XX-1 Statique des fluides

La statique des fluides est l'étude mécanique des fluides (liquide ou gaz) à l'équilibre. Elle est une introduction à la mécanique des fluides en mouvement qui sera étudiée en deuxième année.

I - Forces volumiques et surfaciques, pression

I-1) Particule ou élément de fluide

En statique des fluides on se place à l'échelle macroscopique : le fluide apparaît comme un milieu continu. Une particule de fluide ou encore élément de fluide est un volume mésoscopique, de dimension très petite devant l'échelle macroscopique à laquelle on se place, mais très grande devant le libre parcours moyen des molécules du fluide. Comme l'élément de fluide contient un très grand nombre de molécules, sa masse dm est proportionnelle à son volume $d\tau$, ce que l'on écrit : $dm = \rho d\tau$
où ρ est la masse volumique qui se mesure en $kg.m^{-3}$.

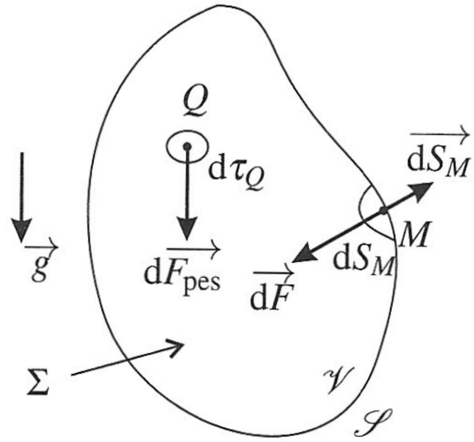
I-2) Forces volumiques et forces surfaciques

a) Forces volumiques

On considère une portion de fluide Σ délimitée par une surface S. On note V le volume de Σ, volume intérieur à la surface S. Quelles sont les forces qui agissent, dans le référentiel terrestre, sur le système Σ ?

Il y a d'abord le poids, force exercée à distance par la Terre sur les toutes molécules de Σ, donc sur tous les éléments de fluide $d\tau$ que l'on peut isoler autour des points Q de Σ. La force de pesanteur sur un élément de fluide de volume $d\tau_Q$ et masse dm_Q est :

$$d\vec{P}(Q) = \overrightarrow{dF_{pes}}(Q) = dm_Q\vec{g} = \rho(Q)\vec{g}d\tau_Q$$



La force de pesanteur est une force volumique, car elle s'exerce sur les éléments de volume. On définit la densité volumique de force de pesanteur $\overrightarrow{f_{pes}}(Q)$ par :

$$\overrightarrow{dF_{pes}}(Q) = \overrightarrow{f_{pes}}(Q)d\tau_{\mathrm{Q}}$$

Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{f_{pes}}(Q) = \rho(Q)\vec{g}$$

La force totale de pesanteur s'exerçant sur le système Σ est la somme des forces élémentaires s'exerçant sur tous les volumes élémentaires, ce que l'on écrit :

$$\overrightarrow{F_{pes}} = \iiint_{Q\in V} \overrightarrow{dF_{pes}}(Q)$$

En utilisant le symbole d'intégrale triple, qui souligne le fait que le point Q décrit un volume donc que ses trois coordonnées varient. Le calcul est ici facile :

$$\overrightarrow{F_{pes}} = \iiint_{Q\in V} \overrightarrow{dF_{pes}}(Q) = \iiint_{Q\in V} dm_Q\vec{g} = m\vec{g}$$

où m est la masse totale du Σ.

b) Forces surfaciques

Il y a aussi les forces exercées sur les molécules les plus proches de la surface S par les molécules situées juste de l'autre côté de S (l'interaction entre les molécules est d'origine électromagnétique et de courte portée). Il s'exerce ainsi une force $\overrightarrow{dF_p}(M)$ sur les molécules très proches d'une surface élémentaire dS_M autour d'un point M de S. $\overrightarrow{dF_p}(M)$ est proportionnelle au nombre de molécules concernées, donc à la surface dS_M, c'est une force surfacique.

Dans le cas où le fluide est au repos, $\overrightarrow{dF_p}(M)$) ne peut qu'être orthogonale à la surface élémentaire dS_M, car il n'y a aucune direction privilégiée autour de la normale à la surface élémentaire. De plus, l'expérience montre que cette force est toujours dirigée vers l'intérieur de Σ.

Pour l'exprimer mathématiquement on a besoin de définir le vecteur surface élémentaire ; Le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{dS_M}$ en un point M de la surface fermée S est le vecteur :

- De norme égale à dS_M,
- Orthogonal en M à la surface S,
- Dirigé vers l'extérieur de S.

On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{dF_p}(M) = -p(M)\overrightarrow{dS_M}$$

où P(M) est, par définition, la pression du fluide en M. La relation a déjà été vue pour la force exercée par le fluide sur une paroi. Ici, il s'agit de la force surfacique exercée sur le fluide de Σ par ce qui se trouve de l'autre côté de S, qui peut être :

- Soit une paroi solide (dans ce cas on retrouve la définition de la thermodynamique),
- Soit du fluide (le fluide extérieur à Σ).

La pression P(M) dépend a priori de la position du point M. En revanche, elle est la même quelle que soit l'orientation du vecteur surface dS_M, parce que, dans le fluide au repos, toutes les directions de l'espace sont équivalentes. La force $\overrightarrow{dF_p}(M)$ est appelée force de pression.

La résultante des forces de pression agissant sur Σ est :

$$\overrightarrow{F_p} = \iint_{M\in S} \overrightarrow{dF_p}(M) = \iint_{M\in S} -p(M)\overrightarrow{dS_M}$$

Dans cette expression, le symbole d'intégrale double souligne le fait que le point M décrit une surface et qu'il a donc deux coordonnées indépendantes qui varient. On verra dans la section 4 comment s'y prendre pour évaluer une intégrale de surface. Dans un premier temps on va s'intéresser à la pression P(M) dans le fluide à l'équilibre.

II - Pression d'un fluide soumis au champ de pesanteur

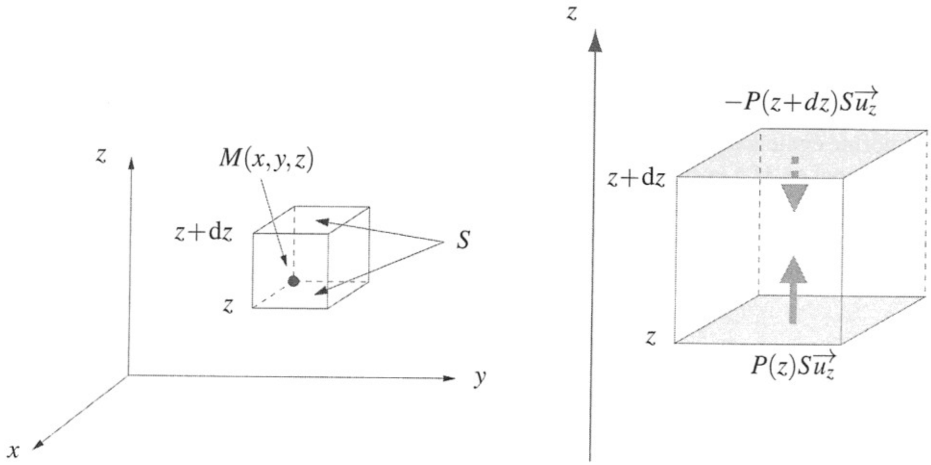
II-1) Condition d'équilibre d'un volume mésoscopique

On considère un fluide de masse volumique ρ, en équilibre mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On isole par l'esprit le fluide contenu dans un volume mésoscopique de forme parallélépipédique, de surface horizontale S, compris entre les plans de cote z et z dz, de volume $d\tau_M = Sdz$ et de masse volumique ρ(M). On étudie l'équilibre de ce volume dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces verticales s'exerçant sur $d\,\tau_M$ sont :

- Le poids : $d\vec{P}(M) = \rho(M)\vec{g}d\tau_{\mathrm{M}} = -\rho(M)gSdz\overrightarrow{u_z}$
- La force de pression s'exerçant sur sa surface inférieure, de cote z :
$$\overrightarrow{dF_p}(z) = p(z)S\overrightarrow{u_z}$$
- La force de pression s'exerçant sur sa surface supérieure, de cote z+ dz :
$$\overrightarrow{dF_p}(z+dz) = -p(z+dz)S\overrightarrow{u_z}$$



Fp (z

La relation fondamentale de la dynamique donne à l'équilibre :
$$d\vec{P}(M) + \overrightarrow{dF_p}(z) + \overrightarrow{dF_p}(z+dz) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\rho(M)gSdz + S\big(p(z) - p(z+dz)\big) = 0$$

La quantité dz a été choisie petite devant la distance caractéristique de variation de la pression, on peut donc effectuer le développement limité du premier ordre en dz, il vient donc :
$$-\rho(M)gdz + \left(-\frac{dp}{dz}.dz\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\rho g - \frac{dp}{dz} = 0$$

La condition d'équilibre d'un fluide dans le champ de pesanteur s'écrit :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

où (Oz) est un axe vertical orienté vers le haut.

II-2) Cas d'un fluide incompressible et homogène

a) Définitions

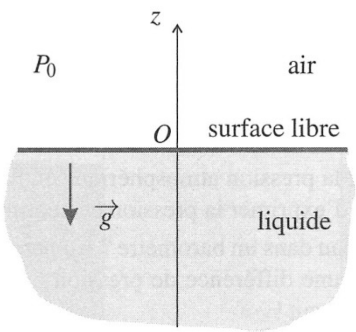
On appelle fluide incompressible un fluide dont la masse volumique ρ est indépendante de la pression.

On appelle fluide homogène un fluide dont la masse volumique ρ est la même en tout point de l'espace.

Les liquides sont quasiment incompressibles et indilatables. Dans cette approximation, leur masse volumique est une constante et ce sont des fluides incompressibles et homogènes.

b) Pression dans un liquide

On considère un liquide incompressible et homogène soumis au champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. Le liquide est en contact avec l'atmosphère de pression P_o au niveau de sa surface libre, située en z = 0.



Si on intègre l'équation, sachant que ρ et g sont constants, on obtient :
$P = -\rho g z + C$ où C est une constante.

Pour déterminer la constante, on utilise la continuité de la pression au niveau de la surface libre : P(z = 0) = P_o. Alors C =- P_o et :

$$P = -\rho g z + P_0$$

Si on désire déterminer la pression à une profondeur h, il suffit d'appliquer l'équation pour z = —h. On obtient alors l'expression appelée équation barométrique :

$$P = \rho g h + P_0$$

Ainsi la pression croît avec la profondeur, proportionnellement à la masse volumique du liquide.

Que représente physiquement le terme $\rho g h$ dans l'équation ? C'est le poids de la colonne de fluide de hauteur h et de surface 1 m^2. Ainsi, lorsqu'on se trouve sous une hauteur h d'eau, on ressent sur ses épaules le poids de la colonne d'eau au-dessus de soi en plus de la force de pression exercée par l'atmosphère.

c) Baromètre

Le baromètre à mercure de Torricelli est constitué d'un tube en U fermé à une extrémité, l'autre extrémité étant ouverte à l'air libre, dont on veut mesurer la pression P_o. On a ainsi :

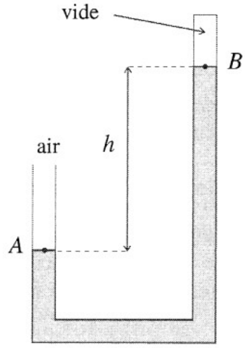
$$P_A = P_0 \; et \; P_B = O$$

D'après la relation barométrique, $P_A = P_B + \rho g h$

La masse volumique du mercure étant $\rho = 13600 kg m^{-3}$, la formule précédente donne : h = 76 cm.

On peut donc lire directement la pression atmosphérique en lisant la hauteur de la dénivellation de mercure, d'où l'usage d'exprimer la pression en centimètres de mercure.

Pourquoi n'utilise-t-on pas d'eau dans un baromètre ? Au paragraphe précédent, on a vu qu'il fallait 10 m d'eau pour avoir une différence de pression égale à 1 bar, il faudrait donc un baromètre d'au moins 10 m de haut !



Baromètre de Torricelli.

d) Vérin hydraulique

Pour le levage d'objets lourds, on utilise un vérin hydraulique. Le schéma de principe est représenté sur la figure. Il s'agit d'un tube dont les colonnes de droite et de gauche ont des sections différentes, respectivement S1 et S2 (S1 > S2). À l'équilibre, seule la pression atmosphérique Po s'exerce et les surfaces libres sont au même niveau. On pose une masse M à gauche. Quelle force supplémentaire F doit-on exercer pour maintenir les surfaces libres toujours au même niveau ?

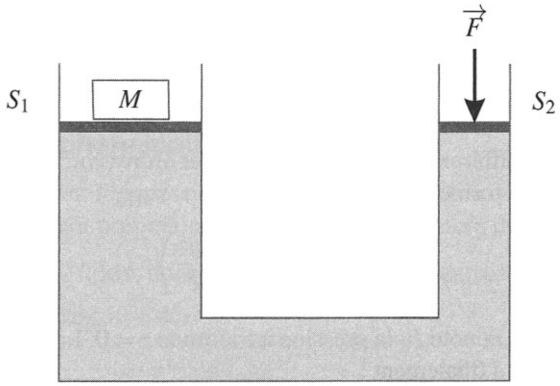


Schéma d'un vérin.

On applique la loi barométrique et, puisque la dénivellation h est nulle, les pressions P_A et P_B de chaque côté sont identiques. Si on néglige la masse des pistons on a :

$$P_A = P_0 + \frac{Mg}{S_1} \; et \; P_B = P_0 + \frac{F}{S_2} \; donc \; F = \frac{S_2}{S_1}Mg < Mg$$

Ainsi, la force à exercer pour maintenir la masse M est inférieure à Mg et la force nécessaire à la soulever sera elle aussi inférieure à ce qu'elle serait sans le vérin.

II-3) Cas d'un gaz parfait : atmosphère isotherme

On s'intéresse maintenant au cas où le fluide est l'air atmosphérique. On fait l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait et qu'il est en équilibre isotherme, c'est-à-dire que la température T est la même en tout point : T = constante.

La masse volumique ρ n'est pas une constante et il faut en tenir compte pour intégrer la relation.

On utilise l'équation d'état du gaz parfait pour relier la masse volumique locale $\rho(z)$ à la pression locale P(z).

On considère un volume mésoscopique dτ à l'altitude z, de masse $dm = \rho(z)d\tau$ par définition de la masse volumique. La quantité de gaz contenue dans dτ est dn=dm/M en notant M la masse molaire de l'air. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit :

$$p(z)d\tau = dnRT$$

$$\Leftrightarrow p(z)d\tau = \frac{dm}{M}RT = \frac{\rho(z)d\tau}{M}RT$$

$$\Leftrightarrow \rho(z) = \frac{Mp(z)}{RT}$$

En reportant cette expression dans l'équation on obtient :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT}p(z)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution est de la forme :

$$p(z) = Ae^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

où A est une constante. On note Po la pression à l'altitude z = 0. La constante est déterminée par : P(0) = A = Po. On a finalement :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

On définit la hauteur d'échelle H par l'altitude à laquelle Po est divisée par e (base du logarithme népérien). Alors :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ où } H = \frac{Mg}{RT}$$

Avec M = 29 $g.mol^{-1}$ et T = 273 K, on trouve : H = 8 km qui est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère terrestre.

On peut comparer la variation de pression avec l'altitude dans l'air et dans l'eau. On sait que la pression augmente de P_0 si on descend en profondeur de 10 m dans l'eau. Par comparaison, la variation de pression dans l'air entre z = 0 et z = 10m est :

$$\Delta p(z) = p_0\left(e^{-\frac{10}{8000}} - 1\right) = -0{,}001P_0$$

Elle est 1000 fois plus faible parce que la masse volumique de l'air est 1000 fois plus petite que la masse volumique de l'eau.

En conclusion :
- **On doit tenir compte de la variation de pression avec l'altitude dans un liquide,**
- **On peut supposer la pression dans l'air uniforme à l'équilibre tant qu'on l'étudie sur des hauteurs faibles devant H.**

III - Facteur de Boltzmann

III-1) Cas de l'atmosphère isotherme

La pression locale P(z) dont l'expression vient d'être établie et la densité moléculaire locale n*(z) sont proportionnelles. En effet, le nombre de molécules dans un volume dτ à l'altitude z est n*(z)dτ, donc :

$$n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{Mg}{RT}z} = n_0^* e^{-\frac{mN_a g}{RT}z} = n_0^* e^{-\frac{mg}{k_B T}z}$$

Ce résultat montre que les molécules sont de moins en moins nombreuses lorsqu'on monte en altitude : l'air se raréfie. La distance caractéristique de variation, qui est la hauteur d'échelle H définie plus haut, dépend de la masse des molécules et de la température.

D'autre part, l'argument de l'exponentielle dans la formule ci-dessus est le rapport de deux énergies :
- L'énergie potentielle de pesanteur de la molécule $E_p(z) = mgz$
- L'énergie d'agitation thermique k_BT.

La formule peut se réécrire ainsi :

$$n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{E_p(z)}{k_B T}}$$

On peut l'interpréter de la manière suivante : la répartition des molécules résulte de la compétition entre :

- La pesanteur qui tend à les faire tomber, de manière à ce que l'énergie potentielle $E_p(z)$ diminue,
- L'agitation thermique, représentée dans la formule par k_BT, qui tend à uniformiser la répartition des molécules.

Cette formule est un cas particulier d'une loi générale.

III-2) Généralisation

Soit, à l'intérieur d'un système thermodynamique à l'équilibre à la température T, des particules microscopiques dont l'énergie peut prendre différentes valeurs E_i. Le nombre moyen N_i de particules ayant l'énergie E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$N_i = A e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

où A est une constante indépendante de l'énergie Ei.

Le facteur de Boltzmann donne l'influence de la température sur les particules microscopiques.

- La vitesse quadratique moyenne, provient d'une loi de distribution des vitesses moléculaires contenant un facteur de Boltzmann.
- La loi d'Arrhénius de la cinétique chimique est analogue :

$$k = A e^{-\frac{E_A}{RT}}$$

IV - Actions exercées par un fluide au repos sur un solide

IV–1) Calcul des forces de pression

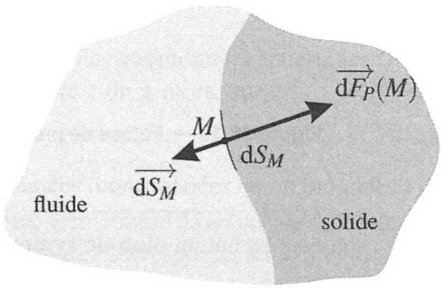
a) Expression de la force de pression

La force exercée par un fluide sur une paroi solide est la somme des forces élémentaires qu'il exerce sur les différentes surfaces élémentaires de cette paroi. On a vu que la force exercée par le fluide sur une surface élémentaire dS_M est :

$$\overrightarrow{dF_p}(M) = -p(M)\overrightarrow{dS_M}$$

où $\overrightarrow{dS_M}$ est le vecteur surface, orthogonal à la paroi du solide et dirigé du solide vers le fluide.

Pour ne pas se tromper sur le sens d'une force de pression, il faut bien garder à l'esprit que cette force est dirigée vers l'intérieur du système qui subit la force.



On va s'intéresser au calcul de la force exercée par un fluide sur une surface solide S en contact avec le fluide. Cette force est donnée par l'intégrale double :

$$\overrightarrow{F_p}(M) = \iint_{M \in S} \overrightarrow{dF_p}(M)$$

b) Prise en compte des symétries

Dans ce qui suit, on appelle « problème » la donnée de la paroi solide et de la distribution de pression $p(M)$. La prise en compte des symétries du problème permet souvent de connaître, sans calcul, la direction de la force $\overrightarrow{F_p}$. Il faut toujours commencer par les analyser.

- Plan de symétrie

  Le problème admet un plan de symétrie (P) si :
  - la surface solide est symétrique par rapport au plan (P),
  - la pression est la même en deux points M et M' symétriques par rapport au plan (P).

Dans ce cas, comme on le voit sur la figure, les forces élémentaires exercées par le fluide sur deux éléments de surface symétriques par rapport à (P) sont symétriques par rapport à (P) Il en résulte que la somme $\overrightarrow{dF_p}(M) + \overrightarrow{dF_p}(M')$ est parallèle à (P). Par suite la force totale $\overrightarrow{F_p}$ est parallèle au plan (P).

Si le problème admet un plan de symétrie (P), la force de pression $\overrightarrow{\boldsymbol{F_p}}$ est parallèle au plan (P).

Par exemple si le problème est symétrique par rapport au plan (Oxy), la force de pression a une composante suivant le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, nulle : $F_{pz} = 0$.

- Axe de symétrie

Si le problème admet un axe de symétrie, la force de pression $\overrightarrow{\boldsymbol{F_p}}$ est parallèle à cet axe.

c) Calcul de l'intégrale

Calculer l'intégrale de vecteurs consiste a priori à calculer trois intégrales pour avoir les composantes selon les trois axes d'un repère. Par exemple, la composante suivant le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ est

$$F_{px} = \iint_{M\in S} \overrightarrow{dF_p}(M)\,.\,\overrightarrow{u_x} = \iint_{M\in S} -p(M)\overrightarrow{dS_M}\,.\,\overrightarrow{u_x}$$

Cependant, si l'on choisit bien le repère et si le problème a un plan ou un axe de symétrie, il n'y a le plus souvent qu'une composante non nulle et on n'a besoin de calculer qu'une seule intégrale.

Qi Une erreur classique consiste à calculer la somme des normes des vecteurs dFp(M) à la place de la somme des composantes de ces vecteur suivant un axe. Cela ne donne pas
la norme de Fp parce que la norme d'une somme de vecteurs n'est pas la somme de leur normes.

Comment procède-t-on ?

Il faut choisir un système de coordonnées adapté au problème. Dès lors, on constate le plus souvent que, sur la surface d'intégration, une des trois coordonnées garde une valeur fixe (on dira qu'elle est « bloquée »).

Exemples :

$$dS = dxdy\ ou\ rdrd\theta\ ou\ r^2 sin\theta d\theta d\varphi\ ou\ \ldots$$

IV-2) Exemples

a) Force de pression sur un barrage plan

On veut calculer la force exercée par l'eau d'un lac de montagne sur un barrage. On considère dans un premier temps un barrage plan. Cette force s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_p}} = \iint_{M\in S} \overrightarrow{\boldsymbol{dF_p}}(\boldsymbol{M}) = \iint_{M\in S} -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{M})\overrightarrow{\boldsymbol{dS_M}}$$

La surface d'intégration S est la surface verticale du barrage qui a la forme d'un trapèze de hauteur H et côtés parallèles L et l.

On voit sur la figure que les forces élémentaires sont toutes de même direction et de même sens que $\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$. Il en est donc de même de la force totale. Il faut donc calculer :

$$\boldsymbol{F_{px}} = \iint_{M\in S} \overrightarrow{\boldsymbol{dF_p}}(\boldsymbol{M}) \,.\, \overrightarrow{\boldsymbol{u_x}} = \iint_{M\in S} -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{M})\overrightarrow{\boldsymbol{dS_M}} \,.\, \overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$$

$$= \iint_{M\in S} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dS_M}$$

La pression dans l'eau est : P(M) = —ρgz + constante. Étant donné que P(z = H) = P_o, pression atmosphérique, on a :

$$P(M) = -\rho g(z - H) + p_0$$

Sur la surface d'intégration S, x = 0 (coordonnée « bloquée »), y=L et z varie entre 0 et H d'où :

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} (-\rho g(z - H) + p_0)Ldz$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} \big(-\rho g z + (p_0 + \rho g H)\big)Ldz$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = -\frac{\rho g H^2 L}{2} + (p_0 + \rho g H)LH$$

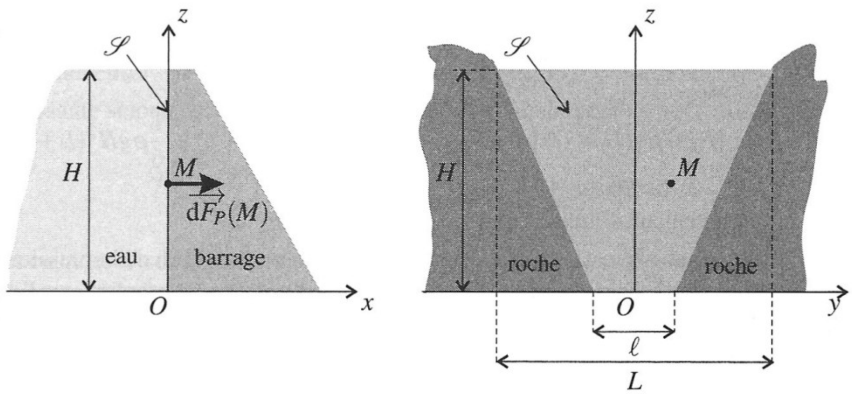
$$\Leftrightarrow F_{px} = \frac{\rho g H^2 L}{2} + p_0 LH$$

Le terme proportionnel à Po est de peu d'intérêt car c'est la contribution de la pression atmosphérique à la force exercée par l'eau sur le barrage : l'air exerce une pression sur l'eau, qui de ce fait exerce une pression sur le barrage. Il est compensé par l'action de la même pression atmosphérique de l'autre côté du barrage.

Par conséquent $\Delta F_x = \frac{\rho g H^2 L}{2}$

Avec $g = 9{,}8 m s^{-2}, L = 500 m, H = 90 m\ et\ \rho = 1000 kg.m^{-3}\ on\ obtient$:

$$\Delta F_x = \frac{\rho g H^2 L}{2} = 1{,}98.10^{10} N$$



b) Force de pression sur un barrage plan type Serre Ponçon

Cette fois-ci, sur la surface d'intégration S, x = 0 (coordonnée « bloquée »), z varie entre 0 et H et y varie entre :

$$-\frac{l}{2}-\frac{\frac{L}{2}-\frac{l}{2}}{H}z \; et \; \frac{l}{2}+\frac{\frac{L}{2}-\frac{l}{2}}{H}z$$

La surface élémentaire est $\boldsymbol{dS_M} = \mathrm{dydz}$.

Finalement :

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} \int_{y=-\frac{1}{2}\left(l+\frac{L+l}{H}z\right)}^{\frac{1}{2}\left(l+\frac{L-l}{H}z\right)} (-\rho g(z-H)+p_0)dydz$$

On calcule d'abord l'intégrale sur y (puisque ses bornes de variations dépendent de z, c'est obligatoire), puis l'intégrale sur z. Il vient :

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} (-\rho g(z-H)+p_0)\left(l+\frac{L-l}{H}z\right)dz$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} \left(-\rho g z+(p_0+\rho g H)\right)\left(l+\frac{L-l}{H}z\right)dz$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} \left(-\rho g l z-\rho g z^2\frac{L-l}{H}+(p_0+\rho g H)l \right.$$
$$\left. +(p_0+\rho g H)\frac{L-l}{H}z\right)dz$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = -\frac{\rho g l H^2}{2} - \frac{\rho g \frac{L-l}{H} H^3}{3} + (p_0 + \rho g H) l H + \frac{(p_0 + \rho g H)\frac{L-l}{H} H^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = -\frac{\rho g l H^2}{2} - \frac{\rho g (L-l) H^2}{3} + (p_0 + \rho g H) l H + \frac{(p_0 + \rho g H)(L-l) H}{2}$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = (L-l)\left(-\frac{\rho g H^2}{3} + \frac{\rho g H^2}{2} + \frac{p_0 H}{2}\right) - \frac{\rho g l H^2}{2} + \rho g l H^2 + p_0 l H$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = (L-l)\left(\frac{\rho g H^2}{6} + \frac{p_0 H}{2}\right) + \frac{\rho g l H^2}{2} + p_0 l H$$

$$\Leftrightarrow F_{px} = L\left(\frac{\rho g H^2}{6} + \frac{p_0 H}{2}\right) + l\left(\frac{p_0 H}{2} + \frac{\rho g H^2}{3}\right)$$

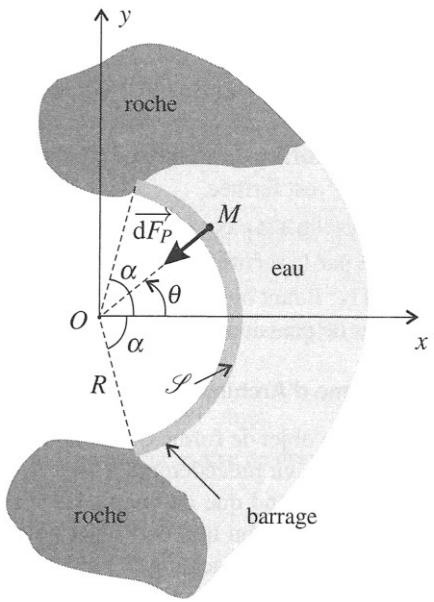
$$\Leftrightarrow F_{px} = \frac{1}{2} p_0 H (L+l) + \frac{\rho g H^2}{6}(L+2l)$$

$$Donc \;\; \Delta F_{px} = \frac{\rho g H^2}{6}(L+2l)$$

Si L = l on retrouve la valeur précédente

c) Force de pression sur un barrage cylindrique

On considère maintenant un barrage en forme de portion de cylindre de rayon R, de hauteur H et d'axe (Oz). On utilise des coordonnées cylindriques (r, θ,z) d'axe (Oz). Avec ces coordonnées, le barrage correspond à la partie $-\alpha < \theta < \alpha$ du cylindre de rayon R.



Les forces élémentaires $\overrightarrow{dF_p}(M)$ ne sont pas toutes parallèles, il faut donc étudier la symétrie pour connaître la direction de la force $\overrightarrow{F_p}$.

Le problème admet le plan (Ozx) comme plan de symétrie donc la composante selon (Oy) de la force de pression est nulle. De plus, la force élémentaire $\overrightarrow{dF_p}(M)$ est horizontale quel que soit M, donc la force est horizontale : F_{pz} = O. Il faut donc calculer F_{px}, qui est donnée par :

$$F_{px} = \iint_S dF_{px} = -\iint_S p(M)cos\theta dS_M$$

où θ est l'angle des coordonnées cylindriques de M. On suppose que l'eau arrive jusqu'à la hauteur H, comme au paragraphe précédent, la pression est alors toujours donnée par :

$$P(M) = P_o + \rho g\ (H - z).$$

La surface d'intégration S correspond à r = R (coordonnée « bloquée »), z variant entre 0 et H et θ variant entre $-\alpha$ et α. La surface élémentaire est $dS_M = (Rd\theta)dz$.

La composante selon (Ox) de la force de pression est finalement :

$$F_{px} = -\iint_S p(M)cos\theta dS_M$$

$$= R\int_{-\alpha}^{\alpha} cos\theta d\theta \int_0^H [P_o + \rho g\ (H - z)]dz$$

$$= R * 2sin(\alpha)[P_0H + \rho gH^2 - \rho gH^2/2]$$

Donc :

$$\overrightarrow{F_p} = 2RHsin(\alpha)\left(p_0 + \frac{\rho gH}{2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

De même qu'au paragraphe précédent, le terme en P_o est dû à la pression atmosphérique et il est compensé par une force s'appliquant de l'autre côté du barrage.

Donc :

$$\overrightarrow{\Delta F_p} = 2RHsin(\alpha)\left(\frac{\rho gH}{2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

IV-3) Poussée d'Archimède

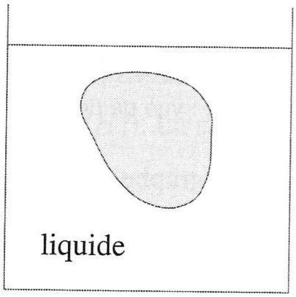
a) Théorème d'Archimède

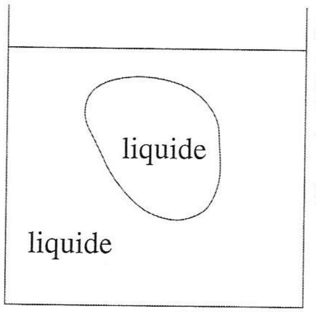
On considère le cas d'un solide entièrement entouré par un fluide. La force de pression s'écrit dans ce cas :

$$\overrightarrow{F_p} = \oiint_{M\in S} -p(M)\overrightarrow{dS_M}$$

Où S est la surface du solide. Le cercle sur le symbole d'intégrale double rappelle le fait que la surface S est fermée.
Dans ce cas il n'est pas nécessaire de procéder au calcul d'une intégrale double car le résultat est donné par le théorème d'Archimède. La force F_p est alors appelée poussée d'Archimède et notée Π. Il faut bien se souvenir que la poussée d'Archimède n'est autre que la résultante des forces de pression.

On étudie un objet de forme quelconque, de volume V, de masse M, immergé dans un fluide au repos. On a vu précédemment avec la loi de la statique des fluides que l'expression de la pression ne dépend que du champ de pesanteur g. Dans les deux cas des figures, la présence ou non de l'objet ne changeant pas le champ de pesanteur, le champ de pression est lui aussi inchangé.





Ainsi, la force de pression s'exerçant sur le volume V de la figure due au reste du fluide est la même que celle exercée sur l'objet occupant le même volume V. Ce volume est en équilibre sous l'action de deux forces :

- la résultante des forces de pression exercées sur la surface de fluide F_p,
- le poids de ce volume V de fluide, qui est l'unique force extérieure.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au volume V de masse m_f de fluide donne donc :

$$\overrightarrow{F_p} + m_f\vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_p} = -m_f\vec{g}$$

D'après de qui précède, puisque la répartition de pression est inchangée dans le fluide, la force $\vec{\Pi}$ exercée sur le solide est égale à $\overrightarrow{F_p}$ soit :

$$\vec{\Pi} = -m_f\vec{g}$$

où m_f est la masse de fluide du volume V, qui est aussi la masse de fluide déplacé par l'introduction de l'objet, et donc $m_f\vec{g}$ est le poids du volume de fluide déplacé. Cette force porte le nom de poussée d'Archimède, c'est la résultante des forces de pression s'exerçant sur le solide.

Tout corps immergé au repos subit de la part du fluide une force opposée à celle du poids du volume de fluide déplacé.

Ainsi sur un corps de masse m, qui est en équilibre dans un fluide (par exemple dans l'eau), deux forces s'exercent :

- Son poids $m\vec{g}$ vers le bas, s'exerçant au centre de gravité de l'objet,
- La poussée d'Archimède $-m_f\vec{g}$ vers le haut, s'exerçant au centre de gravité du volume de fluide déplacé.

b) Ballon ascensionnel

On étudie le cas simple d'un ballon dont le volume V est constant, gonflé avec un gaz plus léger que l'air atmosphérique (hélium ou air chaud) de masse volumique ρ_{gaz}. On appelle m la masse du ballon (enveloppe, gaz et nacelle) et on néglige le volume de la nacelle devant celui du ballon. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au ballon donne :

$$m\vec{a} = \vec{\Pi} + m\vec{g}$$

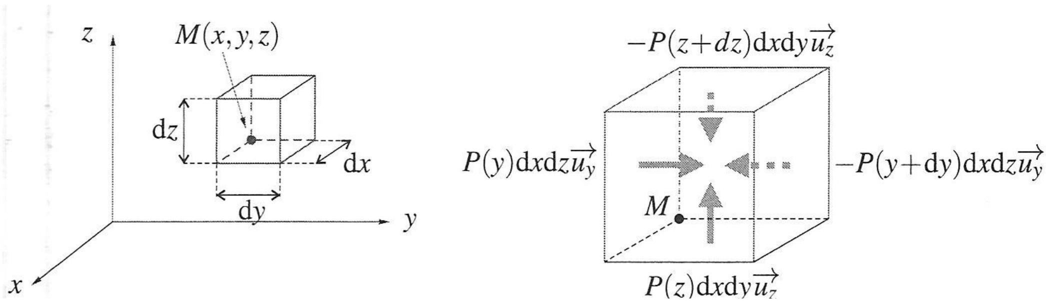
En projection sur l'axe Oz orienté vers le haut, elle s'écrit :

$$\frac{mdz}{dt} = (m_{air} - m)\vec{g}$$

Ainsi, si le ballon est plus léger que l'air déplacé, $(m_{air} - m)$ est positif et le ballon subit une accélération verticale ascendante.

V - Équation locale de la statique des fluides

V-1) Équivalent volumique des forces de pression



On considère un élément de fluide mésoscopique, de forme parallélépipèdique, de côtés dx, dy et dz respectivement parallèles aux axes (0x), (Oy) et (Oz), dont l'un des sommets est M, point de coordonnées (x, y, z). On veut calculer la résultante $\overrightarrow{dF_p}$ des forces de pression exercées par le fluide qui l'entoure sur cet élément de fluide.

$\overrightarrow{dF_p}$ est la somme de six forces s'exerçant sur les six faces. (pour une raison de clarté, seulement quatre des six forces sont représentées). Elle a, dans le cas général, trois composantes (F_{px},F_{py},F_{pz}). La composante F_{pz}, provient des forces s'exerçant sur les deux faces orthogonales à (Oz), qui ont pour surface dS = dxdy. Elle s'écrit :

$$dF_{pz} = p(x,y,z)dS - p(x,y,z+dz)dS$$

$$\Leftrightarrow dF_{pz} = -\frac{\partial p}{\partial z}dzdS = -\frac{\partial p}{\partial z}d\tau$$

De la même manière on montre que :

$$dF_{py} = -\frac{\partial p}{\partial y}d\tau \; et \; dF_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x}d\tau$$

Donc :

$$\overrightarrow{dF_p} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)d\tau = -\overrightarrow{grad}p\, d\tau$$

Dans cette formule apparaît le gradient de la pression, vecteur qui se calcule à partir du champ de pression et qui pointe dans la direction où la pression augmente le plus.

On a pu donc mettre la force $\overrightarrow{dF_p}$ sous la forme d'un vecteur que multiplie le volume dans le cas d'une force volumique. C'est un résultat très important pour la mécanique des fluides :

La résultante des forces de pression sur un volume mésoscopique $d\tau$ de fluide est donnée par la formule :

$$\overrightarrow{dF_p} = -\overrightarrow{grad}p\, d\tau = \overrightarrow{f_p}d\tau \text{ où } \overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{grad}p$$

$\overrightarrow{f_p}$ est la densité volumique de force équivalente aux forces de pression.

V-2) Gradient d'un champ scalaire

On introduit maintenant un opérateur, appelé gradient, qui transforme un champ scalaire en champ vectoriel. À partir du champ scalaire P(M, t), on obtient le champ vectoriel $\overrightarrow{grad}p$ de la manière suivante : en coordonnées cartésiennes, le gradient de P s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}p = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)$$

En conséquence, la relation de statique des fluides qui s'écrit laborieusement sur chaque composante :
$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ prend une forme plus simple :

$$\overrightarrow{grad}p = \rho\vec{g}$$

(le signe moins a disparu car $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$. On peut la réécrire sous la forme plus générale :

On remarque alors que les forces de pression, qui sont à la base de nature surfacique, peuvent pour un fluide au repos s'exprimer comme une force volumique:

$$\overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{grad}p \Rightarrow \overrightarrow{f_p} + \rho\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{f_p} + \overrightarrow{f_v} = \vec{0}$$

Ce résultat n'a rien d'élémentaire. Il permet d'écrire la relation de statique des fluides sous une forme assez simple conceptuellement : il s'agit de la nullité (en tout point du fluide) de la somme des forces volumiques s'exerçant sur le fluide.

- Notation nabla

Le gradient est aussi parfois indiqué à l'aide d'une autre notation : nabla (ce qui signifie harpe en grec, en liaison avec la forme du symbole ∇). On définit l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes comme :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y}+\frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$\vec{\nabla}p=\overrightarrow{grad}p$$

V-3) Quelques propriétés du gradient

a) Définition générale

Nous allons tout d'abord donner la définition intrinsèque du gradient, c'est-à-dire en dehors de tout système de coordonnées.

$$dp=\overrightarrow{grad}p.\,d\overrightarrow{OM}$$

Or :

$$\overrightarrow{grad}p=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{u_x}+\frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{u_y}+\frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)$$

$$\text{et } d\overrightarrow{OM}=\left(dx\overrightarrow{u_x}+dy\overrightarrow{u_y}+dz\overrightarrow{u_z}\right)$$

Donc :

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{dx}+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{dy}+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{dz}$$

Ceci, représente bien la différentielle de p(x,y,z)

b) Coordonnées cylindriques et sphériques

En coordonnées cylindriques on a :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{dr} + \frac{\partial p}{\partial \theta}\mathrm{d\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{dz}$$

Et :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + \mathrm{r}d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$\overrightarrow{grad}p = \frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

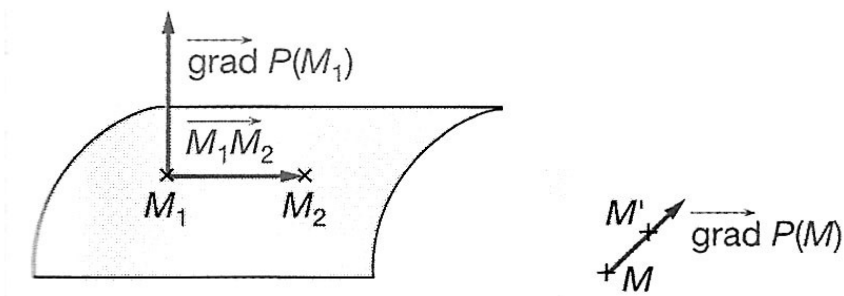
De même en sphériques :

$$\overrightarrow{grad}p = \frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{\mathrm{rsin\theta}}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

c) Sens physique du gradient

Muni de la définition du gradient, il est alors possible de développer son interprétation. On retiendra notamment les trois caractérisations suivantes :

- **Le gradient d'un champ scalaire P est perpendiculaire aux surfaces iso-P, c'est-à-dire aux surfaces P = cte.**



En effet, considérons l'ensemble des points tels que P(M) = P_o, où P_o est une constante donnée. Mathématiquement, cet ensemble constitue une surface de l'espace.
Soit deux points très proches M_1 et M_2 sur cette surface : alors, $P(M_1) = P(M_2)$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est tangent à la surface. Par définition du gradient :

$$0 = P(M_2) — P(M_1) = dP = \overrightarrow{grad}\, P(M_1\,).\overrightarrow{M_1M_2}$$

Ainsi, le gradient de P en M_1 est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ tangent à la surface iso-P considérée;

- **Le gradient d'un champ scalaire P est dirigé des zones où P prend des valeurs faibles vers celles où P prend des valeurs élevées.**

Considérons deux points M et M' proches tels que le vecteur MM' soit colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{grad}\, P(M)$. On utilise alors la définition du gradient :

$$P(M') — P(M) = \overrightarrow{grad}\, P.\overrightarrow{MM'} \geq 0$$

vu la position des points M et M'. Ainsi, le gradient est orienté des zones où P est faible vers celles où P est élevée ;

- **La norme du gradient d'un champ scalaire P est d'autant plus élevée que le champ P varie rapidement d'un point à un autre.**

L'expression du gradient en coordonnées cartésiennes donne :

$\left\|\overrightarrow{grad}\, P\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}$ Ainsi, plus les variations spatiales de P sont rapides, plus les dérivées partielles de p par rapport aux coordonnées spatiales sont élevées, et plus le gradient de P possède une norme élevée.