

II-2 SUPERPOSITION DE DEUX ONDES

Dans ce chapitre, on va étudier :

- Les phénomènes de superposition de deux ondes : ondes stationnaires, interférences et battements

I – Ondes stationnaires

I-1) Situation physique

Intéressons nous à une corde dont les extrémités sont fixées (corde de ukulélé). Sur cette corde on engendre une onde progressive sinusoïdale d'amplitude y_0 se propageant selon \vec{u}_x . A l'arrivée à l'extrémité de droite l'onde se réfléchit donnant naissance à une onde se propageant selon $-\vec{u}_x$.

D'où :

$$y(x, t)\vec{u}_x = y_1(x, t)\vec{u}_x + y_2(x, t)\vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow y(x, t) = y_0 \cos(\omega t - kx) - y'_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

I-2) Onde résultante

Les conditions limites sont que la corde est fixée par conséquent :

$$y(0, t) = y_0 \cos(\omega t) - y'_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (1)$$

$$y(L, t) = y_0 \cos(\omega t - kL) - y'_0 \cos(\omega t + kL + \varphi) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ et } y_0 = y'_0$$

D'où :

$$\Leftrightarrow y(x, t) = y_0 \cos(\omega t - kx) - y_0 \cos(\omega t + kx)$$

$$\Leftrightarrow y(x, t) = y_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]$$

$$\text{Or } \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$D'où y(x, t) = -2y_0 [\sin(-2kx) \sin(2\omega t)]$$

$$\Leftrightarrow y(x, t) = 2y_0 \sin(2kx) \sin(2\omega t)$$

$$(2) \Rightarrow y(L, t) = 2y_0 \sin(2kL) \sin(2\omega t) \forall t$$

Or y_0 différent de 0 car sinon l'onde est nulle, et ceci devant être vérifié pour tout t on a donc :

$$kL = n\pi \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{L} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

Donc :

$$y(x, t) = 2y_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right)$$

I-3) Modes propres

L'onde résultante obtenue est appelée onde stationnaire. On remarque :

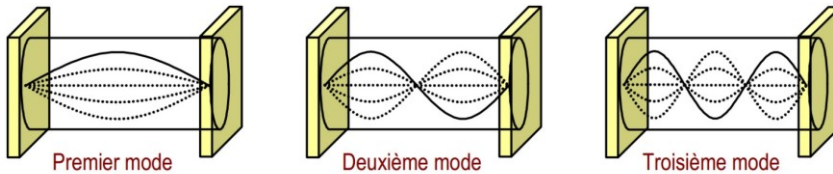
- Qu'il y a quantification des solutions
- Que les variables spatiales et temporelles sont indépendantes

Les différentes valeurs de n de l'onde stationnaire sont appelés modes propres.

Dans le mode 1, mode fondamental, les extrémités $x=0$ et $x=L$ ne vibrent jamais ce sont les nœuds de vibration. Par contre le milieu de la corde $x=L/2$ vibre à chaque instant avec une amplitude maximale : c'est un ventre de vibration.

Dans les modes suivants, harmoniques on remarque qu'il y a n ventres de vibration et $n+1$ nœuds équitablement répartis.

L'écart entre deux ventres représente une demi période spatiale.



(Longueur multiple de $\lambda / 2$)

On a donc $L = n \frac{\lambda_n}{2} = n \frac{c}{2f_n} \Leftrightarrow f_n = n \frac{c}{2L}$ où f est la fréquence du mode n .

I-4) Interférences constructives et destructives

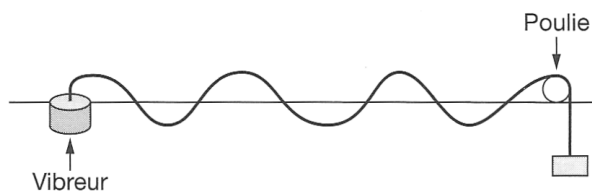
Notons les deux ondes :

$$y_1(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ et } y_2(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

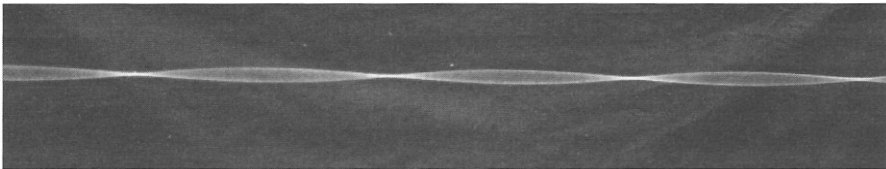
Ainsi l'amplitude sera maximale lorsque $\varphi_1 = \varphi_2 + 2p\pi$: on a affaire à un ventre, on parle d'interférences constructives

Ainsi l'amplitude sera nulle lorsque $\varphi_1 = \pi + \varphi_2 + 2p\pi$: on a affaire à un nœud on parle d'interférences destructives

I-5) Corde de Melde

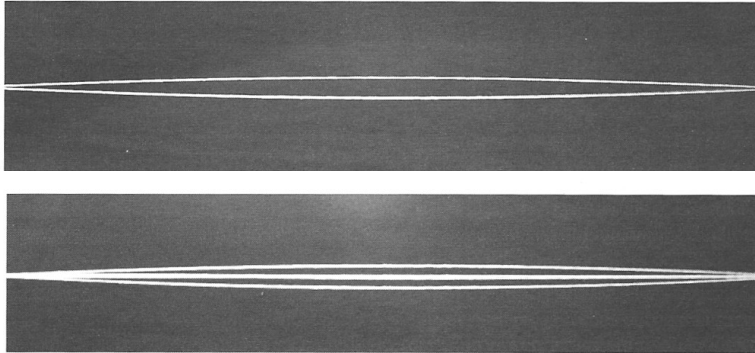


Les modes propres d'une corde fixée aux deux extrémités s'observent très simplement. Afin de pallier les pertes énergétiques, l'une des extrémités est en fait excitée par un vibreur et l'autre reliée à une masse au travers d'une poulie. On admettra que cette manière de procéder conduit à des modes propres similaires à ceux étudiés au paragraphe précédent. Ainsi, si la fréquence du vibreur correspond à celle d'un mode propre f_n la corde est le siège du mode propre n comme on peut le constater sur la figure. Comme la période de vibration est largement inférieure au temps de pause de la photographie, toutes les positions de la corde apparaissent sur la photographie.



Il est possible d'améliorer le dispositif en l'éclairant avec un stroboscope. Un stroboscope est un appareil émettant des flashes lumineux de manière périodique. Ainsi, si la fréquence du stroboscope est égale à celle de vibration de la corde, celle-ci semble être immobile et a donc une forme sinusoïdale. De manière plus intéressante, si la fréquence du stroboscope est deux fois plus élevée que celle de la corde, deux images de la corde symétriques par rapport à l'horizontale sont éclairées et visibles, comme sur la figure. Un autre exemple où la fréquence du stroboscope est quatre fois plus élevée que celle de la corde est indiqué sur la figure. La corde est alors éclairée quatre fois par période : une fois pour chaque élongation maximale de part et

d'autre, et deux lorsque la corde est horizontale, ce qui donne trois images distinctes de corde.



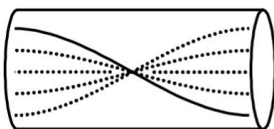
I-6) Tube sonore

Dans les tubes sonores on démontre que :

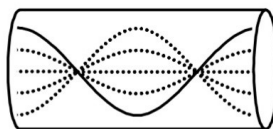
Au contact avec une ouverture (réflexion molle), la pression acoustique est nulle : on a affaire à un nœud de vibration.

Au contact avec une paroi (réflexion dure), la pression acoustique présente un ventre de vibration

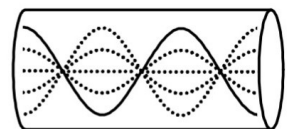
Ainsi dans le tube de Kundt qui est un tube que l'on peut utiliser en différents modes on aura pour la pression dans le cas fermé/fermé :



Premier mode



Deuxième mode



Troisième mode

(Longueur multiple de $\lambda / 2$)

II – Interférences

II-1) Approche expérimentale

a) Définition

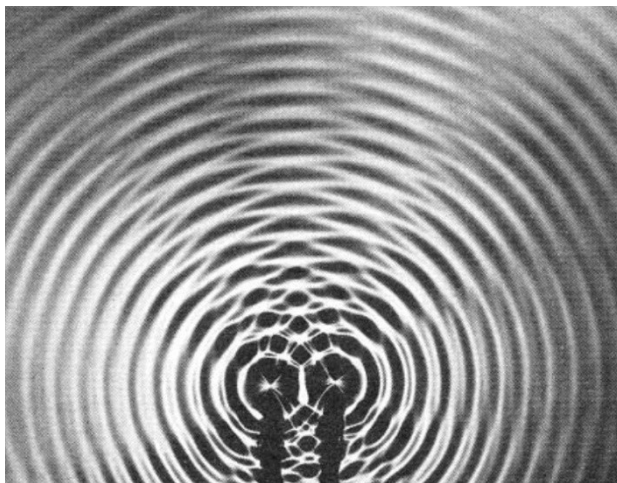
On appelle interférences le phénomène par lequel la superposition de plusieurs ondes produit localement une intensité qui est différente de la somme des intensités individuelles.

Si l'intensité résultante est supérieure, on parle d'interférences constructives et dans le cas contraire d'interférences destructives.

On observera le phénomène d'interférences en optique, en acoustique et avec la cuve à onde.

b) Cuve à ondes

Le dispositif de la cuve à ondes permet de générer et de visualiser des ondes à la surface de l'eau. On peut ainsi mettre en évidence des interférences à deux ondes avec des sources ponctuelles comme le montre la figure ci-contre :

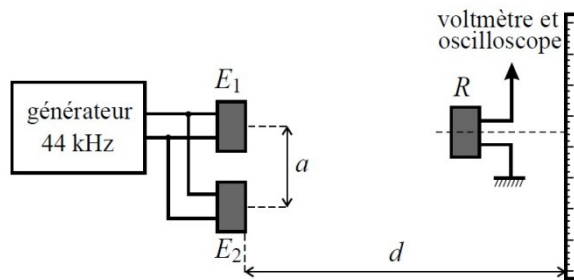


On remarque qu'il y a principalement deux zones :

- Les zones d'interférences constructives qui correspondent à la somme de deux maxima ou de deux minima
- Les zones d'interférences destructives qui correspondent à la somme d'un maxima avec un minima.

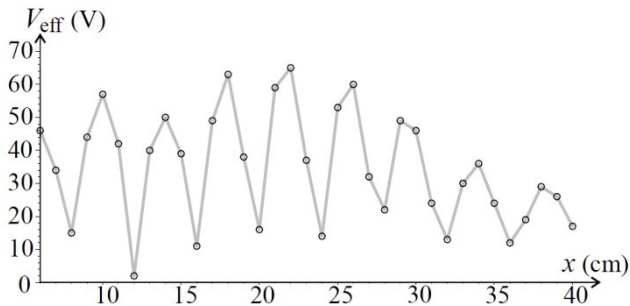
c) Ondes acoustiques

On branche deux émetteurs d'ultrasons E_1 et E_2 sur le même générateur de signaux de fréquence $f = 44 \text{ kHz}$. Les deux émetteurs sont à distance de $a = 9 \text{ cm}$ l'un de l'autre. On place un récepteur d'ultrasons R face à E_1 et E_2 à une distance $d = 50 \text{ cm}$ d'eux. Le signal délivré par R est envoyé sur un oscilloscope. Lorsqu'on déplace R parallèlement à la droite reliant les deux émetteurs, l'amplitude du signal sinusoïdal observé sur l'oscilloscope varie.



Expérience pour l'observation des interférences d'ondes ultrasonores.

Sur la figure, on voit la courbe donnant V_{eff} en fonction de la position x du récepteur mesurée le long d'une règle. On observe une variation alternée de l'amplitude du signal qui est caractéristique du phénomène d'interférences.



Valeur efficace en fonction de la position du récepteur R .

d) Conclusion

La possibilité de réaliser des interférences est caractéristique de tout phénomène ondulatoire, quelle que soit sa nature. Il convient toutefois de prendre certaines précautions :

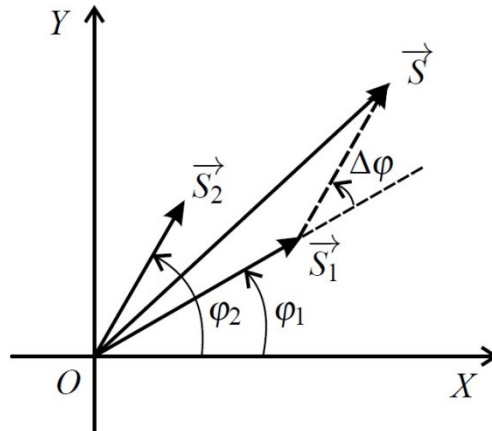
- Il faut disposer de sources synchrones, émettant la même fréquence.
- Les deux ondes superposées peuvent être décrites par un signal sinusoïdal d'amplitudes voisines.

En chaque point M de l'espace, les vibrations s_1 et s_2 se somment tel que :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

II-2) Somme de signaux

a) Méthode de Fresnel



Addition des vecteurs de Fresnel correspondant à deux signaux sinusoïdaux de même fréquence. Les vecteurs sont représentés à l'instant $t = 0$.

On se rappelle que les normes des vecteurs \vec{S}_1 et \vec{S}_2 sont égales aux amplitudes des signaux.

On a représenté aussi le vecteur de Fresnel du signal somme $s(t)$ par \vec{S} tel que :

$$\begin{aligned} S^2 &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Donc :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

b) Contraste

Les amplitudes A_1 et A_2 étant fixées, l'amplitude A est maximale lorsque $\cos\Delta\varphi = 1$ soit lorsque $\Delta\varphi = 2m\pi$ où m est un entier relatif. L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est maximale lorsque les signaux sont en phase.

La valeur maximale de A est :

$$A_{max}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

Ce résultat était prévisible à la vue du schéma précédent.

A est minimale lorsque $\cos\Delta\varphi = -1$ soit lorsque $\Delta\varphi = 2m\pi + \pi$ où m est un entier relatif.

L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est minimale lorsque les signaux sont en opposition de phase.

La valeur minimale de A est :

$$A_{min}^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

Le contraste C est définie par : $C = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{A_1}{A_2}$ si $A_1 > A_2$

Dans le cas où les deux ondes ont des amplitudes égales, les formules deviennent :

$$A_{max}^2 = 4A_1^2, A_{min}^2 = 0 \text{ et } C = 1$$

Ainsi la superposition de deux ondes en opposition de phase peut donner un signal nul. Ceci est utilisé pour les isolations phoniques actives de certains casques. Un dispositif capte le bruit ambiant et envoie dans l'oreille un signal exactement en opposition de phase qui annule ce bruit.

II-3) Phénomènes d'interférences

a) Retour sur l'expérience

Les signaux émis par E_1 et E_2 sont identiques puisqu'ils sont reliés au même générateur et peuvent s'écrire : $s_1(0, t) = s_2(0, t) = A_0 \cos(\omega t)$ en choisissant l'origine des temps pour que la phase initiale de ces signaux soit nulle.

On note d_1 la distance entre E_1 et R et d_2 la distance entre E_2 et R. Si l'émetteur E_1 était seul, R recevrait le signal :

$$s_1(d_1, t) = A_1 \cos(\omega t - kd_1) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

où A_1 est une amplitude inférieure à A_0 (on peut vérifier expérimentalement que cette amplitude est inversement proportionnelle à d_1 – l'onde se répartit sur une surface de plus en plus grande, elle perd de l'amplitude).

De même si E_2 était seul, R recevrait :

$$s_2(d_2, t) = A_2 \cos(\omega t - kd_2) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Ainsi R reçoit les deux signaux qui sont déphasés de :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2)$$

Ce déphasage dépend de $d_1 - d_2$, donc de la position du récepteur par rapport aux deux émetteurs. L'amplitude détectée qui est déterminée par $\Delta\varphi$ selon la formule des interférences en dépend donc aussi.

b) Interférences constructives et destructives

L'amplitude détectée est maximale lorsque les signaux des ondes des deux émetteurs sont en phase. On dit alors qu'il y a interférence constructive. C'est le cas si :

$$\Delta\varphi = 2m\pi \text{ soit } d_1 - d_2 = \frac{2m\pi}{k} = m\lambda$$

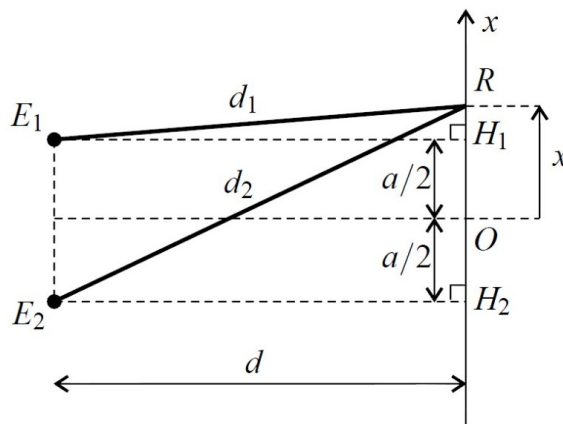
où m est un entier relatif.

L'amplitude du signal détecté est minimale lorsque les signaux des ondes des deux émetteurs sont en opposition de phase. On dit alors qu'il y a interférence destructive. C'est le cas si :

$$\Delta\varphi = 2m\pi + \pi \text{ soit } d_1 - d_2 = \frac{2m\pi + \pi}{k} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

c) Échelle de longueur du phénomène d'interférences

Le calcul suivant permet de déterminer une distance caractéristique du phénomène d'interférences et de faire une vérification quantitative de l'interprétation théorique précédente.



Calcul de $d_2 - d_1$.

On peut écrire :

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) \simeq 2d(d_2 - d_1)$$

En faisant l'approximation $d_1 + d_2 \simeq 2d$ qui est possible si $d \gg a$ et $d \gg x$. Ces conditions ne sont pas vraiment vérifiées dans l'expérience mais cela n'est pas gênant puisqu'on cherche uniquement l'ordre de grandeur d'une distance caractéristique.

Par ailleurs, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d_2^2 - d_1^2 &= (H_2 R^2 + d^2) - (H_1 R^2 + d^2) = H_2 R^2 - H_1 R^2 \\ &= \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = 2ax \end{aligned}$$

D'où

$$d_2 - d_1 \simeq \frac{ax}{d}$$

On peut maintenant répondre à la question : de combien faut-il déplacer le récepteur pour passer d'une interférence constructive à une interférence destructrice ?

Il faut pour cela que $d_2 - d_1$ varie d'une demi-longueur d'onde, donc il faut déplacer le récepteur de :

$$\Delta x = \frac{\lambda d}{2a}$$

Et on retrouve une interférence constructive à la distance appelée interfrange :

$$i = \frac{\lambda d}{a}$$

En conclusion, dans une expérience d'interférences où les deux sources sont distantes de a , l'échelle de longueur du phénomène d'interférences, sur un axe parallèle à l'axe des sources et éloigné de celui-ci d'une distance d , est :

$$i = \frac{\lambda d}{a}$$

III - Battements

III-1 Superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences voisines

a) Les différentes variables

Dans ce paragraphe on s'intéresse au signal obtenu en faisant la somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquences légèrement différentes f_1 et f_2 . Pour fixer les idées on supposera que $f_2 > f_1$.

On définit la fréquence et la pulsation moyennes par :

$$f_m = \frac{f_1 + f_2}{2} \text{ et } \omega_m = 2\pi f_m$$

Ainsi que les variables de modulation :

$$f_{mod} = \frac{f_2 - f_1}{2} \text{ et } \omega_{mod} = 2\pi f_{mod}$$

On suppose que les fréquences sont très proches d'où :

$$f_m \gg f_{mod} \text{ et } \omega_m \gg \omega_{mod}$$

b) Cas de deux signaux d'amplitudes égales

On considère d'abord le cas où les amplitudes des signaux sont égales. Les signaux s'écrivent dans ce cas :

$$s_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ et } s_2(t) = A \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Or :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} s(t) &= 2A \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \\ &= 2A \cos\left(\omega_m t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega_{\text{mod}} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Si on note $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ et $\varphi_{\text{mod}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ alors :

$$s(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t + \varphi_{\text{mod}}) \cos(\omega_m t + \varphi_m)$$

Le signal $s(t)$ se présente dans la formule comme le produit de deux cosinus de pulsations très différentes. On a $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_m$, donc les périodes correspondantes vérifient $T_{\text{mod}} \gg T_m$. Ainsi, sur une durée de l'ordre de quelques T_m , le terme $2A \cos(\omega_m t + \varphi_m)$, de période T_{mod} , est pratiquement constant et on peut donc considérer qu'il s'agit d'une amplitude qui multiplie $\cos(\omega_m t + \varphi_m)$.

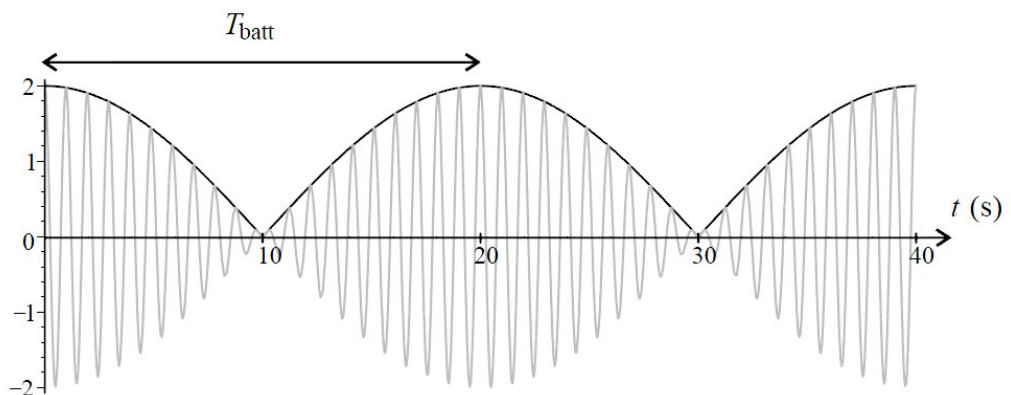
En fait, l'amplitude étant toujours positive, il faut l'écrire :

$$A_{\text{mod}} = |2A \cos(\omega_{\text{mod}} t + \varphi_{\text{mod}})|$$

Elle varie lentement dans le temps. $s(t)$ est un signal modulé en amplitude.

Si on note la période des battements T_{batt} alors :

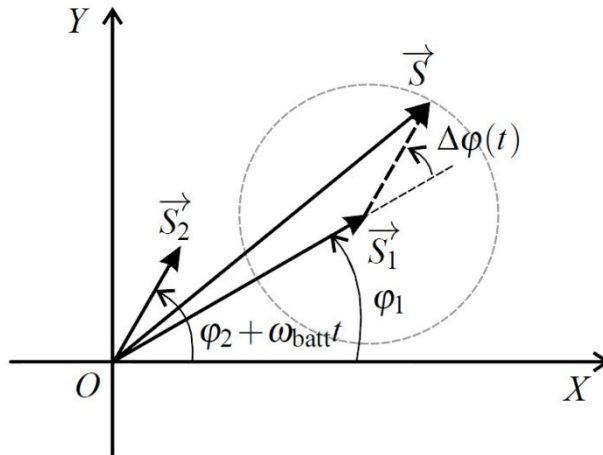
$$T_{\text{batt}} = \frac{1}{2} T_{\text{mod}}$$



Deux signaux sinusoïdaux, de pulsations voisines et d'amplitudes égales, et leur somme.

c) Cas général

Par la méthode de Fresnel, on peut retrouver l'expression de A_{mod}



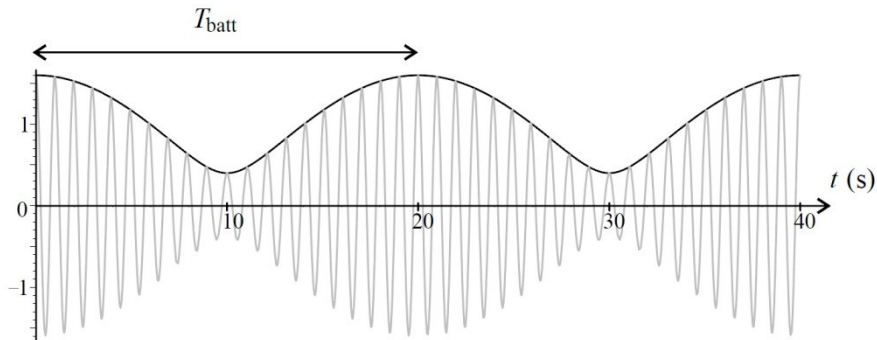
On a représenté aussi le vecteur de Fresnel du signal somme $s(t)$ par \vec{S} tel que :

$$\begin{aligned} S^2 &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2 \cos(\Delta\varphi) \\ \text{où } \Delta\varphi &= (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_{\text{mod}}^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \omega_{\text{bat}}t) \text{ où } \omega_{\text{bat}} \\ &= \omega_2 - \omega_1 \end{aligned}$$

- Représentation graphique



Superposition des signaux $s_1(t) = \cos(2\pi t)$ et $s_2 = 0,6 \cos(2,1\pi t)$.

La superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences f_1 et f_2 voisines donne :

- un signal quasi sinusoïdal dont la fréquence est la moyenne f_m des deux fréquences et dont l'amplitude est modulée dans le temps à la fréquence f_{batt} .
- l'amplitude du signal oscille entre :
 - une valeur maximale $A_1 + A_2$ interférence constructive
 - et une valeur minimale non nulle $A_1 - A_2$: interférence destructive.

C'est le phénomène des battements qui s'observe avec des signaux physiques de toutes natures.