XIV-1 Mouvements à forces centrales

Les trajectoires des astres du système solaire ont joué un rôle important dans l'établissement des lois de la mécanique. Ce chapitre s'intéresse particulièrement à la loi de la gravitation et à ses diverses conséquences.

I – Forces centrales conservatives

I-1) Définition et exemples

Soit O un point fixe de l'espace. Un point matériel M est dit soumis à une force centrale conservative s'il subit une force du type:

$$\vec{f} = f(r)\overrightarrow{u_r} \; avec \; \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

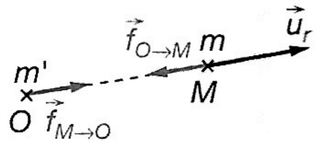
La force ne dépend donc que de la distance r au point O (ce point assure le fait que la force est conservative) et est toujours dirigée radialement (c'est ce que l'on appelle une force centrale). En revanche, la force peut être attractive ou répulsive par rapport au point 0.

Deux forces fondamentales sont exactement de cette forme, avec une fonction f(r) décroissant en $1/r^2$, on parle alors de forces newtoniennes. Ces forces newtoniennes sont dites de portée infinie, c'est-à-dire que leur décroissance est assez lente au fur et à mesure que r augmente. Ce sont :

- L'interaction gravitationnelle : soit deux masses ponctuelles, m placée en M et m' placée en O. Alors, la force $\vec{f}_{O\to M}$ exercée par la masse en O sur celle en M est donnée par la loi de la gravitation :

$$\vec{f}_{O\to M} = -\frac{Gmm'}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\vec{f}_{M\to O}$$

Où G=6,67.10^{-11} Nm²kg^{-2} est la constante universelle de gravitation.



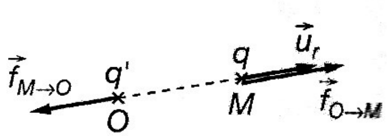
La force entre deux masses est toujours attractive. Donnons un ordre de grandeur pour fixer les idées : deux masses de 1 kg séparées d'une distance de 1m s'attirent avec une force F=6,7.10^{-11}N.

Ainsi, entre des corps de masse usuelle, l'interaction gravitationnelle se révèle faible. En revanche, elle joue un rôle prépondérant pour le mouvement des astres, et celui des corps à la surface des astres. Cette loi a été énoncée pour la première fois par l'Anglais Isaac Newton en 1666.

La loi de la gravitation est valable entre deux masses ponctuelles. Toutefois, si l'une des masses est non ponctuelle, mais avec une répartition massique possédant la symétrie sphérique, la loi reste valable. Il est donc possible d'appliquer avec une bonne précision la loi de la gravitation pour évaluer la force exercée par le Soleil sur la Terre, ou par la Terre sur un satellite.

L'interaction électrostatique : il s'agit d'une interaction totalement indépendante de l'interaction gravitationnelle. Rappelons simplement son expression. Pour deux charges ponctuelles : q placée en M et q' placée en 0, la force $\vec{f}_{O\to M}$ exercée par la charge en O sur celle en M est donnée par :

$$\vec{f}_{O\to M} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} = -\vec{f}_{M\to O}$$



où ε_0 = 8,84.10^{-12} F.m^{-1} est une constante appelée **permittivité** du vide. Cette interaction est formellement très similaire à l'interaction gravitationnelle, avec un comportement en 1/r², où r est la distance entre les deux masses ou charges. Néanmoins, deux différences essentielles sont à noter. La première est que l'interaction électrostatique peut être attractive ou répulsive, suivant le signe relatif des charges q et q' alors que l'interaction gravitationnelle est forcément attractive. La seconde est l'intensité relative des deux forces. La force électrique est d'intensité très supérieure à la force gravitationnelle, comme on l'a signalé dans un chapitre précédent. Ainsi, la force gravitationnelle est toujours négligée en présence de forces électromagnétiques.

I-2) Conséquences

a) Conservation du moment cinétique

Un point matériel soumis à une force centrale possède forcément un moment cinétique constant. En effet, le théorème du moment cinétique appliqué au point matériel M en 0 dans un référentiel galiléen donne :

$$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = r\overrightarrow{u_r} \wedge f\overrightarrow{u_r} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{cste}$$

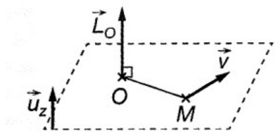
On note deux conséquences importantes de la conservation du moment cinétique : la planéité du mouvement et la loi des aires.

b) Mouvement plan

L'axe $\overrightarrow{u_z}$, est pris selon la direction fixe $\overrightarrow{L_0}$. D'après les propriétés du produit vectoriel,

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$

Ainsi, le vecteur position reste toujours orthogonal à $\overrightarrow{u_z}$: la trajectoire est plane, contenue dans le plan z = 0.



Un mouvement à force centrale est toujours plan, contenu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et passant par le centre de la force.

Le mouvement du point M étant contenu dans un plan, les coordonnées polaires seront systématiquement utilisées.

c) Loi des aires

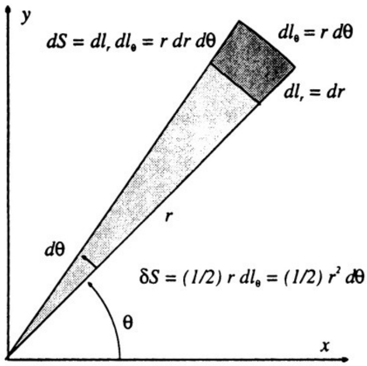
Calculons $\overrightarrow{L_0}$:

$$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\overrightarrow{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + \mathrm{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = \mathrm{mr}^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

On introduit la constante des aires qu'on note C tel que :

$$\overrightarrow{L_0} = \mathrm{mC}\overrightarrow{u_z} \text{ où } \mathrm{C} = \mathrm{r}^2\dot{\theta} = \mathrm{cste}$$

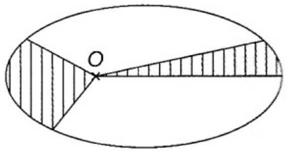
Cette constante peut s'interpréter en termes de vitesse aréolaire. On appelle vitesse aréolaire V la vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire dS définie par la trajectoire dans le plan du mouvement.



Or $dS = \int_0^r r dr d\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

Donc : $V = \frac{dS}{dt} = \frac{\mathrm{C}}{2} = \mathrm{cste}$

La loi des aires représente la deuxième loi de Kepler : le rayon vecteur repérant le mobile balaie pendant des durées égales des aires égales.



Le sens physique est clair : quand la distance r augmente, le mobile est plus loin du point O et conjointement sa vitesse angulaire diminue. Le phénomène inverse a lieu si r diminue. Cette compensation se fait de plus en gardant la vitesse aréolaire constante.

I-3) Énergie potentielle

a) Energie potentielle associée

Une telle force telle est forcément conservative. En effet, lorsque le point matériel se déplace de $d\overrightarrow{OM}$:

$$dE_p = \mathrm{f(r)}\overrightarrow{u_r}.(dr\overrightarrow{u_r} + \mathrm{rd\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = -\mathrm{f(r)}dr$$

$$Donc : E_p = -\int \mathrm{f(r)}dr$$

Dans un champ à force centrale conservative, l'énergie potentielle ne dépend que de la variable radiale.

b) Energie potentielle effective

L'étude de l'énergie potentielle donne beaucoup de renseignements pour les mouvements conservatifs à un degré de liberté. Dans le cas présent, le mouvement est bien conservatif, mais comporte a priori deux degrés de liberté : le point est repéré par deux coordonnées r et θ. Néanmoins, la constante des aires lie ces deux quantités par la relation $\mathrm{C} = \mathrm{r}^2\dot{\theta}$.

Écrivons l'expression de l'énergie mécanique E_m d'un point matériel de masse m mobile dans le champ de force central ; E_m est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

$$o\text{ù} : \ E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

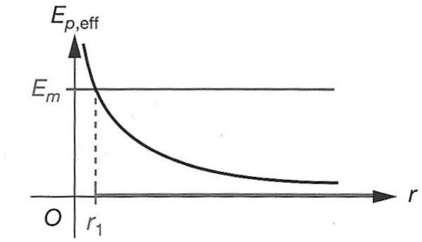
Tout se passe alors comme si un point de masse m se déplaçait le long d'un axe fixe, de coordonnée correspondante r, dans une nouvelle énergie potentielle. Celle-ci est appelée énergie potentielle effective : $E_{p,eff}(r)$

Son énergie cinétique effective est alors naturellement :

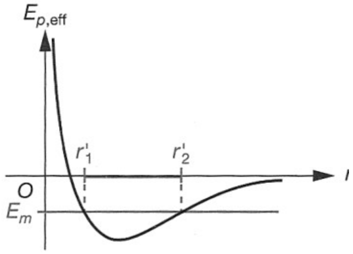
$$E_{c,eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Les zones accessibles au point matériel sont celles pour lesquelles $E_{p,eff} < \mathrm{E_m}$. Le raisonnement est le même que celui étudié dans un précédent chapitre.

Par exemple, sur le cas de la figure suivante, la zone accessible correspond à $r \geq r_1$. La trajectoire n'est pas bornée, c'est un état de diffusion.



En revanche, sur la figure suivante, la zone accessible est bornée :



II – Champs newtoniens gravitationnels

II-1) Energie potentielle

Pour étudier le cas gravitationnel, on se place désormais pour le reste de ce chapitre dans la situation de la figure où une masse immobile m' est placée en O et une masse mobile m en M. Comme on l'a montré précédemment, la trajectoire de la masse m est plane et on utilise dans le plan de la trajectoire les coordonnées polaires, par rapport au point O, position du centre attracteur. La force subie par la masse m est donc :

$$\vec{f} \quad = -\frac{Gmm'}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

L'énergie potentielle associée est ::

$$dE_p = +\frac{Gmm'}{r^2}\overrightarrow{u_r}.(dr\overrightarrow{u_r} + \mathrm{rd\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = \frac{Gmm'}{r^2}dr$$

$$Donc : \boldsymbol{E_p = -\frac{Gmm'}{r}}$$

Si on pose : $k = -Gmm' = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}$ $on\ a$:

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}\ et\ E_p = \frac{k}{r}$$

Le champ de gravitation créé par la masse m' immobile en O est tel que la force subie par la masse m est :

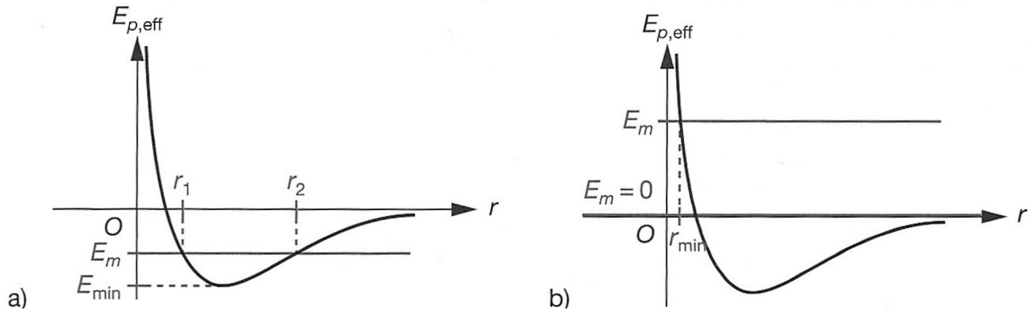
$$\vec{f} = m\vec{g} \text{ où } \vec{g} = -\frac{Gm'}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

II-2) Nature des trajectoires

Il est possible d'écrire la relation fondamentale de la dynamique et de résoudre analytiquement (ou numériquement) les équations du mouvement. La procédure n'est pas très compliquée, mais demande un peu de technique calculatoire. Nous allons plutôt suivre une approche qualitative grâce à l'utilisation de l'énergie potentielle effective (6), dont on a expliqué la construction et l'utilité :

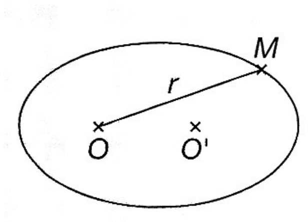
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

$$o\text{ù} : \ E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}}$$



Les zones accessibles pour une énergie mécanique E_m, donnée sont celles pour lesquelles $E_{p,eff}(r) \leq E_m$. On distingue alors trois cas sur la figure :

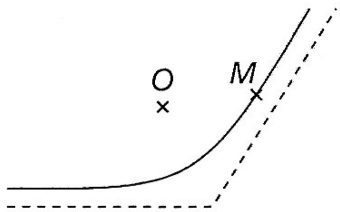
- $E_m < 0$: la masse m est mobile dans la zone r1 < r < r2 et reste à proximité du centre attracteur O : c'est un état lié. On admettra que de telles trajectoires sont des ellipses dont l'un des foyers est O: on a là l'énoncé de la première loi de Kepler. Ce type de trajectoire correspond à la situation des planètes du système solaire ou des satellites en orbite autour de la Terre. Intéressons-nous au cas particulier Em = E_{min}. Alors, la coordonnée r reste constante, il s'agit d'une orbite circulaire. Notons bien qu'il n'existe pas une seule orbite circulaire comme cela semble être le cas d'après cette analyse. En effet, la constante des aires est ici fixée. Il existe donc en revanche une seule orbite circulaire par valeur de la constante des aires ;



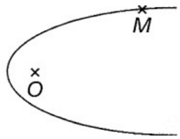
- E_m > 0: la masse m a accès à la zone $r \in (r_{min}, \infty)$ c'est clairement un état de diffusion. En fait, la masse réussit à s'arracher à l'attraction du centre O. Notamment, la norme de la vitesse de la masse est v_∞, telle que :

$$E_m = E_c = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

Dans ce cas, on admet que la trajectoire est une branche d'hyperbole.



- $E_m = 0$: il s'agit d'un cas un peu formel qui n'a que peu de chances de se produire vu que l'énergie mécanique doit être exactement nulle ! La masse m pouvant aller jusqu'à l'infini, il s'agit d'un état de diffusion. Géométriquement, on admet qu'il s'agit d'une parabole.



Suivant le signe de l'énergie mécanique E_m, la trajectoire est :
- elliptique si $E_m < 0$;
- hyperbolique si $E_m > 0$;
- parabolique si $E_m = 0$.

Remarque :

Le cas C=0 entraine un mouvement rectiligne car $\dot{\theta} = 0$.

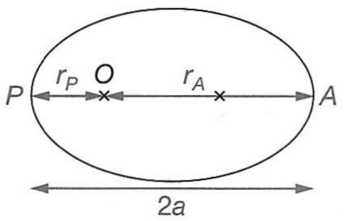
II-3) Trajectoires elliptiques

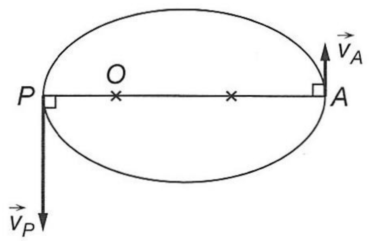
a) Propriétés

La première loi de Kepler énonce que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. Détaillons quelques caractéristiques des orbites elliptiques, seuls états liés d'un champ newtonien :
- La distance au centre attracteur varie entre deux valeurs limites : maximale r_A atteinte au point A et minimale r_p atteinte au point P. Les points A et P se nomment respectivement apogée et périgée pour un satellite en orbite autour de la

Terre, et aphélie et périhélie pour une planète autour du Soleil ;

- On nomme demi-grand axe noté a la demi-distance entre A et P : 2a = AP;
- Les deux points A et P de l'ellipse sont caractérisés par le fait que la norme de la vitesse v est respectivement minimale et maximale. Ce sont par ailleurs les seuls points de l'ellipse où la vitesse est orthoradiale, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon vecteur.





b) Énergie mécanique d'une orbite elliptique

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse m' immobile en O, l'énergie mécanique E_m, est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$

En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P (voir Fig. 17), la vitesse se réécrit :

$v_a = v_p = r\dot{\theta} = C/r$, où C est la constante des aires. Alors :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \quad aux\ points\ A\ et\ P$$

Réécrivons cette relation comme une équation du second degré en r :

$$r^2 - \frac{1}{2}\frac{mC^2}{E_m} + \frac{Gmm'}{E_m}r = 0$$

Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives, r_A et r_p :

$$r = -\frac{1}{2}\frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\mathbf{2}}$$

Ainsi, le demi-grand axe a vérifie :

$$r_A + r_p = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

Au final, on obtient l'expression de l'énergie mécanique pour une orbite elliptique :

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2a} = -\frac{|k|}{2a}$$

II-4) trajectoire circulaire

a) Energie mécanique

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2r} = -\frac{|k|}{2r}$$

b) Première vitesse cosmique

Le cas le plus simple de trajectoire liée est la trajectoire circulaire. Son rayon est noté r. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne:

$$m\vec{a} = -\frac{Gmm'}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

$$\Rightarrow m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{Gmm'}{r^2}$$

$$\Rightarrow m\left(-r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{Gmm'}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r^3}}$$

Au final, la vitesse sur l'orbite circulaire de rayon r s'écrit :

$$v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r}}$$

où m' est la masse du centre attracteur.

On remarque donc que l'orbite circulaire est parcourue avec une vitesse de norme constante, le mouvement est circulaire uniforme. On notera que la vitesse est alors indépendante de la masse de l'objet en orbite.

Donnons quelques ordres de grandeur. Pour un satellite en orbite basse, $r \sim R_T$, oùR_T = 6 400 km est le rayon de la Terre et $m'=6{,}0.10^{24}$ kg sa masse. On obtient alors :

$$v = \sqrt{\frac{Gm'}{r}} = 7{,}9 kms^{-1}$$

C'est ce que l'on nomme la première vitesse cosmique. C'est la vitesse minimale à communiquer à un objet pour le satelliser.

c) Troisième loi de Kepler

La période du mouvement d'une masse m autour d'un astre immobile de masse m' est donnée par :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler : pour des astres orbitant autour d'un corps donné, le rapport du carré de la période sur le cube du rayon de la trajectoire a toujours la même valeur, liée à la masse du corps attracteur.

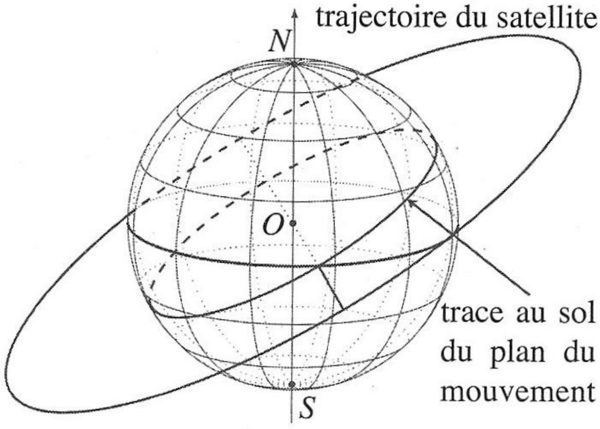
Il est à noter que la troisième loi de Kepler reste valide pour les trajectoires elliptiques, à condition de remplacer le rayon par le demi-grand axe a de l'ellipse :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

c) Satellite géostationnaire

Certains satellites de communication doivent toujours être positionnés au même endroit du ciel à partir d'un point terrestre (par exemple, certaines antennes paraboliques de télévision par satellite pointent vers un satellite donné et sont réglées une seule fois) : de tels satellites sont dits géostationnaires.

L'étude du mouvement du satellite est effectuée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, on a montré que l'orbite est située dans un plan qui contient le centre d'attraction de la force gravitationnelle. Le plan du mouvement contient donc nécessairement le centre de la Terre.



Trajectoire d'un satellite inclinée par rapport au plan équatorial.

La figure montre la trajectoire d'un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial terrestre, ainsi que l'intersection du plan du mouvement avec la sphère terrestre. Avec cette inclinaison, le satellite est situé tantôt au dessus de l'hémisphère nord et tantôt au dessus de l'hémisphère sud. Il n'est pas immobile pour un observateur terrestre qui va, au minimum, observer un mouvement apparent d'oscillations nord-sud. Le seul moyen d'éviter ce mouvement est d'annuler l'inclinaison de l'orbite. **Le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire coïncide nécessairement avec le plan équatorial de la Terre.**

Cette situation correspond à une orbite circulaire de période T 24 h. D'après l'expression de la vitesse circulaire on a :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow r = \left(\frac{Gm'T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42000km$$

soit une altitude : h =36000 km

II-5) Vitesse de libération

Au fur et à mesure qu'un objet est lancé à partir de la surface d'une planète avec une vitesse de norme de plus en plus importante, cet objet atteint des altitudes de plus en plus élevées (il s'agit ici d'une expérience de pensée vu que tous les frottements dus à l'air sont négligés). Il est intéressant de connaître la vitesse limite, pour laquelle l'objet partira au loin sans revenir, c'est ce que l'on nomme la vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique.

D'après la discussion précédente concernant la nature des trajectoires, le critère est très simple : l'objet doit posséder une énergie mécanique E_m positive.

Comme E_m est constante, on l'évalue au moment du lancer :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gmm'}{r^2} = E_m \geq 0$$

où R est le rayon de l'astre attracteur (et m' sa masse). Donc :

$$v_0 > \sqrt{\frac{2Gm'}{R}} \Leftrightarrow v_0 > \mathrm{v_{lib}} = \sqrt{\frac{2Gm'}{R}}$$

Numériquement, la vitesse de libération à la surface de la Terre est d'environ 11,2 km.s^{-1} et seulement de 2,3 km.s^{-1} à la surface de la Lune, qui est bien plus légère que la Terre.

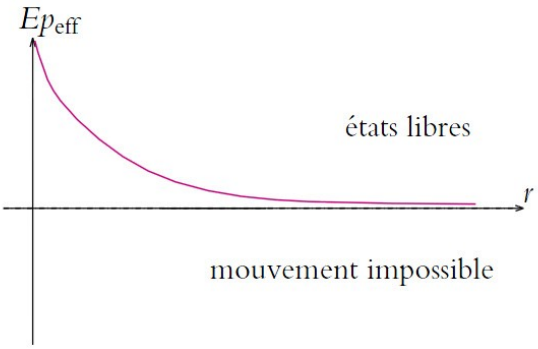
III – Champs newtoniens coulombiens

III-1) Energie potentielle effective

Dans ce cas, k > 0 et :

$E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}} > 0.$

On a donc une fonction décroissante telle que :



Énergie potentielle effective pour une interaction répulsive.

On en déduit qu'il n'y a que des états libres possibles dans le cas d'un potentiel newtonien répulsif : ce sont des trajectoires hyperboliques.

III-2) Approche documentaire : Expérience de Rutherford