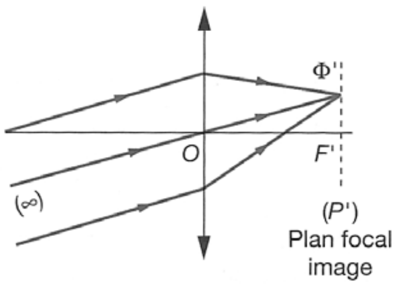
II-4) Foyers secondaires

Tant que les conditions de Gauss sont respectées, la propriété d'aplanétisme approché est applicable. Elle montre que les plans orthogonaux à l'axe optique passant par un foyer sont les conjugués de plans situés à l'infini.

a) Foyers images secondaires

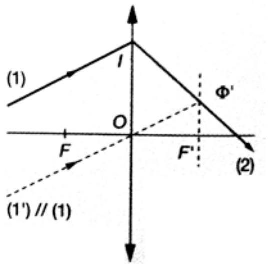
Un point à l'infini sur l'axe est conjugué du foyer image F', donc les points objets situés à l'infini hors de l'axe ont leur image dans le plan orthogonal à l'axe passant par F', que l'on appelle plan focal image (P').

Ainsi, des rayons incidents parallèles entre eux et inclinés par rapport à l'axe optique (Fig. 25) convergent en un même point (Φ' du plan focal image (P'). Φ' est un foyer image secondaire.



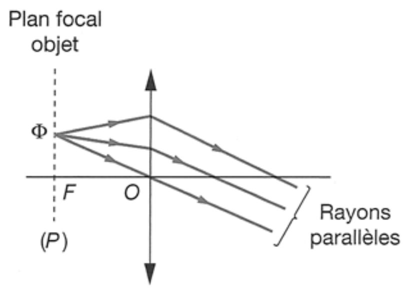
Les points conjugués d'objets à l'infini sont situés dans le plan focal image, on les appelle foyers secondaires.

Pour tracer la marche d'un rayon (1) incliné par rapport à l'axe (Fig. 26), on cherche la position de Φ' qui lui correspond. On construit alors le rayon (1'), parallèle au rayon incident, qui passe par le centre optique. (1') n'est pas dévié et les émergents se coupent dans le plan focal image.



b) Foyers objets secondaires

On appelle de même plan focal objet (P) le plan orthogonal à Δ passant par le foyer F. Les points Φ de (P) sont les conjugués de points situés à l'infini hors de l'axe. Les rayons issus de Φ émergent sont donc tous parallèles entre eux, on en trouve la direction en traçant le rayon passant par le centre optique O.

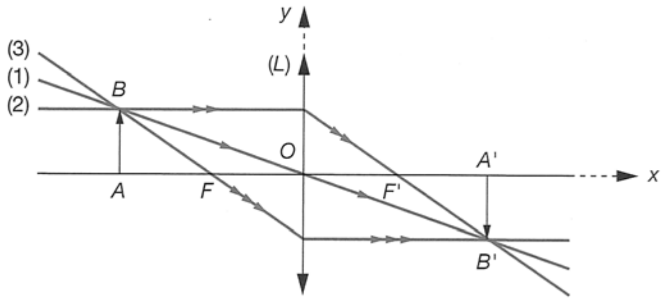


III – Construction d'une image

III-1) Lentille convergente

On considère un objet AB perpendiculaire à l'axe, situé devant une lentille convergente en amont du foyer. On construit l'image A'B' en exploitant les propriétés d'aplanétisme : A'B' est nécessairement perpendiculaire à A. Deux rayons issus de B, parmi les 3 suivants, permettent de déterminer géométriquement la position de B' :

- Le rayon passant par le centre optique sans être dévié;
- Le rayon incident parallèle à l'axe, dont l'émergent passe par F';
- Le rayon passant par F, dont l'émergent est parallèle à A.



L'image obtenue est réelle et renversée, c'est-à-dire que son sens est contraire de celui de l'objet.

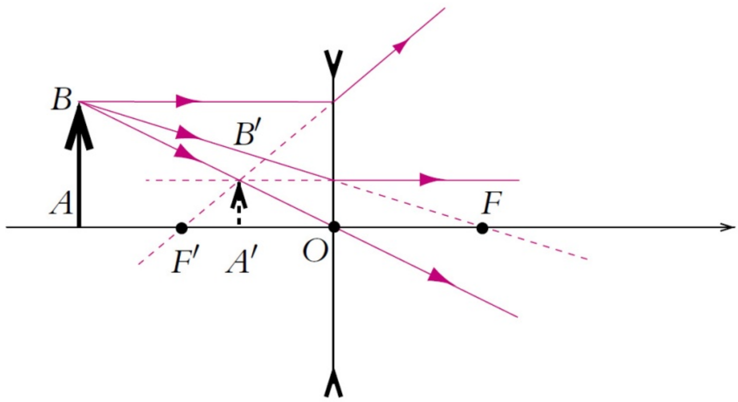
Un objet réel situé en amont du foyer objet d'une lentille convergente donne une image réelle renversée.

Dans toute la suite du cours on prendra comme sens positif :

- **Les sens Ox et Oy de la figure**
- **Le sens trigonométrique pour les angles**

III-2) Lentille divergente

Les mêmes méthodes de construction sont utilisables pour une lentille divergente. Dans le cas d'un objet réel, les tracés du rayon passant par le centre optique et du rayon incident parallèle à l'axe et passant par B définissent B'. On constate que A'B' est situé devant la lentille : l'image est virtuelle.



IV – Relations de conjugaison

IV-1) Relation de Descartes

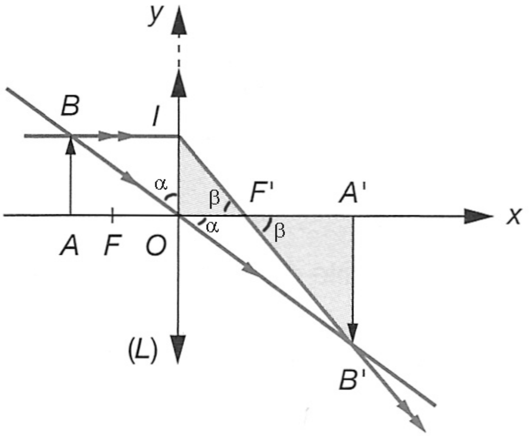
Les constructions géométriques d'objets et d'images à l'aide de rayons remarquables mettent en jeu des triangles, dont on peut exploiter les propriétés pour déterminer :

- la relation entre les abscisses de points conjugués : on parle de relation de conjugaison ;
- le rapport des tailles de l'objet et de l'image : définit ainsi le grandissement algébrique :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Les quantités AB et A'B' ayant un signe obtenu en orientant l'axe Oy perpendiculaire à l'axe.

On raisonne ici dans le cas particulier d'une lentille convergente formant une image réelle d'un objet réel, mais les relations obtenues sont en réalité valables dans tous les cas, du moment qu'on fait intervenir des valeurs algébriques.



D'après le théorème de Thalès dans les triangles OAB et OA'B', ou à l'aide de la définition de la tangente on a :

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BI}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{B'A'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{B'A'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} : \textit{formule du grandissement}}$$

De même :

$$\tan(\beta) = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{F'A'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{F'A'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{\mathrm{F'O}} + \overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OF'}}} = 1 - \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OF'}}}$$

$$\textit{On divise par } \overline{OA'} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OF'}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{OA'}}} - \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{OA}}} = \frac{\mathbf{1}}{\overline{\mathbf{OF'}}}$$

Si on pose $p = \overline{OA}\ et\ p' = \overline{OA'}$ alors :

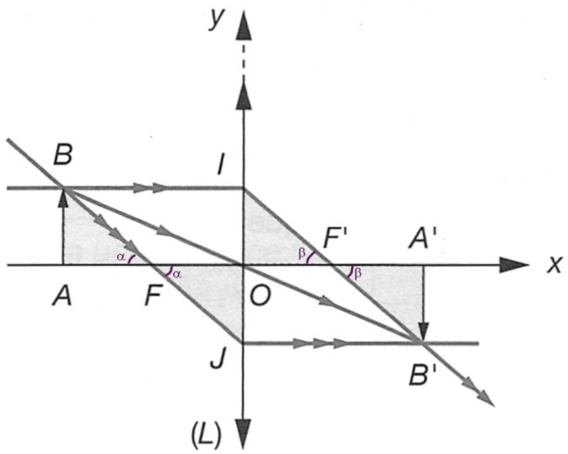
$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p'}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'}}$$

La quantité 1/f' joue un rôle remarquable dans la formule de conjugaison : on appelle vergence d'une lentille l'inverse de la distance focale image : $v = \frac{1}{f'}$
Elle s'exprime en m^{-1} ou dioptrie δ.

IV-2) Relation de Newton

Dans certaines situations, c'est la position de l'objet et de l'image par rapport aux foyers qu'il est plus intéressant de faire intervenir (on en verra des exemples dans l'étude d'un appareil photographique). Dans ce cas, on peut utiliser une formule de conjugaison mettant en jeu les distances algébriques $= \overline{FA}\ et\ \sigma = \overline{F'A\,'}$.

Une construction mettant en jeu les 3 rayons usuels permet d'accéder simplement à la relation :



$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{JO}}{\overline{\mathrm{FO}}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{\mathrm{FO}}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma} = \frac{\overline{\boldsymbol{A'B'}}}{\overline{\boldsymbol{AB}}} = \frac{\overline{\mathbf{FO}}}{\overline{\mathbf{FA}}}$$

$$\text{et } \tan(\beta) = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{\mathrm{F'A'}}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{\mathrm{F'A'}}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma} = \frac{\overline{\boldsymbol{A'B'}}}{\overline{\boldsymbol{AB}}} = \frac{\overline{\mathbf{F'A'}}}{\overline{\mathbf{F'O}}}$$

$$D'o\text{ù} : \frac{\overline{\mathrm{FO}}}{\overline{\mathrm{FA}}} = \frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{\overline{\mathrm{F'O}}} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{F'A'}}.\overline{\mathbf{FA}} = \overline{\mathbf{FO}}.\overline{\mathbf{F'O}} = -\mathbf{f'^2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma\sigma'} = -\mathbf{f'^2}$$

IV-3) Association de lentilles accolées

On considère deux lentilles minces accolées (Fig. 6), c'est-à-dire de même axe et de position suffisamment voisines pour qu'on puisse confondre leurs centres optiques : $O_1=O_2$.

Ces deux lentilles peuvent être de même nature (toutes deux convergentes ou divergentes) ou de natures différentes, comme représenté sur la figure. On note V_1 et V_2 leur vergence. La question posée est la détermination de la nature du système équivalent.

Pour un objet situé sur l'axe en A, on peut définir son image A_1 par L_1, puis l'image A' donnée par L_2 de ce point. L'association conjugue *A* et *A' :*

$$A \overset{L_1}{\rightarrow} A_1 \overset{L_2}{\rightarrow} A'$$

L'emploi de la relation de conjugaison avec origine au centre optique est opportun, compte tenu de la confusion des centres :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OF'}_1}} \text{ et } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OF'}_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OF'}_2}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{OF'}_1}}$$

Cette relation est identique à celle d'une lentille mince :
de centre optique 0 ; de vergence égale à la somme des vergences des deux lentilles : $V = V_1 + V_2$

L'association de deux lentilles minces accolées est équivalente à une lentille mince. Les vergences s'ajoutent algébriquement.

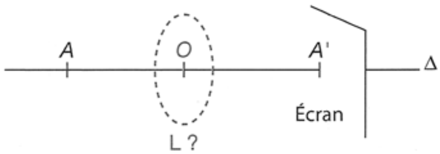
V - Relations de Bessel

V-1) Objet et image réels par une lentille convergente

Dans l'étude du projecteur idéal, le problème évoqué met en jeu un objet réel et une image réelle, conjugués par un système optique. La projection d'image sur un écran est un problème courant et on se propose d'étudier la réalisation du système optique par une lentille.

On considère donc un objet situé au point A, sur l'axe Δ perpendiculaire à un écran. Soit A' le point de l'axe situé sur l'écran, on désire placer une lentille (L) entre A et A' qui conjugue ces points. La distance D séparant l'objet de l'écran est une donnée du problème.

D'après les constatations faites pour les lentilles divergentes (image virtuelle associée à un objet réel), la nécessité d'obtenir ici une image réelle, pour un objet réel, impose d'utiliser une lentille convergente.



En adoptant les notations définies dans la relation de Descartes, $p = \overline{OA}\ et\ p' = \overline{OA'}$, on obtient deux équations :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}\ et\ D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = p' - p$$

D'où en combinant ces deux équations :

$$\frac{1}{p+D} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{p-(p+D)}{(p+D)p} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{-D}{p^2+pD} = \frac{1}{f'}$$
$$\Leftrightarrow -Df' - p^2 - pD = 0 \Leftrightarrow p^2 + pD + Df' = 0$$

Cette équation n'admet de solutions réelles que pour Δ>0

$$D^2 - 4Df' > 0$$

Pour former l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente il faut remplir la condition : $\boldsymbol{D > 4f'}$

V-2) Méthode de Silbermann : D=4f’

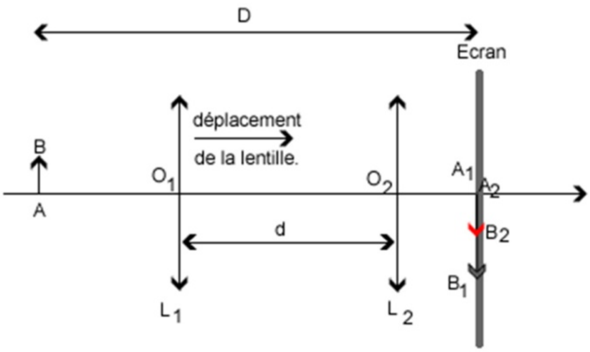
Dans le cas particuliers D=4f’, la racine est unique telle que :

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{D}{2} \Rightarrow p^{'} = \frac{D}{2}$$

Ce cas particuliers permet de calculer f’ par la méthode de Silbermann

V-3) Méthode de Bessel : D>4f’

Dans ce cas il existe deux racines et donc deux positions possibles de la lentille :



$$p = -\frac{D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{D}}{2}\right)^2 - \mathrm{Df'}}$$

Chacune de ces solutions correspond bien à une valeur de p' positive (image réelle) et inférieure à D (objet réel). Elles conviennent donc toutes les deux.

En outre, la demi-somme étant $\frac{D}{2}$ les deux positions sont symétriques par rapport au milieu du segment [AA’]. La loi du retour inverse de la lumière établit cette propriété de symétrie.

L'étude de ces deux positions est utilisée dans la méthode de Bessel pour déterminer f'.

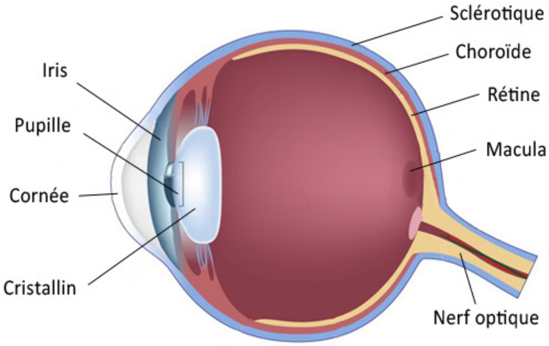
VI – L'œil

VI-1) Anatomie non exhaustive de l'œil

L'œil est un globe pratiquement sphérique. La choroïde le transforme en chambre noire diaphragmée par l'iris. L'ouverture ou diamètre de ce diaphragme (la pupille) peut varier de 2 mm en pleine lumière à 8 mm dans l'obscurité.

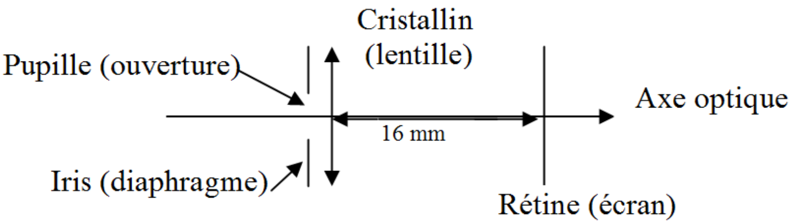
Le cristallin, lentille convergente biconvexe, forme l'image de l'objet observé sur la rétine. La rétine contient des cellules visuelles sensibles à la lumière qui transmettent l'information au cerveau via le nerf optique :

- Les cônes permettent de voir les couleurs quand la lumière est vive
- Les bâtonnets permettent d'assurer la vision en noir et blanc ou aux faibles niveaux d'éclairement.



VI-2) Modélisation

D’un point de vue optique, l’œil se modélise grâce à une lentille mince convergente (le cristallin) diaphragmée (iris) et d'un écran (la rétine). La distance lentille-écran est de l’ordre de 16 mm environ.



VI-3) Accommodation

Au repos, un œil emmétrope (œil exempt de défauts), voit net des objets situés à l’infini. Le foyer principal image du cristallin F’ se trouve alors sur la rétine. On dit que l’œil n'accommode pas. Si l’objet se rapproche, le cristallin va se déformer sous l’action des muscles ciliaires et sa distance focale va diminuer : on dit que l’œil accommode. En effet, il faut toujours que l’image d’un objet se forme sur la rétine.

Le cristallin ne peut se déformer que dans certaines limites qui dépendent beaucoup de l’âge. **L’œil ne peut donc voir nettement que les objets situés entre deux positions limites appelées punctum remotum (P.R.) et punctum proximum (P.P.)** :

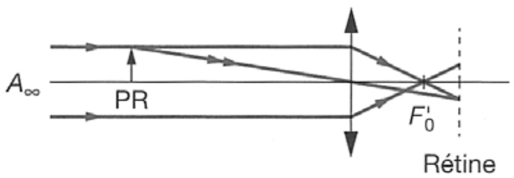
- **Le P.R. est le point le plus éloigné vu net par un œil au repos. Pour un œil normal il est situé à l'infini.**
- **Le P.P. est le point le plus proche vu net par l'œil qui accommode. Pour un œil normal il est situé à 25cm environ.**

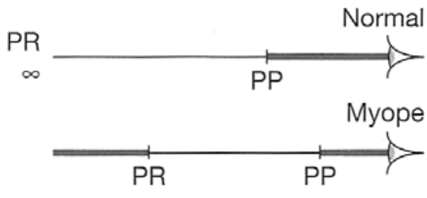
VI-4) Résolution angulaire (ou Pouvoir de résolution)

La résolution angulaire de l'œil est d'environ une minute d'arc (**1/60 soit 0,017°**). Cela correspond à un détail d'environ 1 mm pour un objet ou une image situé à 3 m de distance.

VI-5) Les défauts de l'oeil

a) la myopie

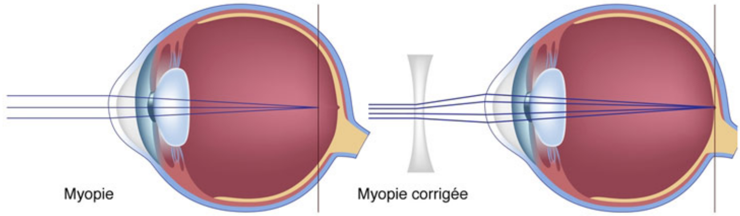




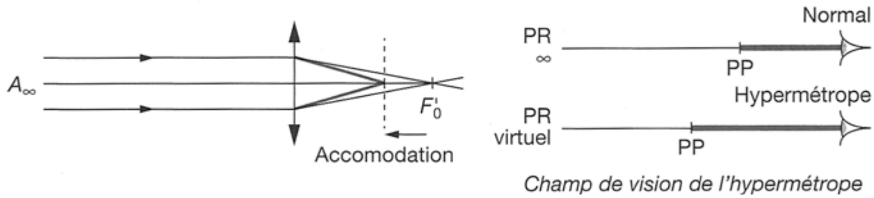
Champ de vision du myope

Le cristallin de l'œil myope est trop convergent ou le globe oculaire est trop allongé. L'image d'un point situé à l'infini se forme en avant de la rétine. L'œil myope ne peut donc pas voir nettement des objets éloignés. Son P.R. est beaucoup plus près de la pupille, à moins de 1 m parfois. Son P.P. est à quelques cm.

Pour corriger la myopie, il faut rendre l'œil moins convergent et donc placer une lentille divergente.



b) L'hypermétropie



Contrairement à l'œil myope, l'œil hypermétrope n'est pas assez convergent. L'image d'un objet placé à l'infini se forme derrière la rétine. L'hypermétrope doit accommoder pour voir à l'infini et son P.P. est plus éloigné que la normale. Il ne peut donc voir nettement un objet sans accommoder.

Pour corriger l'hypermétropie, il faut rendre l'œil plus convergent et donc placer une lentille convergente.