

Physique : DS4

Sujet « One Piece » - CCPINP Filière MP - 2023

Q1) la position d'équilibre est telle que :

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2V_0(1 - e^{-a(x-x_0)}) \times a e^{-a(x-x_0)} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-a(x-x_0)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_{eq} = x_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Q2) On pose } x &= x_{eq} + \xi \text{ d'où } V(x) = V_0 (1 - e^{-a(x_{eq} + \xi - x_0)})^2 \\ &= V_0 (1 - e^{-a\xi})^2 \end{aligned}$$

$$\text{or } e^{-a\xi} \stackrel{\text{D/L}}{=} 1 - a\xi + \frac{a^2 \xi^2}{2} + o(\xi^2)$$

$$\Rightarrow V(x) \approx V_0 (a\xi - a^2 \xi^2 / 2)^2$$

$$\Rightarrow \underline{V(x) \approx a^2 \xi^2 V_0}$$

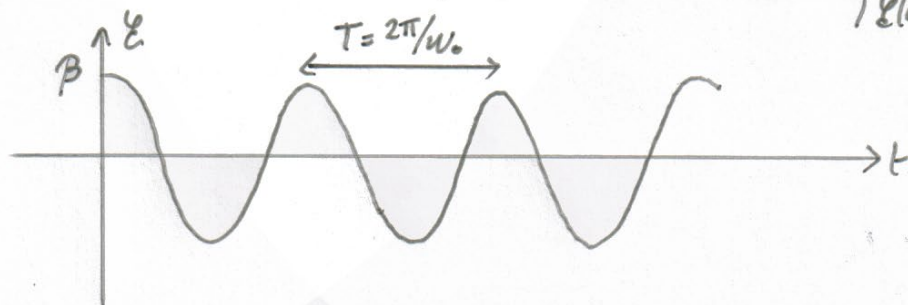
$$\text{Par analogie } V(x) = \frac{1}{2} k \xi^2 \text{ on en déduit } \underline{k = 2a^2 V_0}$$

Q3) PFD appliqué à la masse m dans un Rq s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

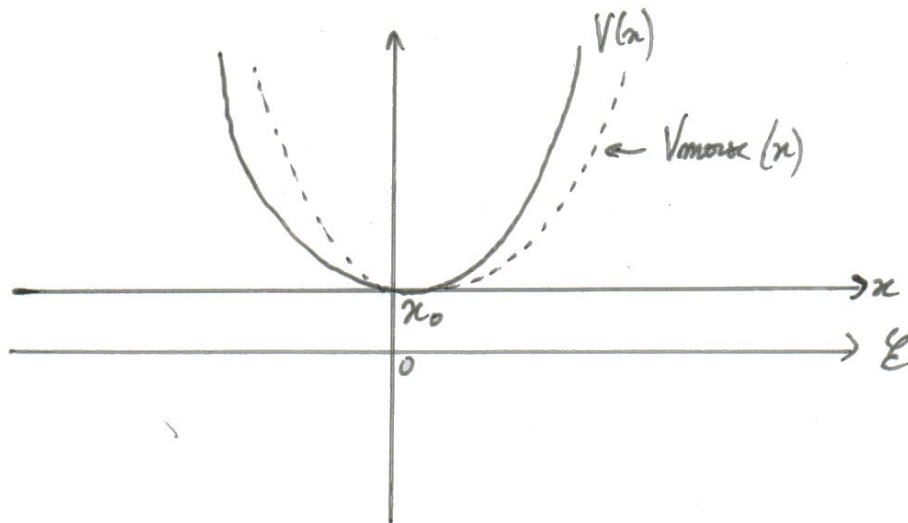
$$\Leftrightarrow m\ddot{\xi} = -k\xi \Leftrightarrow \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

qui se résout en : $\xi(t) = \beta \cos(\omega_0 t)$ d'après les conditions initiales $\left. \begin{array}{l} \xi(0) = \beta \\ \dot{\xi}(0) = 0 \end{array} \right\}$



Q4) On représente :

$$\begin{cases} V(x) = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \\ V_{\text{max}}(x) = V_0 \left(1 - e^{-a(x-x_0)}\right)^2 \end{cases}$$



Remarque : Si on passe à l'ordre 3 $V_{\text{max}} \approx V(x) - V_0 a^3 x^3$

donc V_{max} légèrement en dessous de $V(x)$ si $x > 0$
 et au dessus de $V(x)$ si $x < 0$

Q5) Initialement $x_m(0) = na$

Par définition $u_m(t) = x_m(t) - x_m(0)$
 $\Rightarrow \underline{u_m(t) = x_m(t) - na}$

Q6) Question de cours :

On applique le PFD à la masse m dans \mathcal{R}_g :

$$m \ddot{x}_m = -k(u_m - u_{m-1}) + k(u_m - u_{m+1})$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}_m = \frac{k}{m} (u_{m-1} + u_{m+1} - 2u_m)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}_m = \omega_0^2 (u_{m+1} + u_{m-1} - \alpha u_m) \quad \text{où } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \omega_0^2 = k/m \end{cases}$$

Q7) Soit $u_m = V_0 e^{i(\omega t - mqa)}$: Il s'agit d'une harmonique

$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'amplitude } V_0 \\ \text{de pulsation unique } \omega \end{array} \right.$

Q8) Vu que e^{ix} est de période 2π alors : $\omega t - qa + 2\pi = \omega t - q(na + a)$

$$\Leftrightarrow 2\pi = qa$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{q}$$

q correspond à la norme du vecteur d'onde

Q9) On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle :

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

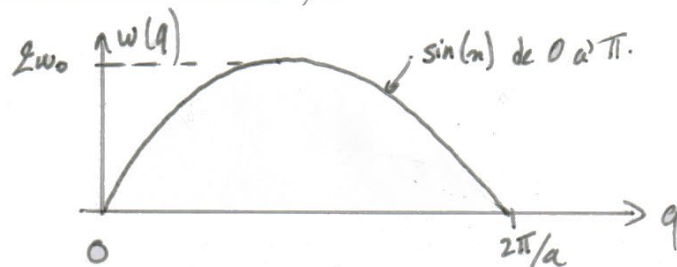
$$\Rightarrow (i\omega)^2 u_0 e^{i(\omega t - nqa)} = \omega_0^2 (u_0 e^{i(\omega t - nqa - qa)} + u_0 e^{i(\omega t - nqa + qa)} - 2u_0 e^{i(\omega t - nqa)})$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = \omega_0^2 \left(\underbrace{e^{-iqa} + e^{iqa}}_{2\cos(qa)} - 2 \right)$$

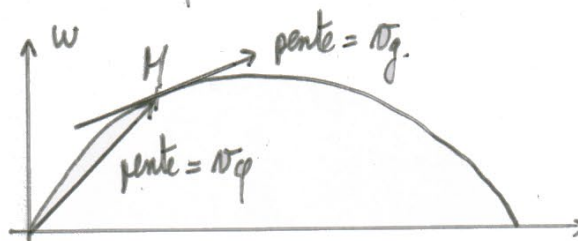
$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2\cos(qa))$$

Formulaire : $\cos(qa) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$

$$\text{d'où } \omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$



Q10) Définitions : $\left\{ \begin{array}{l} v_g = \omega/q : \text{vitesse de phase} = v_{\text{propagation de l'onde monochromatique}} \\ v_g = d\omega/dq : \text{vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde} \end{array} \right.$



Q11) On remarque que v_g dépend de q donc le milieu est dispersif (On a aussi $v_g \neq v_\phi$)

• On a $w = 2w_0 \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right| \Leftrightarrow \frac{w}{w_0} = 2 \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right|$

$\Rightarrow w \leq 2w_0$: il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

Q12) Pour $q \ll \pi/a$ on peut faire un DL à l'ordre 1 $\sin x \approx x$ tel que.

$$w = w_0 q a$$

d'où $v_\phi = \frac{w}{q} = w_0 a$

et $v_g = \frac{dw}{dq} = w_0 a$

\Rightarrow si $q \ll \frac{\pi}{a}$, le milieu est non dispersif

• Pour $q = \pi/a$: $w = 2w_0$ d'où $v_\phi = \frac{w}{q} = \frac{2w_0}{\pi/a} = \frac{2w_0 a}{\pi}$
 $v_g = 0$ car $w = \text{cte.} \Rightarrow$ on a affaire à une onde stationnaire

Q13) Soit $V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}$ où A et B positifs

$\Rightarrow \frac{-B}{x^6}$ correspond à une interaction attractive type Van der Waals.

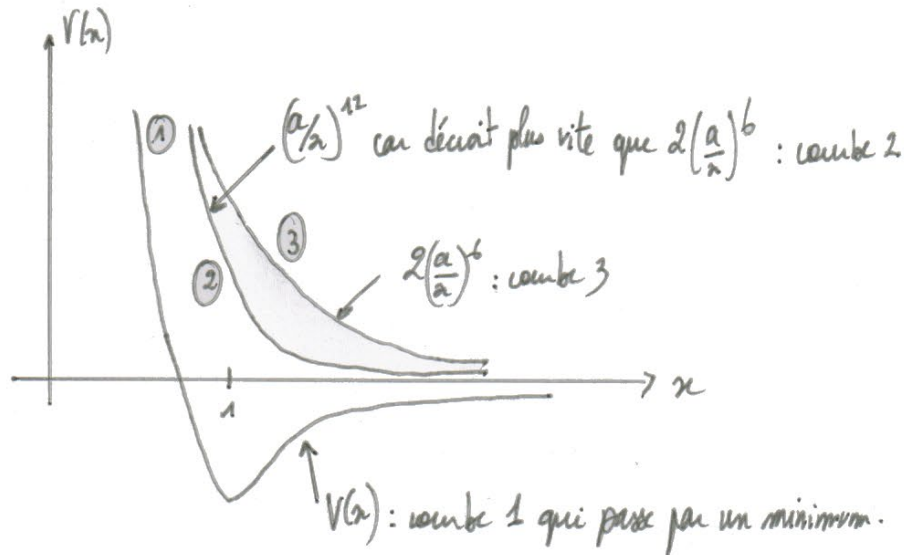
$\frac{A}{x^{12}}$ — " — — — — — répulsive à courte distance entre nuages électroniques

Q14) Soit $V(x) = \theta_0 \left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x}\right)^6 \right] \Rightarrow \theta_0 a^{12} = A$ et $2\theta_0 a^6 = B$

$\Rightarrow \theta_0 = \frac{B}{2a^6}$ et $\frac{a^6}{2} = \frac{A}{B}$

D'où $\theta_0 = \frac{B}{2a^6}$ et $a = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$

Q15)



Q16) On pose $x = a(1+\xi)$ d'où : $V(\xi) = \theta_0 \left[\left(\frac{1}{1+\xi} \right)^{12} - \frac{2}{(1+\xi)^6} \right]$

Or $(1+\xi)^m \approx 1 + m\xi + \frac{m(m-1)}{2} \xi^2$ d'où :

$$V(\xi) = \theta_0 \left(1 - 12\xi + 78\xi^2 - 2 + 12\xi - 42\xi^2 \right)$$

$$\Rightarrow V(\xi) = \theta_0 (-1 + 36\xi^2)$$

or $\xi = \frac{x}{a} - 1$ d'où $V(x) = \theta_0 \left(-1 + 36 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \right)$

$$= \theta_0 \left[-1 + \frac{36}{a^2} (x-a)^2 \right]$$

$$= \frac{36\theta_0}{a^2} (x-a)^2 - \theta_0$$

or $V(x) = \frac{1}{2} k(x-a)^2 + \text{cte}$ d'où $k = \frac{72\theta_0}{a^2}$

Q17) A.N : $k = 29 \text{ N.m}^{-1}$

et $\omega_0 = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$

Q18) Pour la masse m : $u_m = V_0 \cos(\omega t - nqa)$ d'où $\dot{u}_m = -\omega V_0 \sin(\omega t - nqa)$

or $E_c = \frac{1}{2} \dot{u}_m \cdot m = \frac{1}{2} m \omega^2 V_0^2 \sin^2(\omega t - nqa)$

donc $\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 V_0^2$ d'où pour N atomes : $\langle E_{c, \text{tot}} \rangle = \frac{N}{4} m \omega^2 V_0^2$

Q19) Par définition: $E_p = \frac{1}{2} k (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n)^2 + \frac{1}{2} k (\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1})^2$
 or $\langle (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n)^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n) (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n)^*$
 $= \frac{1}{2} |\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n|^2$

D'où: $\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} k [|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n|^2 + |\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1}|^2]$

Q20) Or $|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n| = U_0 |e^{i(\omega t - q(n+1)a)} - e^{i(\omega t - qa)}|$
 $= U_0 |e^{i(\omega t - q(n+\frac{1}{2})a)}| |e^{-qa/2} - e^{qa/2}|$
 $= U_0 |\sin(\frac{qa}{2})| \times 2$

$\Rightarrow |\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n|^2 = 4U_0^2 \sin^2(qa/2)$

d'où $\langle E_p \rangle = 2kU_0^2 \sin^2(qa/2)$

or $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(qa/2) = 4 \frac{k}{m} \sin^2(qa/2)$

Donc $\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 U_0^2$

Q21) d'énergie potentielle calculée tient compte de deux interactions interatomiques

$\Rightarrow \langle U \rangle = \frac{1}{2} N \langle E_p \rangle + \langle E_{\text{cor}} \rangle$
 $= \frac{1}{4} N m \omega^2 U_0^2 + \frac{1}{4} N m \omega^2 U_0^2$
 $\Rightarrow \langle U \rangle = \frac{1}{2} N m \omega^2 U_0^2$

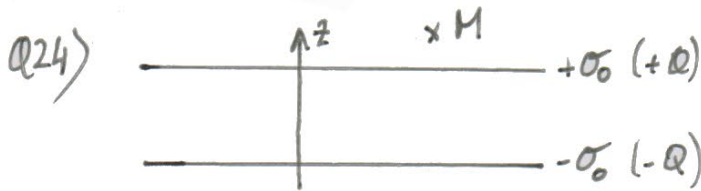
Q22) Soit $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(qa/2)$

$\Leftrightarrow \frac{2\omega}{\omega_0} = |\sin(qa/2)|$

D'où $q = \frac{2}{a} \text{Arcsin}(\frac{2\omega}{\omega_0})$ pour $q \in [0, \frac{\pi}{a}]$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\pi a}{\text{Arcsin}(2\omega/\omega_0)} = \frac{1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\text{Arcsin}(2\omega/\omega_0)} \Rightarrow \lambda \gg a$ d'où le passage au coté proposé.

Q23) $c^2 = k/m a^2 \Rightarrow c = \omega_0 a = 2 \cdot 10^{-16} \times 1,7 \cdot 10^{13} = 3,4 \cdot 10^3 \text{ m/s} = c$

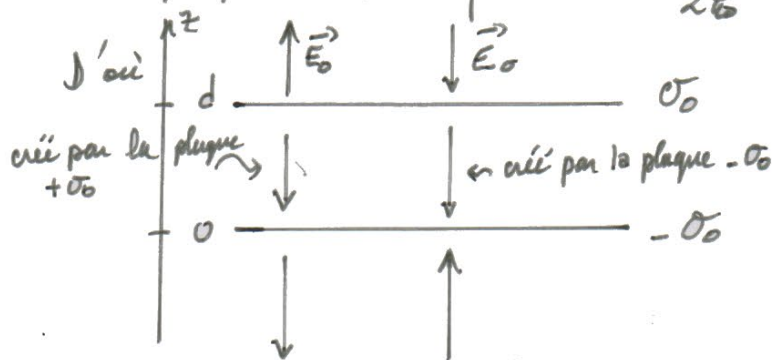


• Si on néglige les effets de bord il y a invariance suivant (Ox) et $(Oy) \Rightarrow E = E(z)$.

• des plans (xMz) et (yMz) sont plans de symétrie d'où : $\vec{E} = E \vec{u}_z$.

$$\Rightarrow \vec{E} = E(z) \vec{u}_z$$

• On admet que pour un plan infini $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z$ si $\sigma > 0$



• D'après le théorème de superposition pour $0 < z < d$:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Q25) Soit $dV = \text{grad} V \cdot d\vec{OM}$

$$\Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \quad \text{d'où} \quad V_0 = \int_0^d |E| dz = \|\vec{E}\| \cdot d \quad (1)$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{d\sigma_0}{\epsilon_0}$$

Q26) D'où $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} = \frac{118 \cdot 10^{-7} \text{ C.m}^{-2}}{d} \\ \text{et} \\ E = 2,10 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1} \end{array} \right.$

Q27) On remarque que $E \ll E_{\text{diélectrique}}$: il ne se formera pas d'arc électrique

Q28) Cette fois-ci : $\vec{E} = \frac{V_0}{d} \cos(\omega t) \vec{u}_z$ d'après (1)

Q29) MG : $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, MT : $\text{div} \vec{B} = 0$, MF : $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$
 MA : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t)$

Q30) Vu que $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ les variations de \vec{E} vont engendrer un champ \vec{B} variable dans le temps.

• dans le vide $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

• Tout comme en statique ($\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$) ici les sources de \vec{B} sont les variations temporelles de \vec{E} .

Ici $\vec{E} = E(r) \vec{u}_z$ donc \vec{B} va s'enrouler autour de \vec{E} .

$$\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_\theta$$

• Il y a invariance par rotation autour de Oz donc $B(r, \theta, z, t) = B(r, z, t)$

$$\text{d'où } \vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$$

Q31) D'après le théorème de Stokes : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ peut s'écrire :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E \quad \text{théorème d'Ampère généralisé}$$

$$\text{ou } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ et } \Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Q32) Par définition : $E_p = eU$

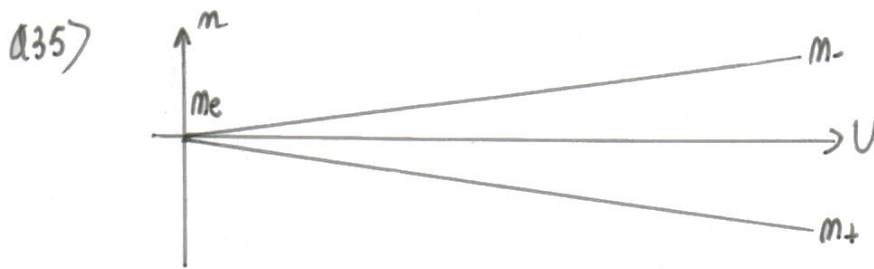
Q33) On suppose que $m_+ = K e^{-eU/k_B T}$

à haute température : $T \gg \frac{eU}{k_B T} \Rightarrow e^{-eU/k_B T} \approx 1 - \frac{eU}{k_B T}$ (DL à l'ordre 1)

$$\Rightarrow m_+ = K \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$$

or $m_e = m_+(U=0)$ d'où $m_+ = m_e \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$

Q34) Je m'attends : $m_- = m_e \left(1 + eU/k_B T \right)$ on remplace e par -e.



Q36) Par définition : $\rho = nq \Rightarrow \begin{cases} \rho_+ = m_+ e \\ \rho_- = -m_- e \end{cases}$

$$\text{d'où } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{m_+ e - m_- e}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{(m_- - m_+) e}{\epsilon_0}$$

or $m_- - m_+ = m_e \times \frac{2eU}{k_B T} \Rightarrow \Delta U - \frac{2e^2 m_e U}{k_B T \epsilon_0} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2(rU)}{dr^2} - \frac{2e^2 m_e U}{k_B T \epsilon_0} = 0$$

Q37) Posons $Z = rU$ d'où $\frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{2e^2 m_e}{k_B T \epsilon_0} Z = 0$

On pose $\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T \epsilon_0}{2e^2 m_e}} \Rightarrow \frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{Z}{\lambda_D^2} = 0$

Q38) donc $Z = A e^{-r/\lambda_D} + B e^{r/\lambda_D}$
 diverge donc $B = 0$

Or si $r \rightarrow 0$ $U(r) \sim \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r}$ d'où $Z \sim \frac{e}{4\pi \epsilon_0}$

donc $Z = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} e^{-r/\lambda_D} \Rightarrow U(r) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$

. λ_D est une distance caractéristique de la décroissance de $U(r)$. Pour $r = 5\lambda_D$ on peut considérer que $U \sim 0$.

$$\begin{aligned}
 Q39) \text{ soit } \rho &= -m_e e + m_+ e \\
 &= -2m_e \cdot \frac{eU}{k_B T} \\
 &= -2m_e \cdot \frac{e}{k_B T} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \rho = - \frac{m_e \cdot e^3}{2\pi\epsilon_0 k_B T} \cdot \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } Q(r) &= \iiint \rho d\mathcal{V} = \iiint \rho \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \iiint \rho \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{-m_e e^3}{2\pi\epsilon_0 k_B T} \times 4\pi \int_0^r e^{-r/\lambda_D} \cdot r dr \\
 &= \frac{-m_e e^3}{2\pi\epsilon_0 k_B T} \times \left[1 - e^{-r/\lambda_D} \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } Q(r) = - \frac{2m_e e^3}{\epsilon_0 k_B T} \left[1 - e^{-r/\lambda_D} \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right]$$

Q40) γ est la conductivité électrique d'où $[\gamma] = \Omega^{-1} m^{-1}$ ou $S m^{-1}$

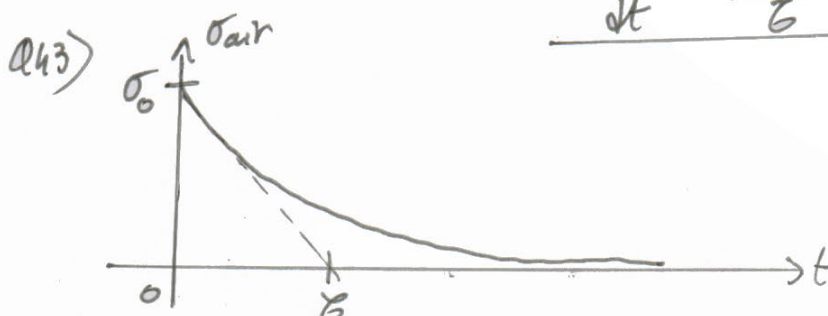
$$\text{Q41) Loi d'Ohm locale : } \vec{j} = \gamma \vec{E} \Leftrightarrow \vec{j} = -\gamma \frac{\sigma_{air}}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\text{Q42) Par définition : } i = \frac{dq}{dt} \text{ d'où } \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\sigma_{air} S)}{dt} = j S = - \frac{\gamma \sigma_{air} \cdot S}{\epsilon_0}$$

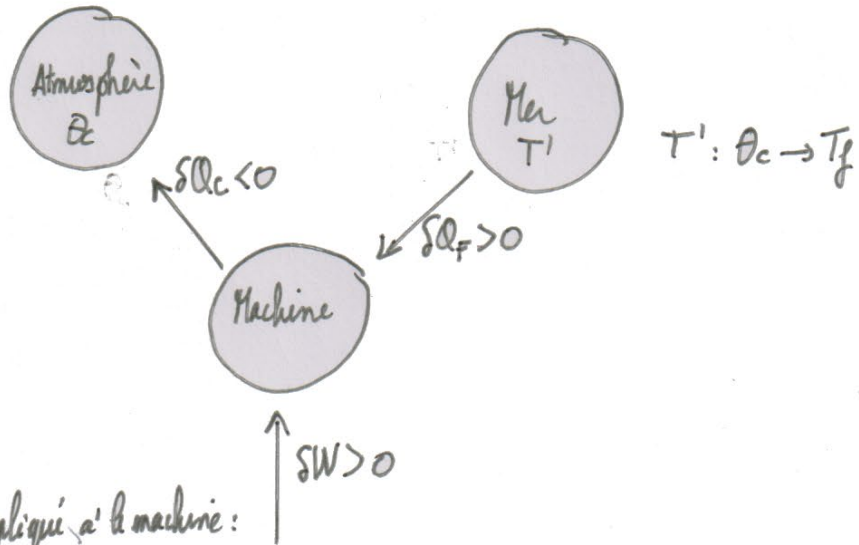
$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\gamma \sigma_{air}}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\sigma_{air}}{\tau} \text{ où } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Q44) } \tau &= \frac{\epsilon_0}{\gamma} \\
 &= \underline{\underline{8,9 \cdot 10^{-32} \text{ s}}}
 \end{aligned}$$

Q45) Schéma de principe:



Q46) de 2nd principe appliqué à la machine:

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_c \quad \text{où } \delta S_c = 0$$

$$\Rightarrow dS = \frac{\delta Q_f}{T'} + \frac{\delta Q_c}{\Theta_c}$$

$$\text{Sur un cycle } dS = 0 \quad \text{d'où : } \boxed{\frac{\delta Q_f}{T'} + \frac{\delta Q_c}{\Theta_c} = 0}$$

Q47) de premier principe appliqué à la machine s'écrit sur un cycle:

$$0 = \delta Q_f + \delta Q_c + \delta W$$

$$\Leftrightarrow 0 = \delta Q_f + \delta Q_c + P dt$$

$$\Leftrightarrow 0 = \delta Q_f \left(1 - \frac{\Theta_c}{T'}\right) + P dt$$

$$\Leftrightarrow \delta Q_f = \frac{P dt}{\frac{\Theta_c}{T'} - 1}$$

de premier principe appliqué à l'eau de mer donne : $m_{\text{eau}} dT' = -\delta Q_f$

$$\text{d'où } m_{\text{eau}} dT' = \frac{P dt}{1 - \Theta_c/T'}$$

$$\Leftrightarrow dT' \left(1 - \frac{\Theta_c}{T'}\right) = \frac{P}{m_{\text{eau}}} dt$$

$$\text{On intègre de } \Theta_c \text{ à } T_f + q : (T_f - \Theta_c) - \Theta_c \ln\left(\frac{T_f}{\Theta_c}\right) = \frac{P}{m_{\text{eau}}} \Delta t$$

$$\text{Donc } \Delta t = \frac{m c_{\text{eau}}}{P} \left[(T_f - \theta_c) + \theta_c \ln \left(\frac{\theta_c}{T_f} \right) \right]$$

$$Q48) \text{ Donc } P_{\text{min}} = \frac{m c_{\text{eau}}}{\Delta t_{\text{min}}} \left[(T_f - \theta_c) + \theta_c \ln \left(\frac{\theta_c}{T_f} \right) \right] = \underline{\underline{5,0 \text{ kW}}}$$

Q49) Premier principe appliqué à la mer que l'on souhaite congeler :

$$dU_{\text{mer}} = - dm L_{\text{fus}} = - S Q'_f$$

$$\Rightarrow S Q'_f = S m L_{\text{fus}} \text{ d'où } Q'_f = m L_{\text{fus}}$$

$$\text{On a toujours : } \left. \begin{array}{l} Q'_c + Q'_f + P_{\text{min}} \Delta t' = 0 \\ \frac{Q'_c}{\theta_c} + \frac{Q'_f}{T_f} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour la machine}$$

$$\text{Donc } \Delta t' = - \frac{Q'_f - Q'_c}{P_{\text{min}}} = - \frac{Q'_f}{P_{\text{min}}} \left[1 - \frac{\theta_c}{T_f} \right]$$

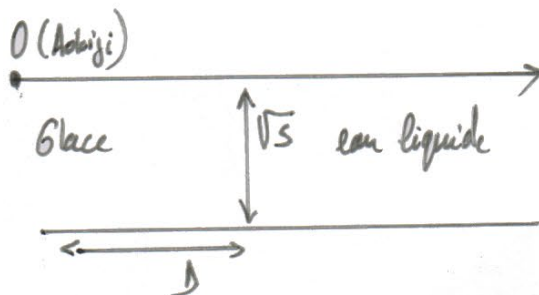
$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{m L_{\text{fus}}}{P_{\text{min}}} \left(\frac{\theta_c}{T_f} - 1 \right) = 4,9 \text{ ks} \approx \underline{\underline{1^{\text{h}} 22 \text{ min}}}$$

Q50) On définit l'efficacité de la machine thermique par :

$$\eta = \frac{Q_f + Q'_f}{W_{\text{tot}}} \Leftrightarrow \eta = \frac{m c_{\text{eau}} (\theta_c - T_f) + m L_{\text{fus}}}{P_{\text{min}} (\Delta t + \Delta t')}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\underline{\eta = 15}}$$

Q51)



Systeme : mésotronche de glace entre x et $x+dx$

Premier principe : $dU = \delta Q_{\text{éd}} + \delta Q_c$ avec $\delta Q_c = \sigma S dx dt$.

Régime stationnaire : $dU = 0$

$$d'où [j_e(x) - j_e(x+dx)] S dt + \sigma S dx dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dj_e}{dx} = \sigma$$

Q52) Dans la modélisation proposée il n'y a pas de terme de création d'oi :

$$\Leftrightarrow \frac{dj_x}{dx} = 0$$

A trois dimensions : $\text{div } \vec{j}_e = 0$

$$\text{Théorème de Green : } \iiint_V \text{div } \vec{j}_e d\mathcal{V} = \oint_{S_V} \vec{j}_e \cdot \vec{dS} = 0$$

donc \vec{j}_e est à flux conservatif

Q53) Systeme : eau liquide qui gèle entre t et $t+dt$:

$$dH = \delta Q$$

$$\Leftrightarrow \rho S dx (-L_{\text{fus}}) = -P' dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{P'}{\rho S L_{\text{fus}}}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \frac{P'}{\rho S L_{\text{fus}}}$$

$$\text{or } v_0 = \frac{D}{8t} = \frac{50 \cdot 10^3}{600} = \underline{83 \text{ ms}^{-1}} \quad d'où \underline{P' = \rho S L_{\text{fus}} v_0} = \underline{28 \cdot 10^7 \text{ W}}$$

$$Q54) d'après la loi de Newton : [h] = \frac{[Q]}{[\theta][s]T} = \frac{\text{ML}^2\text{T}^{-2}}{\theta\text{K}^2\text{T}}$$

$$d'où \underline{[h] = \text{kg s}^{-3} \text{K}^{-1}}$$

Q55) Système : mince tranche de glace entre x et $x+dx$

Premier principe en régime stationnaire :

$$dU = S \rho l \dot{x} + S \rho l \dot{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow - \frac{dja}{dx} S dx dt - h(T - \theta_c) \underbrace{VS dx}_{\text{on tient compte que la face supérieure.}} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dja}{dx} + \frac{h(T - \theta_c)}{VS} = 0$$

• Système : tranche de glace de 0 à D + eau qui va geler entre t et t+dt de largeur dx.

(Rq: m bilan qu'à Q53 avec le terme conductivité convectif en plus)

$$\Phi_{entrant} = \Phi_{perdue} \Leftrightarrow \Phi_{c.c. (atmosphère)} + \Phi_{solidification} = \Phi(0)$$

$$\Leftrightarrow ja(0)S = - \int_0^D h(T - \theta_c) VS dx - L_{fus} \frac{dm}{dt}$$

$$\Leftrightarrow ja(0)S = - h(T_g - \theta_c) VS \cdot D - L_{fus} S \frac{dx}{dt} \rho$$

On pose $\nu' = \frac{dx}{dt}$ et on suppose $ja(0) \approx \frac{P'}{S}$

$$\text{d'où : } L_{fus} \nu' \rho = \frac{P'}{S} + \frac{h(T_g - \theta_c) \cdot D}{VS}$$

$$\Leftrightarrow \nu' = \underbrace{\frac{P'}{L_{fus} \rho S}}_{\nu_0} - \underbrace{\frac{h(\theta_c - T_g) D}{L_{fus} \rho VS}}_{\nu_a}$$

$$\text{or } \nu' = \nu_0 - \nu_a$$

$$\Rightarrow \nu_a = \frac{hD(\theta_c - T_g)}{\rho L_{fus} VS}$$

Q56) D'où l'augmentation relative de puissance : $\left| \frac{P'_{air} - P'}{P'} \right| = \frac{(\nu_0 - (\nu_0 - \nu_a))}{\nu_0}$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{P'_{air} - P'}{P'} \right| = \frac{\nu_a}{\nu_0} = \frac{hD(\theta_c - T_g)}{\rho L_{fus} VS \nu_0} = 4,8\%$$

↳ Bien joué Aski!