I – OSCILLATEUR HARMONIQUE

L'un des systèmes les plus étudiés en physique, à différents niveaux de complexité, est l'oscillateur harmonique. Nous allons nous intéresser en détail à son comportement.

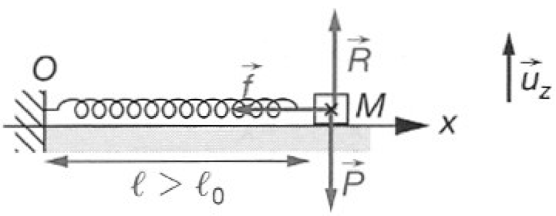
I – Etude dynamique du mouvement

I-1) Force de rappel exercée par un ressort

Considérons une masse m de petite dimension, dont la position est repérée par le point M, glissant sans frotter sur le sol, attachée à un ressort dont l'autre extrémité est fixée au point O.

Un ressort est un dispositif mécanique pouvant se déformer, c'est-à-dire en pratique s'allonger et se raccourcir dans une certaine direction, ici choisie comme axe Ox. Le ressort peut être décrit en première approximation par une seule variable, sa longueur, notée l. Sans contrainte, cette longueur est appelée longueur à vide l_0. Dans le cas général, la longueur du ressort est différente de sa longueur à vide :

- si $l > l_0$, le ressort est étiré et tend à vouloir se raccourcir en exerçant sur la masse m une force de rappel f telle que : $\vec{f}.\overrightarrow{u_x} \leq 0$.
- inversement, s'il est comprimé ($l < l_0$), le ressort a tendance à essayer de s'étirer en exerçant une force de sens opposé sur la masse m.



De plus, le ressort exerce des forces d'autant plus intenses qu'il est très étiré ou raccourci. Il s'agit alors de donner une expression mathématique satisfaisant à la description précédente. Le plus simple est de prendre une dépendance linéaire par rapport à l'allongement $l- l_0$ du ressort.

La force exercée par un ressort (parfois appelée tension) sur un point matériel attaché à une extrémité est donnée par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\vec{f} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_x}\ (en\ N)}$$

où k est une constante appelée raideur du ressort en Nm^{-1}

Le signe moins est essentiel : il traduit le fait qu'un ressort étiré a tendance à vouloir se raccourcir. C'est ce que l'on nomme une force de rappel. Selon les conventions utilisées, une erreur de signe peut facilement être commise lors de l'écriture de la force. C'est pourquoi il est essentiel, à chaque fois que l'on exprime cette force, de vérifier que celle-ci est orientée dans le bon sens. Dans le cadre de la figure 1, on a explicitement $\vec{f} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_x}$. En effet, on vérifie $\vec{f}.\overrightarrow{u_x} \leq 0$ si $l \leq l_0$: le ressort allongé cherche à se raccourcir et exerce sur la masse une force la tirant vers la gauche.

La raideur indique si le ressort est « facile » à étirer. Étirer un ressort de forte raideur nécessite une force de norme importante.

I-2) Equation du mouvement

Le système est constitué de la masse m, assimilée à un point matériel repéré par M, étudiée dans le référentiel terrestre galiléen. La masse est supposée avoir un mouvement purement horizontal, dirigé selon l'axe Ox.

Les forces exercées sur la masse sont :

- son poids
- la réaction du support verticale car mouvement sans frottement
- la force de rappel

D'où :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$$

Projetons sur Ox et Oz :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$
$$et\ m\ddot{z} = 0 = R - mg$$

Donc mg=R et $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$

Ce type d'équation en x(t) relié à ses dérivées se nomme équation différentielle. Ici on parle d'équation du second ordre car l'ordre de la dérivée la plus élevée est deux.

II – Résolution de l'équation du mouvement

II-1) Position à l'équilibre

La position à l'équilibre est déterminée par $\dot{x}_{eq} = 0\ et\ \ddot{x}_{eq} = 0$, par conséquent dans le cas du ressort horizontal on a $x_{eq} = l_0$

On remarque donc que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{eq} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$$

Posons $X = x - x_{eq}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

D'où :

$$\boldsymbol{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

II-2) Résolution mathématique

Pour une équation différentielle du type :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_0$$

La solution s'écrit $X=X_h+X_p$ où :

- X_h : solution homogène de l'équation $\ddot{X}_h + \omega_0^2 X_h = 0$
- X_p : solution particulière de l'équation ici une constante car le second membre est constant.

La solution homogène de l'équation $\ddot{X}_h + \omega_0^2 X_h = 0$ peut s'écrire :

$$X_h =, Acos(\omega_0\ t + \varphi)$$
$$ou\ X_h = Acos(\omega_0\ t) + Bsin(\omega_0\ t)$$

Où A,B,φ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Vu que $\ddot{X}_p = 0$, on a $\ddot{X}_p + \omega_0^2 X_p = \omega_0^2 X_0 \Leftrightarrow X_p = X_0$

Par conséquent la solution de :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \; est \; X = Acos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \; est \; x = x_{eq} + Acos(\omega_0 t + \varphi)$$

Ce qui est identique.

II-3) Cas particuliers

a) $x(0) = x_m \; et \; \dot{x}(0) = 0$

Dans ce cas on a :

- $x_m = x(0) = x_{eq} + Acos(\omega_0 * 0 + \varphi) = x_{eq} + Acos(\varphi)$
- $0 = \dot{x}(0) = -A\omega_0 sin(\varphi) \; d'où \; \varphi = 0 \; [\pi]$

Si $\varphi = 0 \; alors \; x_m = x_{eq} + A \Leftrightarrow A = x_m - x_{eq}$

Donc :

$$x = x_{eq} + (x_m - x_{eq}) cos(\omega_0 t)$$

b) $x(0) = x_{eq} \; et \; \dot{x}(0) = v_0$

Dans ce cas on a :

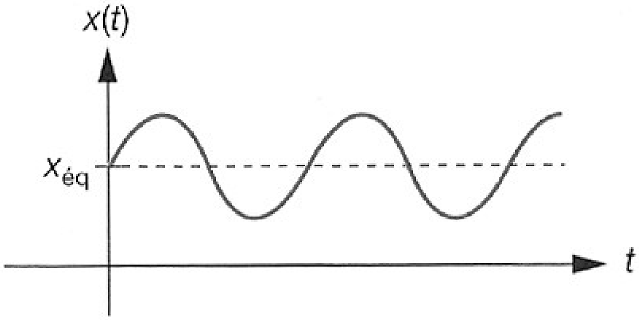
- $x_{eq} = x(0) = x_{eq} + Acos(\omega_0 * 0 + \varphi) = x_{eq} + Acos(\varphi)$
$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$$
- $v_0 = \dot{x}(0) = -A\omega_0 sin(\varphi)$

$Si \; \varphi = \frac{\pi}{2} \; alors \; v_0 = -A\omega_0 \Leftrightarrow A = -{}^{v_0}/_{\omega_0}$

Donc :

$$x = x_{eq} - {}^{v_0}/_{\omega_0} \, cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = x_{eq} + X_0 sin(\omega_0 t) \; où \; X_0 = {}^{v_0}/_{\omega_0}$$

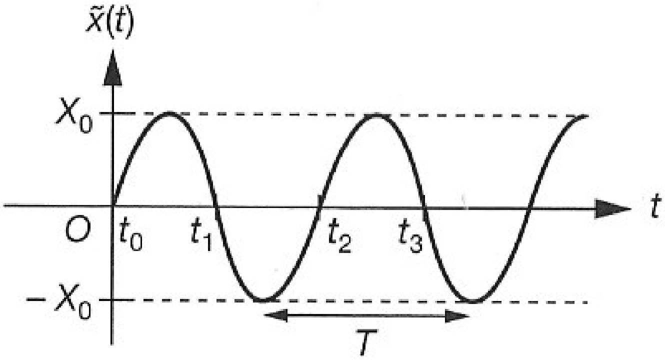
Sans surprise, le mobile effectue des oscillations de part et d'autre de la position d'équilibre. Ces oscillations sinusoïdales sont dites harmoniques et on nomme oscillateur harmonique un système vérifiant une équation différentielle du type : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$



II-4) Mouvement sinusoïdal rectiligne

a) Les différentes grandeurs

Revenons au cas précédent pour lequel : $X = X_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$ où :



- X_0 représente l'amplitude du mouvement
- $(\omega_0 t + \varphi)$ la phase, par un changement d'origine on peut avoir le déphasage $\varphi = 0$
- ω_0 est la pulsation propre et est reliée à la période par : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- la fréquence est reliée à la pulsation par : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

b) Vitesse et accélération

La vitesse est définie par $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dX}{dt}\overrightarrow{u_x}$

D'où :

$$\vec{v} = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\overrightarrow{u_x}$$

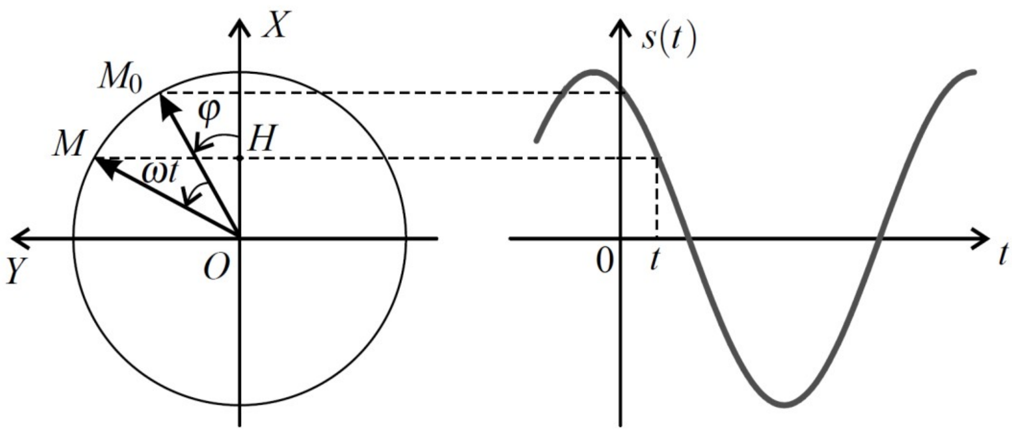
$$\Leftrightarrow \vec{v} = \omega_0 X_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega_0 t + \varphi\right)\overrightarrow{u_x} \;\; car\ cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

Par conséquent la vitesse est déphasée de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport à la position : on dit que v et x sont en quadrature

L'accélération est définie par $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2}\overrightarrow{u_x} = -\omega_0^2 X\,\overrightarrow{u_x}$
Par conséquent $\vec{a}\ et\ \overrightarrow{OM}$ sont en opposition de phase

III - Représentation de Fresnel

III-1) Approche géométrique



Mouvement circulaire et signal sinusoïdal.

On peut donner du signal sinusoïdal s(t)=Acos(ωt+φ) une image géométrique. On considère le cercle de rayon A centré à l'origine du repère orthonormé (OXY) et sur le cercle le point M_0 tel que l'angle entre le vecteur directeur $\overrightarrow{u_x}$ de l'axe (OX) et le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ vaut φ. Soit un point M se déplaçant sur le cercle avec la vitesse angulaire ω et passant par M_0 à l'instant initial. L'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'axe (OX) à l'instant t est θ(t) =ωt+φ et l'abscisse de ce point est :

$$X_M(t) = OH = OM\cos(\omega t + \varphi) = A cos(\omega t + \varphi) = s(t)$$

Le signal sinusoïdal est ainsi l'abscisse d'un point tournant à la vitesse angulaire ω.

III-2) Définition du vecteur de Fresnel

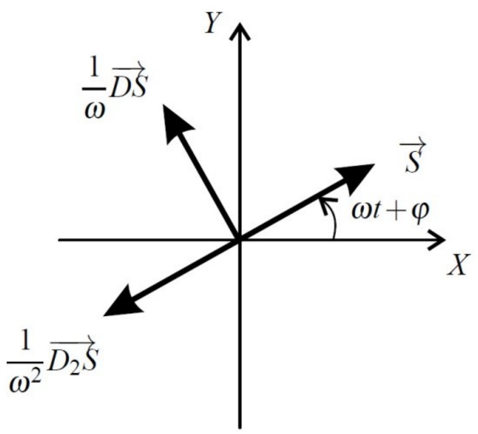
On associe au signal s(t)=Acos(ωt+φ) un vecteur appelé vecteur de Fresnel, qui a une norme égale à A et qui fait, à l'instant t, l'angle (ωt+φ) avec l'axe des abscisses.

Ce vecteur tourne autour de l'origine à la vitesse angulaire ω. Il s'agit du vecteur $\overrightarrow{OM}$ du paragraphe précédent. On le notera $\vec{S}$.

III-3) Vecteur de Fresnel du signal dérivé

La dérivée par rapport au temps d'un signal sinusoïdal s(t)=Acos(ωt+φ) est aussi un signal sinusoïdal, en effet :

$$\frac{ds}{dt} = -\omega A sin(\omega t + \varphi) = \omega A cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



L'amplitude de $\frac{ds}{dt}$ est égale à l'amplitude de $s(t)$ multipliée par ω et sa phase initiale est égale à la phase initiale de $s(t)$ augmentée de $\frac{\pi}{2}$

Ainsi :

Le vecteur de Fresnel associé à $\frac{ds}{dt}$ s'obtient à partir du vecteur de Fresnel associé à s(t) en effectuant les opérations suivantes :

- **On tourne le vecteur d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique**
- **On multiple la norme du vecteur par ω.**

Le vecteur de Fresnel relatif à $\frac{ds}{dt}$ sera noté $\overrightarrow{DS}$ et celui à $\frac{d^2s}{dt^2}$ sera noté $\overrightarrow{D_2S}$

Si on dérive le signal deux fois, on tourne le vecteur d'un angle π et on multiplie sa norme par ω^2. Ainsi $\boldsymbol{\overrightarrow{D_2S} = -\omega^2\vec{S}}$

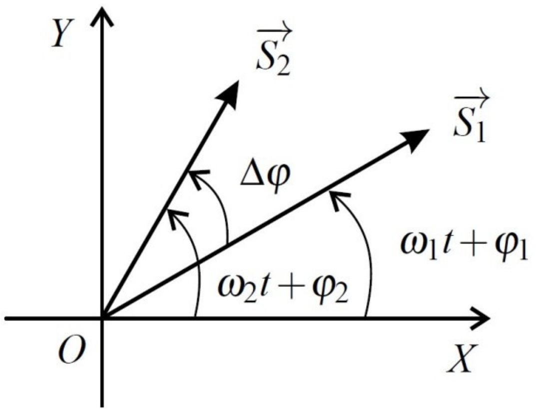
Cette relation n'est autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation propre ω dont le signal sinusoïdal est solution.

III-4) Déphasage

On considère deux signaux sinusoïdaux : $s_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ et $s_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$. On appelle déphasage de s_2 par rapport au signal s_1 la différence entre leurs phases instantanées :

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$$

Le déphasage est visible dans la représentation de Fresnel : il s'agit de l'angle allant du $\overrightarrow{S_1}$ au vecteur $\overrightarrow{S_2}$



Quand les deux signaux sinusoïdaux ont la même fréquence leur déphasage est constant dans le temps et égal à la différence de leurs phases initiales :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Dans la suite on se place uniquement dans ce cas.

IV – Aspects énergétiques

IV-1) Energie potentielle élastique

Il sera admis que l'énergie potentielle élastique associée à la force de rappel du ressort s'écrit :

$$Si\ \overrightarrow{f} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_x} \text{ alors } \mathrm{E_{pe}} = \frac{1}{2}\mathrm{k}(l - l_0)^2$$

Par conséquent : $\mathbf{E_{pe}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{k}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0})^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{kX^2} = \frac{1}{2}\mathrm{k}X_0^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

IV-2) Energie cinétique

Par définition $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$

D'où $E_c = \frac{1}{2}m(\omega_0 X_0)^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

IV-3) Energie mécanique

Par définition :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\omega_0 X_0)^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}\mathrm{k}X_0^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}\mathrm{k}X_0^2[cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{E_m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{k}\boldsymbol{X_0^2} = \mathbf{CSTE}$$

L'oscillateur harmonique possède donc une énergie mécanique constante en accord avec l'absence de phénomènes dissipatifs.