

# TPDS A – Effet de peau et comportement inductif d'un rhéostat

## I - Modélisation de l'évolution de la résistance d'un fil avec la fréquence

1) A basses fréquences on peut écrire :

$$e^{-a\sqrt{f}} = 1 - a\sqrt{f} + \frac{a^2 f}{2} + o(a^2 f)$$

$$\Rightarrow R = \frac{R_0}{2} \frac{1}{\frac{1}{a\sqrt{f}} + \frac{1}{a^2 f} \left(1 - a\sqrt{f} + \frac{a^2 f}{2} - 1\right)}$$

$$\Rightarrow R = R_0 \text{ si } a\sqrt{f} \ll 1$$

2) Vérification du modèle

$$dG = \frac{\gamma_0}{L} e^{\frac{r-r_0}{\delta}} 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow \underbrace{G(r_0)}_G - \underbrace{G(0)}_0 = \int_0^{r_0} \frac{\gamma_0}{L} e^{\frac{r-r_0}{\delta}} 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow G = 2\pi \frac{\gamma_0}{L} e^{-\frac{r_0}{\delta}} \int_0^{r_0} \underbrace{r}_u \underbrace{e^{\frac{r}{\delta}}}_{v'} dr$$

Or :

$$G_0 = \frac{\gamma_0 S}{L} = \frac{\gamma_0}{L} \pi r_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{G}{G_0} = \frac{2e^{-\frac{r_0}{\delta}}}{r_0^2} \left( \left[ \underbrace{r}_u \underbrace{\frac{\delta e^{\frac{r}{\delta}}}{\delta}}_v \right]_0^{r_0} - \int_0^{r_0} \underbrace{1}_u \underbrace{\frac{\delta e^{\frac{r}{\delta}}}{\delta}}_v dr \right)$$

$$\Rightarrow \frac{G}{G_0} = \frac{2e^{-\frac{r_0}{\delta}}}{r_0^2} \left( \delta r_0 e^{\frac{r_0}{\delta}} - \delta^2 e^{\frac{r_0}{\delta}} + \delta^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{G}{G_0} = 2 \left( \frac{\delta}{r_0} - \frac{\delta^2}{r_0^2} + \frac{\delta^2}{r_0^2} e^{-\frac{r_0}{\delta}} \right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{R_0}{2} \frac{1}{\frac{\delta}{r_0} - \frac{\delta^2}{r_0^2} + \frac{\delta^2}{r_0^2} e^{-\frac{r_0}{\delta}}}$$

On pose :

$$\frac{r_0}{\delta} = a\sqrt{f}$$

$$\Rightarrow R = \frac{R_0}{2} \frac{1}{\frac{1}{a\sqrt{f}} + \frac{1}{a^2 f} (e^{-a\sqrt{f}} - 1)}$$

## II - Étude de l'impédance du rhéostat

3) Mesurer l'impédance du rhéostat en régime continu.

- On pouvait le faire à l'ohmmètre en se souvenant que seul le composant à étudier doit être connecté.

$$R = 100,2 \pm 0,5 \Omega$$

L'incertitude est calculé à partir de la notice du ohmmètre.

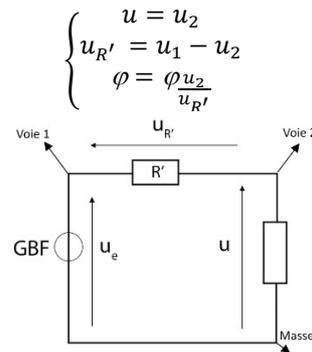
- A l'aide d'un montage Voltmètre/Ampèremètre courte ou longue dérivation.

4) On note  $\underline{Z}(f) = R(f) + jX(f)$  l'impédance du rhéostat.

Or :  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$

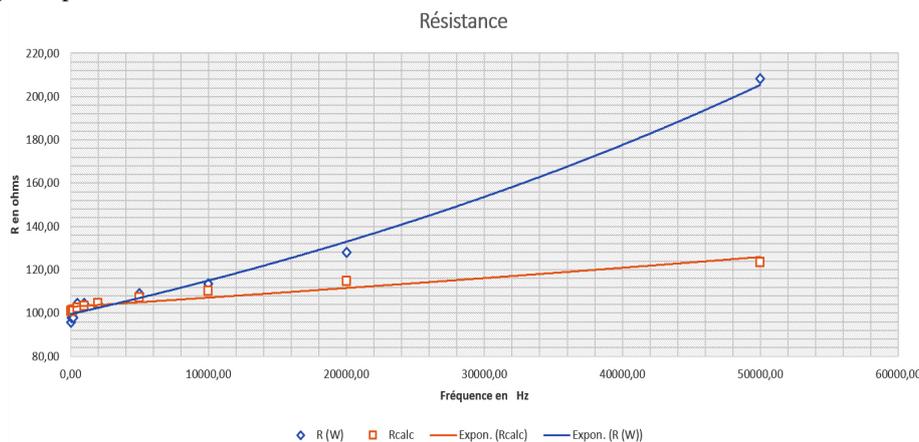
Donc :  $R = Z \cos \varphi$  et  $X = R \sin \varphi$  avec  $Z = \frac{u}{i} = R' \frac{u}{u_{R'}}$

- 5) La masse étant imposée par le GBF on ne peut pas mesurer directement  $u$  et  $u_{R'}$ . À l'aide du montage suivant on a donc :



À l'aide d'un tableur on peut donc tracer la courbe  $R(f)$  suivante :

- En bleu les points expérimentaux.
- En rouge les points calculés à base du modèle.



Le modèle proposé d'effet de peau est valable sur une large bande de fréquences, cependant les mesures effectuées de  $R(f)$  sont pertinentes qu'à basses fréquences. En effet à haute fréquence la réactance devient importante et  $\cos\varphi$  tend petit à petit vers zéro. La qualité de mesure de  $\varphi$  va devenir prépondérante dans le calcul de  $R$  ce qui entraîne des mesures délicates de  $R(f)$ .

On a la valeur de  $R_0$ , on fait varier  $a$  jusqu'à avoir une superposition des deux courbes ou des valeurs (jusqu'à 5/10 kHz à peu près). On obtient pour le « Metrel »  $106\Omega$  :

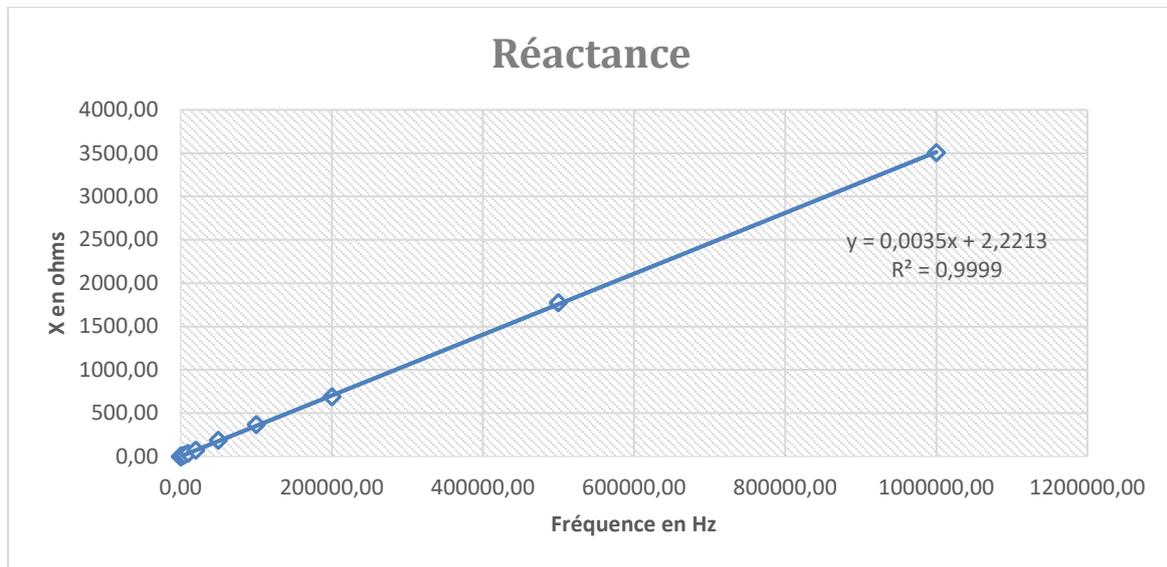
$$a = 0,0030 \pm 0,0005 \text{ s}^{+\frac{1}{2}}$$

(Incertitude calculée par tâtonnement de la valeur de  $a$ )

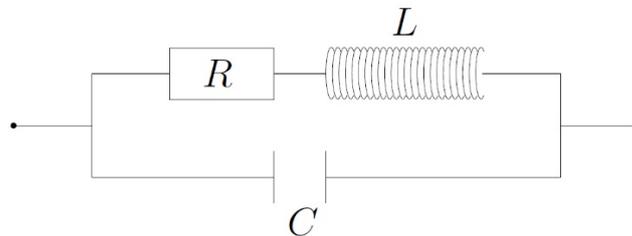
- 6) Pour le « Metrel » la modélisation est adaptée jusqu'à 5/10 kHz. Le modèle utilisé est trop simpliste à haute fréquence. Il faut rajouter un condensateur en parallèle sur  $R, L$ .
- 7) La modélisation est de qualité, vu le résultat du coefficient de corrélation proche de 1, et on obtient :

$$\begin{aligned} 2\pi L &= 0,0035 \\ \Rightarrow L &= 0,56 \pm 0,02 \text{ mH} \end{aligned}$$

(incertitude récupérée sur le tableur)



- 8) On a un modèle (R,L), la capacité apparaissant à très haute fréquence on doit faire intervenir celle-ci en parallèle par le modèle suivant :



Tel que :

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z} + jC\omega \Rightarrow Z_T = \frac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{R(1 - LC\omega^2 - jRC\omega) + jL\omega(1 - LC\omega^2 - jRC\omega)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

$$\Rightarrow Z_T = \frac{R(1 - LC\omega^2 + LC\omega^2) + j(L\omega(1 - LC\omega^2) - R^2C\omega)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R'(f) = \frac{R}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \\ X'(f) = L\omega \frac{1 - LC\omega^2 - \frac{R^2C}{L}}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \end{cases}$$

- 9) On dérive  $R'$  tel que :

$$\frac{dR'}{df} = 0 \Rightarrow -2LC(2\omega)(1 - LC\omega^2) + 2\omega R^2 C^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2LC(1 - LC\omega^2) + R^2 C^2 = 0$$

$$\Rightarrow (1 - LC\omega^2) = \frac{R^2 C^2}{2LC}$$

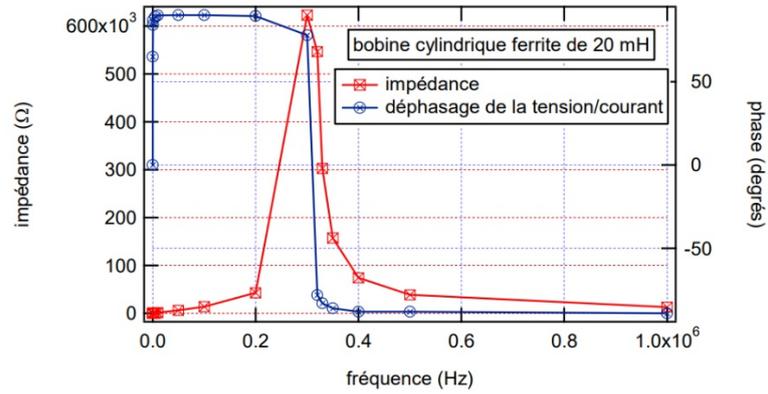
$$\Rightarrow C \left( L\omega^2 + \frac{R^2}{2L} \right) = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\left( L\omega^2 + \frac{R^2}{2L} \right)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2L}{2L^2\omega^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2L}{R^2 + 2L^2(2\pi f_{res})^2}$$

10)



Sur le modèle utilisé :  $f_{res} = 320 \pm 20 \text{ kHz} \Rightarrow C = \frac{2 \times 0.56 \cdot 10^{-3}}{100.2^2 + 2 \times (0.56 \cdot 10^{-3})^2 \times (6.28 \times 320000)^2} = 0,282 \text{ pF}$

L'incertitude est assez délicate à calculer mais la cause principale étant la lecture de la fréquence on peut écrire que :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{2 \Delta f_{res}}{f_{res}} = 0,125$$

$$\Rightarrow C = 0,282 \pm 0,035 \text{ pF}$$