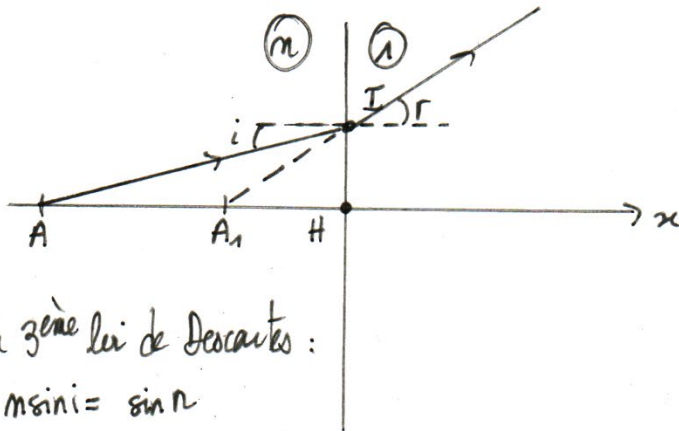


Physique : DS7

Partie I : Capteur d'empreinte digitale (Centrale MP - 2019)

Q1)

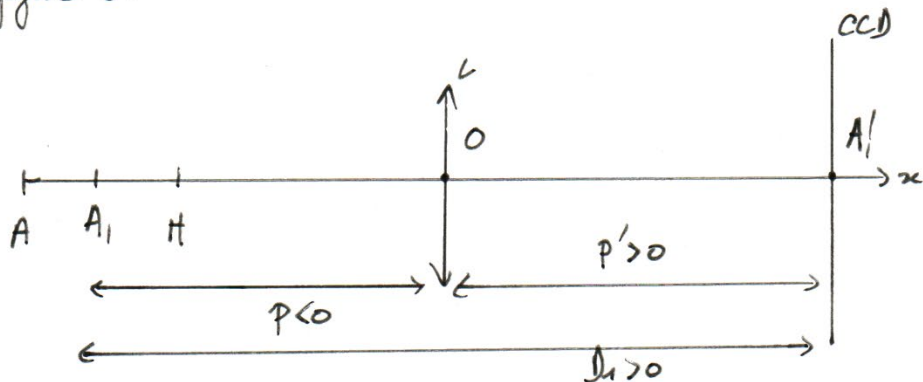


D'après la 3^{ème} loi de Descartes :
 $m \sin i = \sin r$

Dans les conditions de Gauss les rayons sont paraxiaux d'où : $\begin{cases} \sin i \approx i \\ \sin r \approx r \end{cases}$

$$\text{or } \begin{cases} \tan i = \frac{\overline{IH}}{\overline{HA}} \\ \tan r = \frac{\overline{IH}}{\overline{HA_1}} \end{cases} \quad \text{d'où } m \frac{\overline{IH}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{HA_1}} \Leftrightarrow \underline{\overline{HA_1} = \frac{1}{m} \overline{HA}}$$

Q2) D'après la figure 3 :



$$\text{D'après Descartes : } \begin{cases} \frac{1}{\overline{OA'_1}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{p'}} - \frac{1}{\overline{p}} \text{ avec } D_1 = \overline{p'} - \overline{p} \text{ (1)} \\ \text{et} \\ \gamma = \frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\overline{p'}}{\overline{p}} \text{ (2)} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \\ \text{et} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} D_1 = \gamma p - p \\ p' = \gamma p \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{D_1}{\gamma - 1} \\ p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{On remplace dans } \textcircled{3} : \frac{1}{f'} &= \gamma - 1 \left(\frac{1}{\gamma D_1} - \frac{1}{D_1} \right) \\ &= \frac{\gamma - 1}{D_1} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma} \\ \Rightarrow f' &= - \frac{\gamma D_1}{(\gamma - 1)^2} \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

Q3) A partir d'un objet réel, pour obtenir une image réelle on doit avoir $\gamma < 0$.

$$\text{D'après } \textcircled{4} : (\gamma^2 - 2\gamma + 1)f' = -\gamma D_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_1}{f'} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$$

Étudions cette fonction $f(\gamma) = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$ ou $f'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$

γ	$-\infty$	-1	0
$f'(\gamma)$	\ominus	\oplus	\oplus
$f(\gamma)$	↘ 4 ↗		

$$\text{D'où } f(\gamma) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{D_1}{f'} \geq 4 \Leftrightarrow \underline{D_1 \geq 4f'}$$

Q4) Calculons D_1 : $D_1 = D - \overline{AA_1}$ or $\begin{cases} \overline{AH} = 3 \text{ cm} \\ \overline{HA_1} = \frac{\overline{HA}}{n} = \frac{3}{1,5} = -2 \text{ cm} \end{cases}$

$$\text{d'où } D_1 = 10 - (3 - 2) = 9 \text{ cm}$$

• D'après Q: $f' = - \frac{\delta D_1}{(\delta-1)^2} = - \frac{-2 \times 9}{(-2-1)^2} = \underline{\underline{2 \text{ cm}}}$

• Et $p' = \frac{\delta D_1}{\delta-1} = \frac{-2 \times 9}{-2-1} = 6 \text{ cm}$.

\Rightarrow la lentille doit être placée 6 cm avant l'écran.

Q5) • On souhaite avoir $|x|$ maximal pour chercher comment modifier f' différentes

$f(\delta): \frac{D_1}{f'} = 2 - \delta - \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow -\frac{1}{f'^2} D_1 \cdot df' = \left(-1 + \frac{1}{\delta^2}\right) d\delta$

$\Rightarrow \frac{d\delta}{df'} = \frac{D_1}{f'^2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)}$

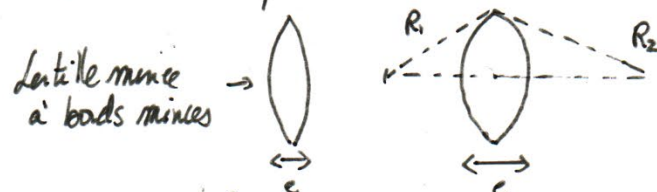
$\Rightarrow \frac{d\delta}{df'} = \frac{D_1 \cdot \delta^2}{f'^2 (\delta^2 - 1)} > 0$

or $f' > 0$ et $\delta < 0$ donc si on veut augmenter $|x|$ on a: $d\delta < 0$
 $\Rightarrow df' < 0$

\Rightarrow Il faut choisir la focale la plus petite possible

• Dans le cas d'une lentille bi-convexe, il faut augmenter les rayons de courbure

\Rightarrow on ne sera plus dans les conditions des lentilles minces



\Rightarrow on ne vérifie plus les conditions de Gauss dans ces conditions

Q6). Afin d'observer deux crêtes successives sur l'écran il faut vérifier :

$$\frac{|\delta/a| \cdot l_c}{c} < \text{largeur d'un pixel.}$$

$$\Leftrightarrow l_c < 200 \mu\text{m.}$$

de sillon mesuré en moyenne $30 \mu\text{m}$ d'où sur l'écran une représentation de $60 \mu\text{m}$.

On peut choisir une valeur de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ afin de voir les sillons de l'empreinte et leurs détails.

Q7). D'après Descartes : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ que l'on différentie : $\frac{dp'}{p'^2} = \frac{dp}{p^2}$

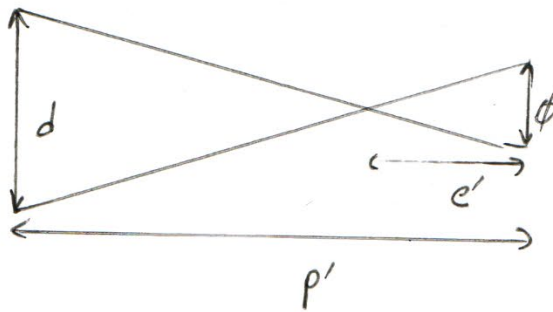
$$\Leftrightarrow \frac{dp'}{dp} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$$

En posant $\begin{cases} dp = e \\ dp' = e' \end{cases}$, les variations d'épaisseur dans les plans conjugués

$$\Rightarrow \frac{e'}{e} = \gamma^2$$

D'après Thalès :

$$\frac{d}{e-p'} = \frac{\phi}{e'}$$



Supposons $e \ll |p|$

$$\Leftrightarrow \gamma e \ll \gamma |p|$$

$$\Leftrightarrow \gamma e \ll p'$$

$$\Leftrightarrow \frac{e'}{\gamma} \ll p'$$

$$\text{or } \gamma = -2 \Rightarrow e' \ll p' \text{ donc } \frac{d}{p'} \approx \frac{\phi}{e'} \Rightarrow \phi \approx \frac{e' d}{p'} \quad (1)$$

$$\text{or } \begin{cases} p' = \delta p \\ \text{et} \\ e' = \delta^2 e \end{cases} \quad \text{d'où } \theta \Rightarrow \phi = \delta d \cdot \frac{e}{p}$$

Q8) On veut que : $\phi \gg \pi/3$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta d e}{p} \gg \delta a$$

$$\Leftrightarrow d \gg \frac{ap}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{p} \gg \frac{a}{e}$$

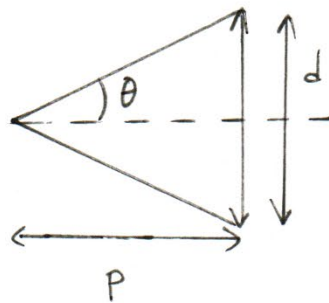
$$\Leftrightarrow \frac{d}{p} \gg 3,3.$$

$$\text{or } \frac{d/2}{p} = \tan \theta$$

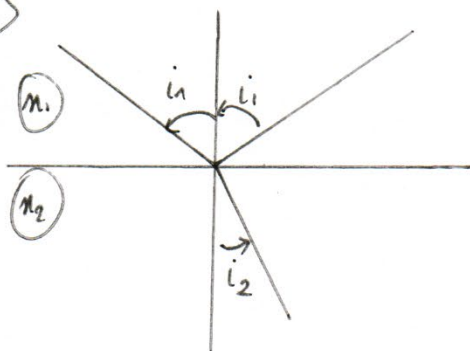
$$\text{d'où } \tan \theta \gg 1,6.$$

$$\Leftrightarrow \theta \gg 58^\circ \Rightarrow \text{Cette valeur ne remplit pas les conditions de Gauss,}$$

(rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique)



Q9)



1^{ère} loi : tous les rayons appartiennent au même plan :
le plan d'incidence

2^{ème} loi : $i_1 = r_1$

3^{ème} loi : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

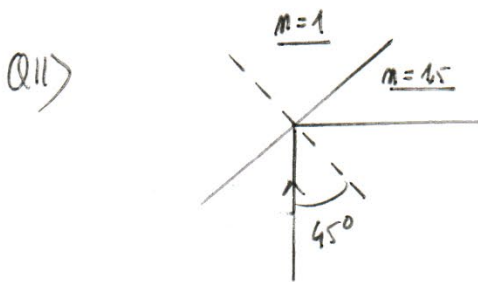
Q10) la réflexion totale est obtenue lorsque $i_2 > \pi/2$.

$$\Leftrightarrow n_1 \sin i_1 > n_2$$

Pour avoir réflexion totale.

$$\Leftrightarrow \sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$$

d'où $i_1 > \underbrace{\text{Arccsin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}_{i_{\text{lim}}}$ avec $n_2 < n_1$



- Avec les indices proposés : $i_{\text{lim}} = 41^\circ$

donc il y a réflexion totale.

- Non, on ne peut pas éclairer le doigt sur l'écran du CCD

Q12) Dans une région vide de charges et de courant :

$$\begin{cases} \text{MG} : \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \text{MF} : \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{MF} : \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{MA} : \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{Or } \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\Delta \vec{E} + \text{grad}(\text{div } \vec{E}) \quad [\text{non donné par l'énoncé}]$$

$$\Leftrightarrow \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} \quad \text{d'où } \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} : \text{D'Alembert}$$

Envisageons une OPPH alors on obtient $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow \omega = kc \Leftrightarrow v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = c$

v_{ph} ne dépend pas de $\omega \Rightarrow$ le vide n'est pas dispersif.

Q13) On remplace ϵ_0 par $n^2 \epsilon_0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \frac{n^2}{c^2}$ d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot n^2$
 et $v_{\phi} = \frac{c}{n}$

or $n = n(\omega)$ d'après l'énoncé \Rightarrow le milieu LHI est dispersif

Q14) D'après l'énoncé \vec{E} est continu sur le diéptre d'où en $z=0$:

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t)$$

$$\Leftrightarrow E_0 e^{-j(\omega t - k_{ix}x)} + \underline{r} E_0 e^{-j(\omega t - k_{rx}x)} = \underline{t} E_0 e^{-j(\omega t - k_{tx}x)}$$

car $\vec{k}_r = k_{rx} \vec{e}_x - k_{rz} \vec{e}_z \dots$ et $\vec{r} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z$

d'où $e^{jk_{ix}x} + \underline{r} e^{jk_{rx}x} = \underline{t} e^{jk_{tx}x}$

Q15) Cette relation doit être vérifiée pour tout x d'où: $1 + \underline{r} = \underline{t}$

Q16) D'après l'énoncé $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$

$$\Leftrightarrow \frac{n\omega}{c} \sin(i_1) = -\frac{n\omega}{c} \sin(i'_1) = \frac{\omega}{c} \sin(i_2)$$

D'où $\begin{cases} i_1 = -i'_1 \\ \text{et} \\ n \sin(i_1) = \sin(i_2) \end{cases}$ on retrouve bien les lois de Descartes

Q17) D'après l'énoncé en $z=0$, $\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}_t(0,t)$ ①

$$\text{or } \vec{B}_i = \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i = (k_{ix} \vec{e}_x + k_{iz} \vec{e}_z) \wedge E_0 e^{j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)} \vec{e}_y$$

$$= (k_{ix} \vec{e}_z - k_{iz} \vec{e}_x) E_0 e^{-j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)}$$

de même pour \vec{B}_r et \vec{B}_t d'où ① donne.

$$\begin{cases} \text{sur } (Ox): k_{ix} E_0 e^{jk_{ix}x} + \underline{r} k_{rx} E_0 e^{jk_{rx}x} = \underline{t} E_0 k_{tx} e^{jk_{tx}x} \\ \text{sur } (Oz): -k_{iz} E_0 e^{jk_{iz}x} + \underline{r} k_{rz} E_0 e^{jk_{rz}x} = -\underline{t} E_0 k_{tz} e^{jk_{tz}x} \end{cases}$$

Sur Ox , on retrouve $1+r = t$ (3)

Sur Oz , $k_{iz} - r k_{rz} = + t k_{tz}$

or en norme $k_{iz} = k_{rz} \Rightarrow (1-r) k_{iz} = k_{tz} \cdot t$

or $\frac{k_{tz}}{k_{iz}} = r \Rightarrow 1-r = \frac{r t}{n_2}$ (4)

(3) et (4) donnent :

$$\begin{cases} 2 = (r+1)t \\ 2r = (r-1)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{r+1} \\ r = \frac{t}{2} - 1 = \frac{1-r}{1+r} \end{cases}$$

Q18) Pour k_c :

$$\begin{cases} k_{ix} = k_i \sin i_1 \\ k_{iz} = k_i \cos i_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{ix} = n k_0 \sin i_1 \\ k_{iz} = n k_0 \cos i_1 \end{cases}$$

Q19) Soit $k_{tz}^2 = k_0^2 - k_{tx}^2$

$$= k_0^2 - k_t^2 (\sin i_2)^2$$

$$= k_0^2 - k_t^2 [n \sin i_1]^2 \text{ car } k_t^2 = k_0^2 \text{ (on est dans le vide)}$$

$$\Rightarrow k_{tz}^2 = k_0^2 [1 - n^2 \sin^2 i_1]$$

On doit distinguer deux cas :

(A). Si $n \sin i_1 \leq 1 \Rightarrow k_{tz} = k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}$

(B). Si $n \sin i_1 > 1 \Rightarrow k_{tz} = j k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1} = j/\delta$

D'où le champ transmis :

$$\begin{cases} \text{(A)} : \vec{E} = t E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - k_{tx} x - k_{tz} z)} : \text{OPTH.} \\ \text{(B)} : \vec{E} = t E_0 \vec{e}_y e^{-j(\omega t - k_{tx} x)} \cdot e^{-z/\delta} : \text{onde avec absorption} \end{cases}$$

Q20) • Dans le cas de la réflexion totale : $n \sin i_1 > 1$ d'où

$$\vec{E}_t = t E_0 \vec{e}_y e^{-j(\omega t - k_{tz} z)} e^{-z/\delta} : \text{onde évanescente}$$

$$\text{• où } \delta = \frac{1}{k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$$

Calculons le vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ou $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right\}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \langle \vec{\Pi}_t \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{t E_0 e^{-z/\delta}}{\mu_0} \vec{e}_y \left[k_{tx} \vec{e}_z - k_{tz} \vec{e}_x \right] E_0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{t E_0^2 e^{-2z/\delta}}{\mu_0} (k_{tx} \vec{e}_x + k_{tz} \vec{e}_z) \right\} \end{aligned}$$

or $\left\{ \begin{array}{l} k_{tx} \text{ est un réel} \\ k_{tz} \text{ est imaginaire pur} \end{array} \right.$ donc $\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{e}_z = 0$

• On peut aussi préciser que vu la forme de l'onde, il n'y a pas de propagation suivant l'axe Oz, donc $\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{e}_z = 0$

Partie II – Dualité onde-corpuscule (CCP – TPC – 2017)

Q17. En d'appuyant sur le document 5 :

Aspect corpusculaire → impact corpusculaire quasi ponctuel

Aspect ondulatoire → franges d'interférences

Q18.

a)
$$m^* = \frac{M}{N_a} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3,32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

b) Système {e-}, référentiel galiléen, le poids est une force conservative donc d'après le TEM :

$$E_m(\text{piège}) = E_m(\text{fentes})$$

$$\Rightarrow 0 + mgz_{\text{piège}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz_{\text{fentes}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g(z_{\text{piège}} - z_{\text{fentes}})} = \sqrt{2gl}$$

AN :
$$v = \sqrt{2 \cdot 9,876 \cdot 10^{-3}} = 1,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c)
$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m^*v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{3,32 \cdot 10^{-26} \cdot 1,22} = 1,64 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

λ_{DB} est de l'ODG de la taille des fentes d'Young, le caractère quantique est non négligeable

d) λ_{DB} dépend de m^* donc plus m^* est grand, plus λ_{DB} est petit donc le caractère quantique est moins visible avec les atomes qu'avec les électrons ($m_{\text{électron}}^* < m_{\text{atome}}^*$).

On utilise des atomes froids pour limiter l'agitation thermique (v plus faible donc λ_{DB} plus grand et moins de dispersion donc le faisceau est monochromatique).

Q19.
$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{b} \approx \theta = \frac{d}{D} \Rightarrow d = \frac{D\lambda}{b} = \frac{113 \cdot 10^{-3} \cdot 1,68 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-6}} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

La tâche de diffraction (de largeur $2d$) est plus grande que la résolution du MPC d'un facteur 100 environ, donc la mesure donne une description précise.

Q20.

a)
$$S_1M = \sqrt{(x_M - x_{S_1})^2 + (z_M - z_{S_1})^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2}}$$

On effectue un DL car $D \gg a$ et $|x|$,
$$S_1M = D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2}\right) = D + \frac{(2x-a)^2}{8D}$$

On fait de même avec S_2M en prenant $x_M - x_{S_1} = x + \frac{a}{2}$

b)
$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = S_2M - S_1M = \frac{(2x+a)^2}{8D} - \frac{(2x-a)^2}{8D} = 2 \cdot \frac{4ax}{8D} = \frac{ax}{D}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$$

c) Soit p l'ordre d'interférence :
$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$$

Entre deux franges d'interférences $|\Delta p| = 1 \Rightarrow \frac{a i_{th}}{\lambda D} = 1 \Rightarrow i_{th} = \frac{\lambda D}{a}$

AN :
$$i_{th} = \frac{1,64 \cdot 10^{-8} \cdot 113 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-6}} = 3,09 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

d) A l'aide du document 5, on peut lire $2i_{exp} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow i_{exp} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

On a un écart relatif de 20 %

Q21.

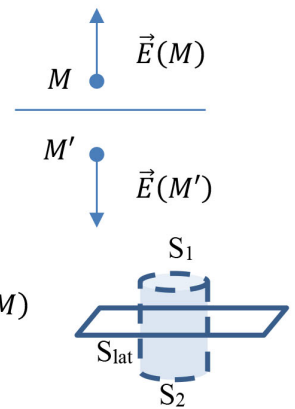
a)
$$[\alpha] = \frac{LT^{-2} \cdot L}{L^2 T^{-2}} = 1, \alpha \text{ est sans dimension}$$

α compare l'énergie potentielle de pesanteur (mgD) par rapport à l'énergie cinétique ($\frac{1}{2}mv^2$).

- b) $\alpha = \frac{2,9,8,113 \cdot 10^{-3}}{1,22^2} = 1,488$ donc $i'_{th} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{3,32 \cdot 10^{-26} \cdot 1,22} \frac{113 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-6}} 2 \frac{\sqrt{1+1,488}-1}{1,488} = 2,40 \cdot 10^{-4} m$, on retrouve une valeur beaucoup plus proche que la valeur expérimentale (écart relatif de 4 %) le modèle est meilleur.
- c) On effectue un DL de $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2}$ et $\frac{h}{m^*v} = \lambda$, on retrouve $i'_{th} = \frac{\lambda D}{a}$ comme si λ ne variait pas alors que pendant la chute (de hauteur D) v et λ varient (d'où la correction proposée).

Q22. Les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétries pour la distribution de charge donc $\vec{E}(M)$ appartient à ces plans, donc $\vec{E}(M)$ est selon \vec{e}_z
 Invariance par translation selon x et y de la distribution de charges donc d'après le principe de Curie $\|\vec{E}(M)\| = E(z)$ et $V(M) = V(z)$.
 Bilan : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$

Q23. Le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charges. Soit M et M' symétriques par rapport à ce plan alors $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques d'après le schéma $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$ en projetant sur \vec{e}_z on obtient $E(z) = -E(-z)$



Q24. Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

avec la surface de Gauss = $S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$

$$\begin{aligned} \text{Pour } z > 0 \quad & \iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_1(M) + \iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_2(M) + \iint_{S_{lat}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{lat}(M) \\ & = \iint_{S_1} E(z)\vec{e}_z \cdot dS_1\vec{e}_z + \iint_{S_2} E(-z)\vec{e}_z \cdot dS_2(-\vec{e}_z) \\ & = E(z) \cdot S_1 - E(-z) \cdot S_2 = 2E(z)S_1 \end{aligned}$$

$$Q_{int} = \sigma * S_1$$

Bilan : (avec $E(z) = -E(-z)$)

$$\text{Pour } z > 0 \quad \vec{E}(M) = = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\text{Pour } z < 0 \quad \vec{E}(M) = = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Q25. En utilisant le théorème de superposition du champ créé par deux plans chargés on obtient :

$$\text{Pour } z > \frac{d}{2} \quad \vec{E}(M) = \vec{0}$$

$$\text{Pour } \frac{d}{2} > z > -\frac{d}{2} \quad \vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\text{Pour } z < -\frac{d}{2} \quad \vec{E}(M) = \vec{0}$$

Q26. $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) = q\vec{E} = -q \overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow \overrightarrow{grad}(E_p) = q \overrightarrow{grad}(V)$
 Par intégration : $E_p = qV(z) + cst$

Q27. Système $\{e-\}$, référentiel galiléen, la force électrostatique est une force conservative donc d'après le TEM $E_m = cst$

$$\begin{aligned} E_{m1} &= E_{m2} \\ \Rightarrow 0 - eV_1 + K &= \frac{1}{2}mv_0^2 - eV_2 + K \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}(V_2 - V_1)} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

AN : $v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 54}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 4,35 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_0 < \frac{c}{10}$ donc on peut rester en mécanique non relativiste.

Q28. $\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4,36 \cdot 10^6} = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

λ est de l'ordre de grandeur de 0,1 nm donc on pourra utiliser le faisceau d'e- créé pour effectuer de la diffraction par un cristal.

Q29. $a = \frac{\lambda}{\sin \theta_{\max}} = \frac{1,67 \cdot 10^{-10}}{\sin(50)} = 2,18 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 218 \text{ pm}$ on obtient le bon ordre de grandeur pour un mono cristal

Q30. $\delta(M) = (ST_{m+1}M) - (ST_mM) = (ST_{m+1}) + (T_{m+1}K) + (KM) - (SH) - (HT_m) - (T_mM)$
 D'après le théorème de Malus, H et T_{m+1} sont sur la même surface d'onde de même que K et T_m . Comme entre deux surfaces d'ondes, le chemin optique est le même, on obtient $(SH) = (ST_{m+1})$ et $(T_mM) = (KM)$. $\delta(M) = (T_{m+1}K) - (HT_m) = a \cdot \sin(\theta) - a \cdot \sin(\theta_0) = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$
 On aura des interférences constructives quand $\delta(M) = k\lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$
 On retrouve la formule des réseaux : $k\lambda = a(\sin(\theta_k) - \sin(\theta_0))$

Q31. Quand N augmente, les pics principaux restent à la même place mais ils sont plus fins, on tend vers un peigne de Dirac quand N augmente (les pics secondaires deviennent invisibles).

Q32. $\sin(\theta) \approx \frac{x}{D}$ et en incidence normale $\theta_0 = 0$ donc $k\lambda = \frac{ax_k}{D}$ donc $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{a}$

Q33. $m = 60 \cdot m_c = 60 \cdot \frac{M_c}{N_a} = 60 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,19 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$

D'après le document 8, la vitesse moyenne (Fig 1) $v_{\text{moy}} = 225 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

donc $\lambda_m = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_{\text{moy}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1,19 \cdot 10^{-24} \cdot 225} = 2,46 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Q34. $\Delta x = \frac{\lambda_m D}{a} = \frac{2,46 \cdot 10^{-12} \cdot 1,25}{100 \cdot 10^{-9}} = 3,08 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 30,8 \mu\text{m}$

Expérimentalement, on mesure $\Delta x = 35 \mu\text{m}$. On observe un écart raisonnable par rapport à l'expérience (12 %) étant donné qu'on n'a pris en compte que la valeur moyenne de la vitesse.

Q35. On détermine les vitesses v_1 et v_2 les vitesses à mi-hauteur :

$$v_1 = 290 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \lambda_1 = 1,92 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$v_2 = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \lambda_2 = 3,71 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\Delta \lambda = 1,79 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

L'élargissement spectral entrainera une perte de contraste pour les angles φ élevés (en valeur absolue) dans la figure 14 et on ne pourra plus discerner les différents pics (intensité uniforme).

Q36. ℓ_c s'appelle la longueur de cohérence. Critère semi quantitatif : $|\Delta p| < \frac{1}{2}$ pour la moitié du spectre

$$\delta = p\lambda \Rightarrow \text{pour un même chemin optique } d\delta = 0 = p d\lambda + \lambda dp = \frac{\delta}{\lambda} d\lambda + \lambda dp$$

La condition $|\Delta p| < \frac{1}{2}$ pour la moitié du spectre se réécrit :

$$\frac{\delta}{\lambda^2} |d\lambda| < \frac{1}{2} \text{ pour } |d\lambda| = \frac{\Delta\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{\delta < \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \ell_c}$$

Q37. $\delta(M) = a \cdot \sin(\theta) = \frac{ax}{D} \Rightarrow x < \frac{\ell_c D}{a}$

$$\frac{\ell_c D}{a} = \frac{\lambda_m^2 D}{a \Delta\lambda} = (2,46 \cdot 10^{-12})^2 \frac{1,25}{100 \cdot 10^{-9} \cdot 1,79 \cdot 10^{-12}} = 42,3 \mu m$$

On remarque sur la figure 12 qu'il n'y a plus d'interférences visibles pour $x > 50 \mu m$. On a 18 % d'écart mais l'ODG est bon compte-tenu de la précision de la figure.

Q38. Si on augmente la température, l'agitation thermique sera plus grande et donc l'indétermination sur la position plus grande également, ce qui augmente la zone de brouillage des interférences ; la largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ augmente donc la longueur de cohérence ℓ_c diminue.