

## XIII-2 Solide en rotation

### I - Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

#### I-1) Loi scalaire du moment cinétique pour un solide

On s'intéresse au mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe orienté (Oz) fixe dans un référentiel galiléen R. Son moment d'inertie par rapport à (Oz) est noté  $J_z$ . Son mouvement est caractérisé par sa vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ . Son moment cinétique par rapport à (Oz) vaut  $L_z = J_z \dot{\theta}$ . Il est soumis aux forces extérieures de moments.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz), le moment d'inertie  $J_z$  est constant, alors :

$$J_z \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sum_i M_{zi} \Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} = \sum_i M_{zi}$$

Le principe fondamental de la dynamique écrit pour un solide en translation rectiligne sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = \sum \vec{f}_{xi}$$

On remarque :

- L'accélération linéaire  $\ddot{x}$  est remplacée par l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$ .
- Les forces projetées sur l'axe du mouvement par les moments des forces projetés sur l'axe de rotation
- Et la masse inerte  $m$  par le moment d'inertie.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe (Oz) est sa caractéristique intrinsèque qui mesure son aptitude à s'opposer aux variations de vitesse de rotation autour de cet axe.

## I-2) Cas de conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

En effet, dans ce cas, la loi du moment cinétique appliquée au solide s'écrit :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi} = 0 \Rightarrow J_z \dot{\theta} = \text{cste}$$

Le moment d'inertie  $J_z$  étant une constante, la vitesse de rotation du solide l'est également.

Cas particulier d'un solide en équilibre : Un solide en rotation est à l'équilibre lorsque sa vitesse angulaire reste nulle à tout instant.

On obtient donc :

$$J_z \dot{\theta} = 0$$

La loi du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi} = 0$$

C'est un cas particulier de la situation précédente pour laquelle non seulement la somme des moments des forces est nulle, mais la vitesse angulaire initiale également.

### I-3) Couples

#### a) Couple de deux forces

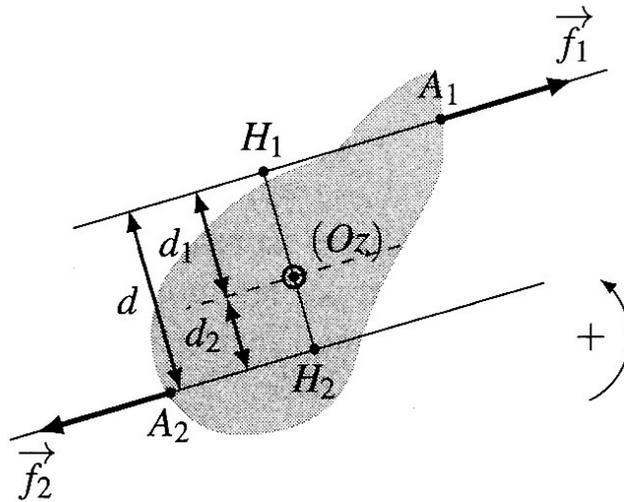
Deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  opposées s'appliquant respectivement en  $A_1$  et  $A_2$  forment un couple de forces. Leur résultante est nulle :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Ces forces sont de norme  $f$  identique et s'appliquent sur des droites d'action parallèles. La distance  $d$  entre ces droites s'appelle le bras de levier du couple et le moment du couple de force par rapport à l'axe orienté  $(Oz)$  est égal au produit de la force par le bras de levier :

$$|M_z| = f d_1 + f d_2 = f d$$

Par abus de langage, étant donné que la somme des deux forces est nulle et que seul le moment de ces forces est non nul, on désigne souvent par couple, le moment du couple par rapport à  $(Oz)$  et on le note  $\Gamma$ .



Définition d'un  
couple de force.

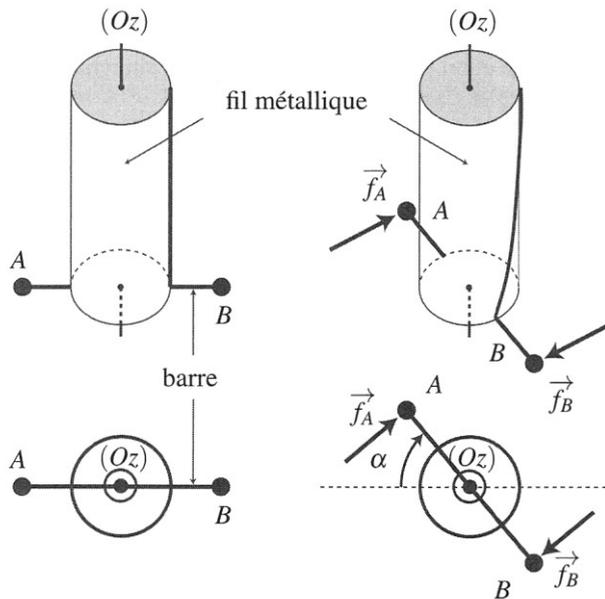
Il faut remarquer que le moment du couple  $F$  ne dépend pas de la position de l'axe de rotation. Par ailleurs, il est algébrique et on peut trouver son signe en cherchant le sens dans lequel il tend à faire tourner  $M$  autour de l'axe orienté  $(Oz)$  :

- si ce sens est direct,  $\Gamma > 0$  ;
- si ce sens est indirect,  $\Gamma < 0$ .

Sur le schéma de la figure,  $\Gamma = -fd$ .

### b) Couple de torsion

On considère un fil cylindrique métallique d'axe  $(Oz)$  dont la section supérieure est fixe et auquel on attache une barre  $AB$ . On applique un couple de forces de norme  $f$  aux extrémités  $A$  et  $B$  de la barre.



Couple de torsion d'un fil en perspective ou en vue du haut. À gauche, le fil de torsion est au repos. À droite, il est à l'équilibre sous l'action d'un couple. La section supérieure du fil est fixe.

Le moment par rapport à  $(Oz)$  de ce couple vaut  $\Gamma_1 = f \times AB$  et conduit le fil à se tordre d'un angle  $\alpha$  appelé angle de torsion. D'après la loi du moment cinétique appliquée à la barre à l'équilibre, le fil exerce sur la barre un couple de torsion de moment  $\Gamma$  tel que :

$$\Gamma + \Gamma_1 = 0 \Leftrightarrow \Gamma = -\Gamma_1$$

Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment  $\Gamma$  du couple de torsion exercé par un fil métallique est proportionnel à l'angle de torsion  $\alpha$  :

$$\Gamma = -C\alpha$$

où  $C$  est la constante de torsion du fil.

La constante de torsion  $C$  s'exprime en  $\text{N.m.rad}^{-1}$ . Elle dépend du diamètre et de la longueur du fil, ainsi que de l'élasticité en torsion du matériau qui le constitue. Le couple de torsion tend à ramener le fil vers la position de torsion nulle, on parle de couple de rappel.

### c) Couple moteur et couple de freinage

On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe ( $Oz$ ) auquel on applique un couple de moment par rapport à ( $Oz$ ) égal à  $\Gamma$ . La loi du moment cinétique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) appliquée au solide implique que :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\theta} = \Gamma$$

On suppose que le solide tourne dans le sens direct autour de ( $Oz$ ) ce qui implique que  $\dot{\theta} > 0$  et on distingue deux cas selon le signe de  $\Gamma$  :

- si  $\Gamma > 0$ ,  $\ddot{\theta} > 0$  et la vitesse angulaire du solide en rotation augmente. La rotation du solide est accélérée ;
- si  $\Gamma < 0$ ,  $\ddot{\theta} < 0$  et la vitesse angulaire du solide en rotation diminue. La rotation du solide est freinée.

On peut tenir le même raisonnement dans le cas où  $\dot{\theta} < 0$ , et au final :

- Lorsque  $\Gamma$  est du même signe que  $\dot{\theta}$ , la vitesse de rotation du solide augmente en valeur absolue. Le couple est un couple moteur ;
- Lorsque  $\Gamma$  est du signe opposé à  $\dot{\theta}$ , la vitesse de rotation du solide diminue en valeur absolue. Le couple est un couple de freinage.

## II - Application aux dispositifs rotatifs

### II-1) Définition

**Un dispositif rotatif est un dispositif dans laquelle un solide indéformable appelé rotor est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile appelé stator.**

Dans cette partie, on définit la liaison pivot qui permet de restreindre le mouvement relatif entre ces deux solides à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. On montre également qu'il est nécessaire que le stator impose un couple au rotor lorsque l'on veut réaliser un moteur ou un frein.

### II-2) Liaison pivot d'axe (Oz)

#### a) Définition

**Une liaison pivot d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.**

Dans ce chapitre, on suppose que la liaison pivot est géométriquement idéale. Dans ce cas, elle assure un guidage parfait de la rotation autour de l'axe de liaison (Oz) et elle bloque toute translation le long de (Oz). La liaison pivot est alors entièrement

définie par la direction et la position de l'axe ( $Oz$ ) que l'on précise systématiquement.

### Remarque

C'est la liaison la plus commune dans les systèmes mécaniques. Dans un simple vélo, on en compte plus d'une dizaine puisqu'elle est nécessaire pour relier au cadre les éléments suivant : roues (2), guidon (1), pédalier (1), manettes de frein (2), mâchoires de frein (2). Il y en a également pour relier les pédales au pédalier (2) et encore une bonne demi-douzaine si le vélo possède des dérailleurs.

#### b) Réalisation pratique d'une liaison pivot

Pour réaliser une liaison pivot d'axe ( $Oz$ ), la solution technique la plus courante consiste à emboîter deux cylindres de même axe et à réaliser des butées pour empêcher les cylindres de coulisser le long de leur axe commun.

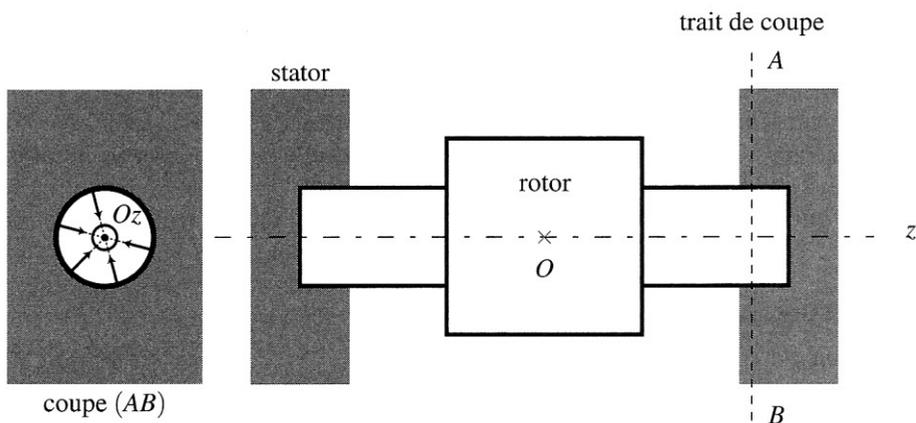


Schéma de principe d'une liaison pivot.

## Remarque

Le contact entre les deux cylindres conduit à l'existence de frottements que l'on peut réduire fortement en utilisant des roulements à billes ou à aiguilles.

### c) Liaison pivot idéale d'axe (Oz)

L'action de liaison résulte des forces exercées par le stator sur le rotor. Elle n'est pas déterminée a priori. Si l'on regarde de près les forces de contact au niveau des cylindres emboîtés (coupe (AB)), on constate que ces forces sont réparties tout au long de la surface de contact. Si l'on peut négliger les frottements, elles sont normales aux surfaces de contact et coupent l'axe de rotation (Oz). Dans ce cas, le moment par rapport à (Oz) de chacune de ces forces est nul et le moment par rapport à (Oz) de la liaison est égal à 0.

L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe (Oz) a un moment par rapport à l'axe (Oz) égal à 0 :

$$M_z(\text{pivot}) = 0$$

En pratique, malgré l'utilisation de roulements à bille ou à aiguille, il reste des forces de frottement qui produisent un couple résistant d'axe (Oz).

## II-2) Moteurs et les freins dans les dispositifs rotatifs

Un moteur est utilisé pour entraîner une autre pièce mécanique en rotation. Il exerce un couple moteur sur cette pièce et, d'après le principe des actions réciproques, cette dernière exerce un couple de freinage sur le rotor. Pour maintenir le rotor en rotation, il est donc nécessaire de compenser ce couple de freinage par un couple moteur. C'est le stator qui est chargé de produire ce couple.

Un frein est utilisé pour freiner le rotor. Pour cela, il est indispensable de lui appliquer un couple de freinage. C'est le rôle joué dans ce cas par le stator.

### Exemple

Lors du freinage d'un vélo, le rotor est la roue du vélo et le stator son cadre. Le freinage est assuré par des patins en caoutchouc qui viennent en appui sur la jante et produisent un couple de freinage sur le rotor par frottements solides.

Au final, lorsque l'on veut appliquer un couple sur le rotor, la présence du stator est indispensable pour deux raisons :

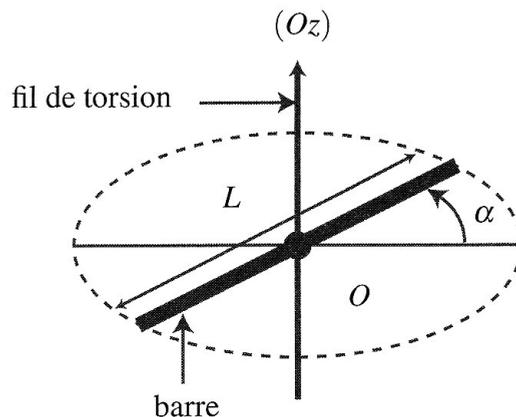
- La première, la plus évidente, est de créer un axe de rotation fixe ;
- La deuxième est de pouvoir appliquer un couple sur le rotor.

### III - Pendule de torsion

#### III-1) Position du problème

Le pendule de torsion est un instrument d'importance capitale dans l'histoire des sciences puisqu'il a servi à mettre en évidence la loi de l'interaction électrostatique de Coulomb et à réaliser la première mesure de la constante de gravitation universelle par H. Cavendish à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. La mise au point de cet instrument est attribué à C.A de Coulomb (et indépendamment à J. Michell qui le lègue à H. Cavendish). Son principal intérêt est de permettre la mesure de forces de très faible intensité (dans l'expérience de H. Cavendish, les forces mises en jeu sont de l'ordre de  $10^{-7}$  N).

On considère une barre solide horizontale de masse  $m$ , de longueur  $L$ , suspendue en son milieu  $O$  à un fil de torsion vertical de constante de torsion  $C$ . On étudie des mouvements dans lesquels le fil reste vertical et la barre tourne autour du fil avec un mouvement oscillatoire, tout en restant dans un plan horizontal.



Pendule de torsion vu en perspective.

### III-2) Équation horaire du mouvement

On définit l'axe (Oz) vertical ascendant matérialisé par le fil de torsion et on prend comme origine O du repère le point où ce fil est relié à la barre. Cette dernière est alors en rotation autour de l'axe (Oz) orienté fixe. On étudie le mouvement de la barre dans le référentiel lié au fil de torsion supposé galiléen. Sa position est repérée par l'angle  $\alpha$  qu'elle fait par rapport à sa position d'équilibre. Sa vitesse angulaire de rotation vaut  $\dot{\alpha}$ . Le moment d'inertie de la barre est noté  $J_z$ . Elle est soumise à :

- Son poids dirigé selon (Oz) qui s'applique en son centre de gravité O et dont le moment par rapport à (Oz) est donc nul ;
- la force exercée par le fil de torsion dont le moment par rapport à (Oz) est égal au moment du couple de torsion du fil :  $\Gamma = -C\alpha$ .

On applique à la barre la loi du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) fixe dans le référentiel R galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\alpha} = \Gamma = -C\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{C}{J_z}$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega_0$ .

La mesure de la période des oscillations permet de déterminer la valeur de C connaissant celle du moment d'inertie  $J_z$  de la barre :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{C}} \Leftrightarrow C = \frac{4\pi^2 J_z}{T^2}$$

Étant donné que la barre oscille autour d'une position d'équilibre stable, il est normal de trouver des oscillations harmoniques pour les petites oscillations autour de cette position. Il est plus étonnant que cette propriété soit encore valable pour les oscillations de grande amplitude. Cela est dû au fait que le moment du couple de torsion est proportionnel à l'angle de torsion pour une large plage de valeurs de cet angle.

### III-3) Intégrale première du mouvement

On peut également établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation précédente. Pour cela, on la multiplie par  $\dot{\alpha}$  :

$$J_z \ddot{\alpha} \dot{\alpha} + C \alpha \dot{\alpha} = J_z \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \right) + C \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + C \frac{\alpha^2}{2} = \text{cste} = E_m$$

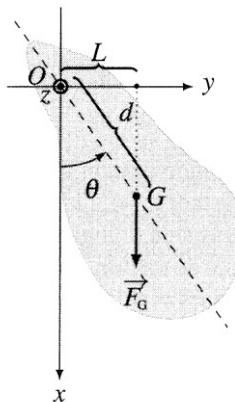
La quantité  $J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + C \frac{\alpha^2}{2} = \text{cste}$  est donc une intégrale première du mouvement homogène à une énergie. On trouve la dimension de  $E_m$ , en se rappelant que  $J(Oz)$  se mesure en  $\text{kg.m}^2$  et que  $\alpha$  est homogène à l'inverse d'un temps. On en déduit que  $J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$  se mesure en  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$  donc en joule.

- Le terme  $J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$  correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de (Oz).
- Le terme  $C \frac{\alpha^2}{2}$  est l'énergie potentielle élastique stockée dans le fil de torsion.
- Au final,  $E_m$ , représente l'énergie mécanique du système constitué de la barre et du fil de torsion.

## IV - Le Pendule pesant

### IV-1) Position du problème et équation du mouvement

Un pendule pesant est un solide de masse  $m$  de forme quelconque mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de gravité  $G$ .



Pendule pesant.

On note (Oz) l'axe de rotation du solide, G son centre de gravité et  $J_z$  son moment d'inertie par rapport l'axe (Oz). On repère la position du solide par l'angle  $\theta$  que fait la droite (OG) avec la verticale

descendante (Ox). On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz). Le solide est soumis à :

- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G. Son moment par rapport à (Oz) est égale en module au produit  $mg \times L$  où  $L = d \sin \theta$  est le bras de levier. Cette force tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre. Le signe de son moment par rapport à (Oz) est opposé à celui de  $\sin \theta$ .

Au final :

$$M_z = -mgdsin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\theta} = M_z = -mgdsin\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgdsin\theta}{J_z} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z}$$

Il s'agit de la même équation que celle que l'on a obtenue lors de l'étude du pendule simple.

Les positions d'équilibre permettent au moment du poids par rapport à (Oz) d'être égal à 0. Dans ces positions, la somme des moments des forces qui s'appliquent au pendule est nulle. On remarque que dans ce cas, le centre de gravité est sur une droite verticale partant du point d'attache O.

## IV-2) Oscillations de faible amplitude

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre  $\theta_{eq} = 0$ , et  $\sin\theta \sim \theta$  d'où :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z}$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique dont les solutions sont des sinusoides de pulsation  $\omega_0$  :

Étant donné que le solide oscille autour d'une position d'équilibre stable, il est normal de trouver des oscillations harmoniques pour les petites oscillations autour de cette position. Ces oscillations présentent la propriété remarquable d'avoir une période indépendante de l'amplitude (isochronisme des petites oscillations). La mesure de cette période permet de déterminer la valeur de  $J_z$ , connaissant la position du centre de gravité, la masse du solide et la valeur de l'accélération de pesanteur.

## IV-3) Intégrale première du mouvement et étude qualitative

### a) Intégrale première du mouvement

Soit :

$$J_z \ddot{\theta} + mgd \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow J_z \ddot{\theta} + mgd \dot{\theta} \sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 - mgd \cos\theta \right) = 0$$

Donc :

$$\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 - mgd \cos\theta = E_m = \text{cste}$$

- Le terme  $\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$  correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de l'axe (Oz).
- Le terme  $-mgd\cos\theta$  est l'énergie potentielle de pesanteur du solide car  $-d\cos\theta$  est l'altitude du centre de gravité G comptée à partir de O

### b) Étude qualitative du mouvement

Pour réaliser une étude qualitative du mouvement, on utilise la démarche décrite dans le chapitre « Mouvement dans un puits de potentiel » et on l'adapte au cas d'une variable angulaire.

On trace l'énergie potentielle sans dimension :

$$E_p^* = \frac{E_p}{mgd} = -\cos\theta$$

L'énergie potentielle est minimale lorsque  $\theta$  est égal à 0 modulo  $2\pi$  pour lesquels le centre de gravité G du pendule pesant est situé en dessous de O et à sa verticale. Ces minima correspondent à la position d'équilibre stable du pendule pesant.

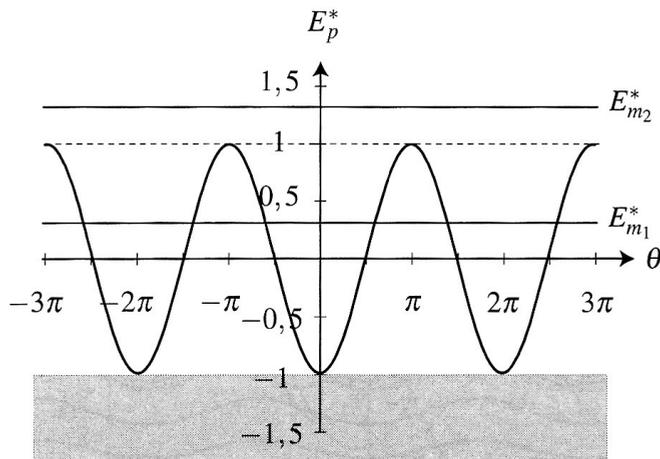
L'énergie potentielle est maximale lorsque  $\theta$  est un multiple impair de  $\pi$ . Ces maxima correspondent à la position d'équilibre instable du pendule pour laquelle G est à la verticale de O et au dessus.

On trace la droite horizontale d'ordonnée  $E_m^* = \frac{E_m}{mgd}$  qui doit être supérieure à  $E_p^*$  et doit donc se situer au dessus de la zone grisée. Deux cas se présentent alors :

- Si  $-1 < E_m^* < 1$ , le pendule pesant est dans un état lié. Il n'a pas l'énergie mécanique suffisante pour sortir du puits de potentiel

et on observe un mouvement pendulaire dont on peut déterminer l'amplitude graphiquement ;

- Soit  $E_m^* > 1$ , le pendule pesant est dans un état de diffusion avec une énergie suffisante pour sortir du puits de potentiel. Les mouvements sont alors des mouvements de révolution.



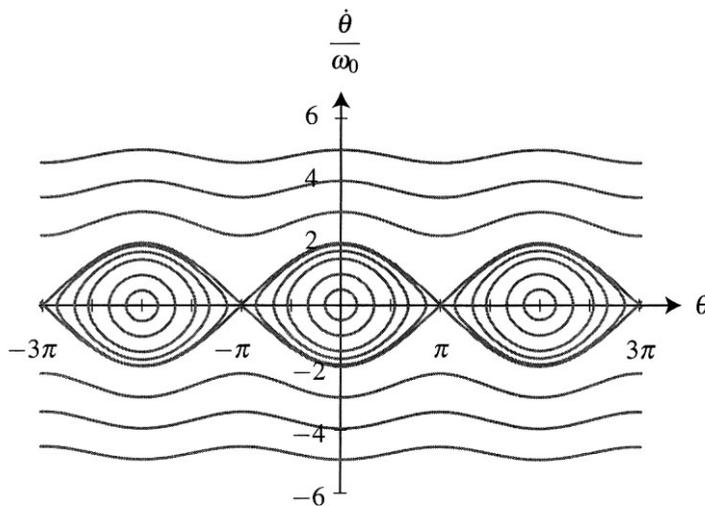
Énergie potentielle d'un pendule pesant. En pointillé, l'énergie mécanique minimale nécessaire pour obtenir un mouvement de révolution.

#### IV-4) Portrait de phase

On peut utiliser l'intégrale première du mouvement pour expliciter la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de l'angle  $\theta$  et de l'énergie mécanique  $E_m$ . On trouve :

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \mp \sqrt{2 \left( \frac{E_m}{mgd} + \cos \theta \right)}$$

On trace alors  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $\frac{E_m}{mgd}$  pour obtenir le portrait de phase du pendule pesant.



Portrait de phase d'un pendule pesant.

- Les mouvements de faible amplitude sont pendulaires : le pendule réalise un mouvement de va et vient entre deux positions extrêmes. En ces positions extrêmes, l'énergie cinétique s'annule ce qui implique que :  $E_p(\pm\theta_m) = E_m$  où  $\theta_m \in [0, \pi[$ . L'angle  $\theta$  oscille périodiquement dans l'intervalle  $]-\theta_m, \theta_m [$ . Le portrait de phase est similaire à celui d'un point matériel dans un puits de potentiel quelconque : lorsque l'amplitude est faible, les trajectoires de phase sont elliptiques (et même circulaires avec des échelles des abscisses et des ordonnées adaptées), ce qui est la signature des oscillateurs harmoniques ;

- Lorsque l'amplitude devient importante, la trajectoire de phase se déforme mais reste fermée.
- Pour des énergies plus importantes, le mouvement est révolutif : le pendule effectue une succession de tours complets toujours dans le même sens. L'angle  $\theta$  n'est plus borné (si l'on néglige les frottements) et varie de  $2\omega$  à chaque tour. La vitesse est maximale lorsque le centre de gravité du pendule atteint son point le plus bas et minimale au point le plus haut.

La transition entre ces deux types de mouvement a lieu lorsque l'énergie mécanique devient supérieure à l'énergie potentielle maximale, ce qui permet au pendule de s'échapper du puits de potentiel et d'être dans un état de diffusion. On en déduit que :

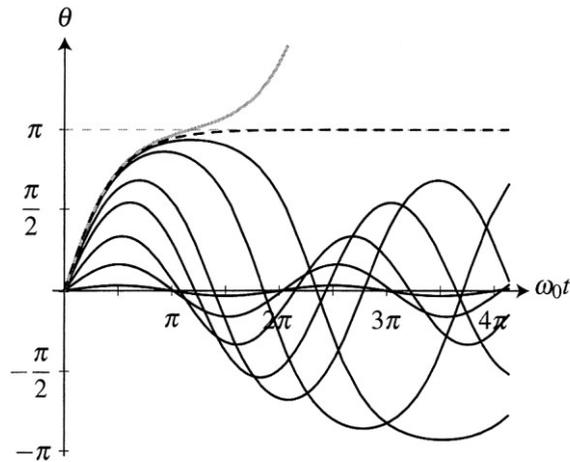
$$E_{m,transition} = mgd.$$

#### IV-5) Résolution numérique

On peut également résoudre numériquement l'équation et trouver l'évolution temporelle de l'angle  $\theta$ . Pour cela, il faut choisir une position et une vitesse angulaire initiale à procurer au pendule. La figure représente les solutions de l'équation pour les conditions initiales  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ , où la vitesse angulaire initiale est un paramètre ajustable. Sur cette figure,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  prend les valeurs : 0, 1 ; 0,5 ; 1, 0 ; 1, 5 ; 1,75 ; 1,9 ; 1, 99 ; 2,0 ; et 2,01.

Le mouvement révolutif correspond à une fonction  $\theta(t)$  monotone croissante (en trait continu gris obtenue pour  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = 2, 01$ ,

tandis que les mouvements pendulaires correspondent à des fonctions  $\theta(t)$  périodiques (en trait continu noir obtenues pour  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  compris entre 0 et 1, 99). La courbe obtenue pour  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = 2$  est la courbe en pointillés qui fait la transition entre ces deux comportements très différents. Les mouvements pendulaires ayant lieu dans un puits de potentiel qui n'est pas harmonique, seules les oscillations de faible amplitude sont sinusoïdales et isochrones.



Évolution temporelle de l'angle  $\theta$  : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolutif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

## V - Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

### V-1) Énergie cinétique d'un solide en rotation

On modélise le solide par un ensemble de points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$  repérés en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ . On a vu que le moment d'inertie du solide par rapport à  $(Oz)$  vaut alors :

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

Par ailleurs, on a vu dans le chapitre Cinématique du solide qu'un point  $M_i$  quelconque du solide est en mouvement circulaire de rayon  $r_i$  à la vitesse angulaire commune  $\dot{\theta}$ .

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

Un solide de moment d'inertie  $J_z$  en rotation autour d'un axe fixe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

### V-2) Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation

On considère une force  $\vec{F}_i$  qui s'applique au point  $M_i$  d'un solide en rotation autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ . La puissance de la force  $\vec{F}_i$  est égale au produit scalaire de la force par la vitesse du point  $M_i$  sur laquelle elle s'applique d'où :

$$P(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_i \cdot r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = F_i r_i \dot{\theta} = M_{zi} \dot{\theta}$$

La puissance de la force  $f$  appliquée en un point  $M_i$  d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz), est égale au produit du moment par rapport à (Oz) de cette force par la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  de rotation du solide autour de cet axe :

### V-3) Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Dans le référentiel R galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures  $\vec{F}_i$  qu'on lui applique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f}_i)$$

Pour établir cette loi, on dérive l'expression de l'énergie cinétique et on trouve :

$$J_z \ddot{\theta} = \sum_i P(\vec{f}_i)$$

Or, la loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) fixe implique :

$$J_z \ddot{\theta} = \sum_i M_z(\vec{f}_i)$$

Donc :

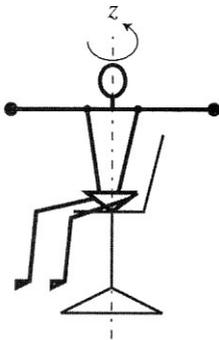
$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta}$$

La démonstration de la loi de l'énergie cinétique montre qu'elle est équivalente à la loi du moment cinétique autour d'un axe fixe. Pour étudier un solide en rotation autour d'un axe fixe, les lois de l'énergie cinétique ou du moment cinétique sont équivalentes et donnent des équations identiques.

#### V-4) Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

##### a) Observation préliminaire : le tabouret d'inertie

On considère une personne portant un haltère dans chaque main et assise sur un tabouret pivotant d'axe de rotation ( $Oz$ ) vertical ascendant. On le met en rotation alors qu'il a les bras tendus et il replie les bras. Sa vitesse de rotation augmente significativement, et d' autant plus que les haltères qu'il porte sont lourds.



Rotation lente  
avec les bras tendus.



Rotation rapide  
avec les bras repliés.

On peut expliquer ce changement de vitesse en considérant le système constitué de la personne assise, de la partie mobile du tabouret (rotor) et des haltères. Les forces extérieures s'exerçant sur le système sont réduites au poids dirigé selon  $-\vec{u}_z$ , et à l'action de la

liaison pivot d'axe (Oz) supposée idéale. Le moment de ces deux actions par rapport à l'axe de rotation (Oz) est nul. En effet :

- $M_z(\text{poids}) = (\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{u}_z = 0$
- Et le moment d'une liaison idéale est nul.

D'après la loi du moment cinétique, le moment cinétique du système se conserve. Or :

- bras tendus, le moment d'inertie du système est  $J_R$  ;
- bras repliés, son moment d'inertie est  $J_R < J_T$ .

En effet, les haltères se rapprochent de l'axe lorsque les bras sont repliés donc leurs contributions au moment d'inertie diminuent.

En notant  $\dot{\theta}_R$  et  $\dot{\theta}_T$  les vitesses de rotations bras tendus (indice T) et bras repliés (indice R), la conservation du moment cinétique implique :  $J_R \dot{\theta}_R = J_T \dot{\theta}_T$

Quand on pousse la réflexion un peu plus loin, on voit apparaître un effet inattendu : l'énergie cinétique de rotation augmente dans les mêmes proportions que la vitesse de rotation. En effet, l'énergie cinétique bras tendus valait :

$$E_{CT} = \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}_T^2$$

Bras repliés, elle vaut :  $E_{CR} = \frac{1}{2} J_R \dot{\theta}_R^2$

Donc :

$$E_{CR} = \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}_T \dot{\theta}_R = \frac{\dot{\theta}_R}{\dot{\theta}_T} E_{CT}$$

Or, au cours du changement de position, le centre de gravité du système reste dans un plan horizontal. Le travail du poids est donc nul. La liaison pivot est idéale donc elle ne travaille pas.

Des forces que l'on n'a pas envisagées fournissent un travail qui permet cette augmentation d'énergie. Ce sont les forces intérieures. Il s'agit ici des forces musculaires exercées par la personne assise pour plier ses bras. Ces forces ne sont jamais intervenues jusque là, car leur puissance est nulle lorsque le système est indéformable.

**Lorsqu'un système se déforme, les forces intérieures fournissent une puissance non-nulle. Il faut en tenir compte dans la loi de l'énergie cinétique.**

**La puissance des forces intérieures est nulle lorsque le système est indéformable.**

b) Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

L'énergie cinétique du système de point est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :  $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Dans le référentiel R galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures et intérieures qui s'exercent sur lui :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i,int} P(\vec{f}_i) + \sum_{j,ext} P(\vec{f}_j)$$

L'évaluation de la puissance des forces est alors délicate et ne peut être menée à bien que dans des situations simples.