

Physique : DS2

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Renouvellement de l'air dans l'habitat

La notion de confort dans l'habitat caractérise, pour un individu donné, son état de satisfaction avec les conditions d'environnement. Indépendamment des conditions propres à l'individu que sont son métabolisme, son activité, son habillement et sa santé, il est reconnu que quatre paramètres influencent le confort : l'environnement thermique, l'éclairage, la protection acoustique et, enfin, la qualité de l'air dont on propose l'étude dans ce sujet.

On étudiera ainsi dans la **partie I** un système de ventilation mécanique visant à renouveler l'air dans l'habitat. On réalisera dans la **sous-partie I.1** un bilan général d'énergie pour un fluide en écoulement stationnaire, avant d'analyser le principe d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux en **sous-partie I.2**. Dans la **partie II**, on s'intéressera à l'humidité de l'air dans l'habitat avec quelques généralités sur l'air humide en **sous-partie II.1**, puis la description du fonctionnement d'un hygromètre capacitif en **sous-partie II.2**. Enfin, on abordera la problématique de la nuisance sonore liée aux systèmes de renouvellement d'air dans la **partie III**. On détaillera à cet effet le principe de la correction acoustique d'une pièce d'habitation en **sous-partie III.1**, puis celui d'un silencieux à résonateur de Helmholtz en **sous-partie III.2**.

Données

- Masse molaire de l'air sec : $M_{as} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'eau : $M_e = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants d'un gaz parfait diatomique pour les températures considérées : $\gamma = 1,4$
- Pression atmosphérique : $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- Masse volumique de l'eau liquide pour les températures considérées : $\rho_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

- $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

- Opérateurs en coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour un champ scalaire U et un champ vectoriel $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{u}_z$:

$$\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$

La ventilation des principales pièces de l'habitat est indispensable pour assurer un niveau minimal de salubrité de l'air, par exemple par un simple apport d'air neuf de l'extérieur grâce à l'aération naturelle par les ouvrants de ces pièces (portes, fenêtres). Cette solution n'est toutefois pas sans inconvénients sur le confort thermique des occupants et l'efficacité énergétique de l'habitat, l'air extérieur étant plus froid que l'air intérieur en hiver et plus chaud en été. L'utilisation d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux est aujourd'hui la solution la plus commune retenue pour éviter ces inconvénients.

I.1 - Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

On considère l'écoulement parfait et stationnaire d'un fluide à travers un système ouvert (\mathcal{S}), définissant un volume de contrôle indéformable et fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} et présentant une entrée et une sortie (**figure 1**).

On définit comme système d'étude le système fermé, noté (\mathcal{S}^*), constitué du fluide contenu à l'instant t dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_1 qui y rentre entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ'_1) et (Σ_1) , et définissant un sous-système (\mathcal{S}_1). À l'instant $t + dt$, il est constitué du fluide contenu dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_2 qui en sort entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ_2) et (Σ'_2) , et définissant un sous-système (\mathcal{S}_2).

On note T_i , p_i , ρ_i , $e_{c,i}$, $e_{p,i}$, u_i et h_i respectivement la température, la pression, la masse volumique, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle de pesanteur massique, l'énergie interne massique et l'enthalpie massique du fluide contenu dans chaque sous-système (\mathcal{S}_i) où $i=1,2$.

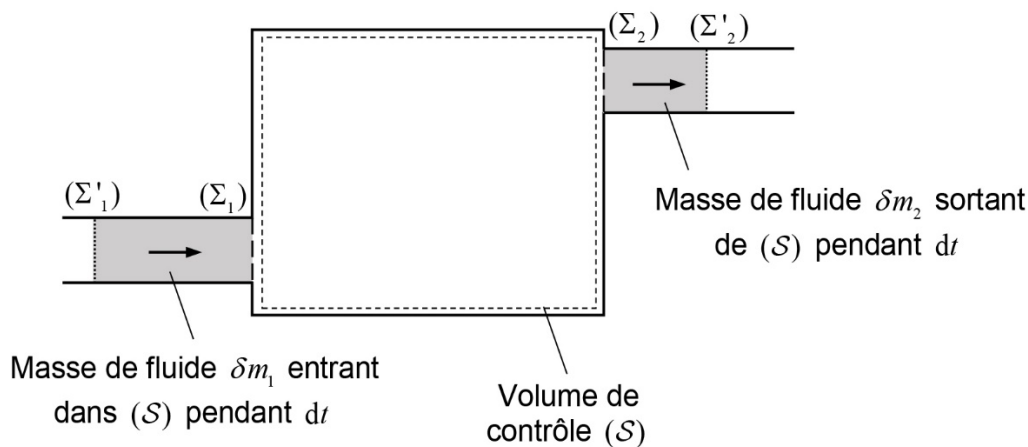


Figure 1 - Fluide en écoulement stationnaire : système fermé étudié

Q1. En traduisant la conservation de la masse du fluide contenu dans le système (\mathcal{S}^*), justifier

que le débit massique du fluide en entrée est égal à celui en sortie : $\frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt} = D_m$.

Q2. Montrer que le travail massique des forces pressantes reçu par le fluide contenu dans le

système (\mathcal{S}^*) pendant la durée dt s'écrit : $w_p = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$.

Q3. Montrer que la variation d'énergie interne du fluide contenu dans le système (\mathcal{S}^*) pendant la durée dt s'écrit : $dU = D_m(u_2 - u_1)dt$.

Donner, sans calculs supplémentaires, les expressions des variations d'énergie cinétique macroscopique dE_c et d'énergie potentielle de pesanteur dE_p du fluide.

Q4. À partir d'un bilan énergétique pour le fluide contenu dans le système (\mathcal{S}^*) pendant la durée dt , établir l'expression du premier principe pour un écoulement stationnaire :

$$D_m [(h_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (h_1 + e_{c,1} + e_{p,1})] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où \mathcal{P}_u et \mathcal{P}_{th} sont respectivement la puissance mécanique des forces extérieures non conservatives autre que celle des forces pressantes (puissance dite utile) et le flux thermique reçu par le fluide contenu dans le volume de contrôle.

I.2 - Étude d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux

On modélise une habitation par une pièce unique, de température intérieure supposée uniforme $T_{int} = 20,0 \text{ °C}$ et maintenue constante grâce à un chauffage. L'air à l'extérieur de l'habitation est à la température constante $T_{ext} = 0,0 \text{ °C}$.

Q5. En l'absence de toute ventilation, le flux thermique lié aux pertes à travers l'ensemble des parois (fenêtres, toit, murs) séparant l'habitation de l'extérieur est $\mathcal{P}_{th,p} = 5,0 \text{ kW}$ en régime stationnaire. Estimer la résistance thermique R_{th} de l'ensemble de ces parois.

L'habitation est désormais munie d'une ventilation mécanique contrôlée (VMC) à double flux. Elle se distingue d'une VMC simple flux qui insuffle dans l'habitation de l'air froid neuf à la température T_{ext} et extrait de l'air chaud vicié (c'est-à-dire ayant "servi") à la température T_{int} . Une VMC double flux comporte en effet un échangeur thermique tel que l'air chaud vicié sortant préchauffe l'air froid neuf entrant (**figure 2**).

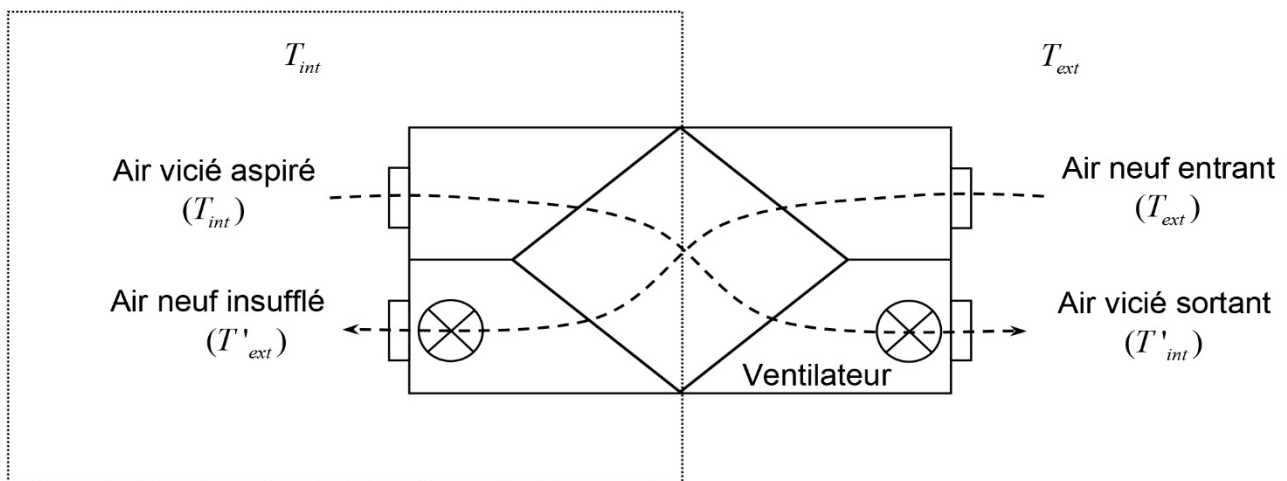


Figure 2 - Schéma de principe d'une VMC double flux

En régime stationnaire, l'air neuf entrant dans le système à la température $T_{ext} = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$ traverse l'échangeur avec un débit massique $D_m = 150 \text{ kg}\cdot\text{h}^{-1}$ avant d'être insufflé dans l'habitation à la température $T'_{ext} = 15,0 \text{ }^\circ\text{C}$. Quant à l'air vicié aspiré dans l'habitation à la température $T_{int} = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$, il sort du système à la température T'_{int} après traversée de l'échangeur avec le même débit D_m . Au sein de l'échangeur parfaitement isolé du reste du système, l'air neuf circule dans une conduite plane en contact avec une autre conduite plane dans laquelle circule l'air vicié de façon à assurer les échanges thermiques (**figure 3**). On néglige toute variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur de l'air circulant dans chacune des deux conduites.

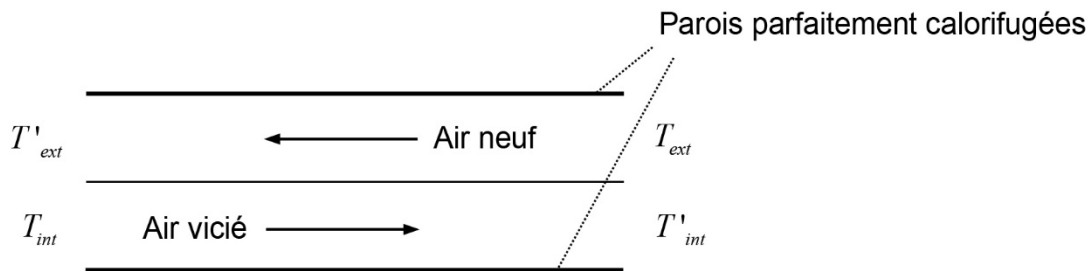


Figure 3 - Échangeur thermique

- Q6.** On assimile l'air supposé sec, donc sans vapeur d'eau, à un gaz parfait. Dans ces conditions, les capacités thermiques à pression et volume constants d'une quantité de matière n d'air, notées respectivement C_p et C_v , sont reliées par la relation de Mayer : $C_p - C_v = nR$. Établir l'expression de la capacité thermique massique à pression constante c_p de l'air en fonction notamment du rapport γ entre les capacités thermiques à pression et volume constants. Calculer c_p .
- Q7.** Montrer à l'aide de l'expression établie à la **Q4** et en précisant les systèmes ouverts choisis que $T_{int} - T'_{int} = T'_{ext} - T_{ext}$. Calculer T'_{int} .
- Q8.** Donner l'expression littérale du flux thermique $\mathcal{P}_{th,a}$ reçu par l'air insufflé à la température T'_{ext} pour le réchauffer à la température T_{int} de la pièce. Calculer $\mathcal{P}_{th,a}$.
- Q9.** Dédire des résultats précédents la puissance \mathcal{P}_c fournie par le chauffage pour maintenir une température intérieure T_{int} constante. Calculer \mathcal{P}_c .
- Q10.** Dans le cas d'une VMC simple flux, calculer le flux thermique $\mathcal{P}'_{th,a}$ reçu par l'air insufflé pour le réchauffer à la température de la pièce, puis la puissance \mathcal{P}'_c fournie par le chauffage pour maintenir cette température constante. En déduire le pourcentage d'énergie économisée en passant d'une VMC simple flux à une VMC double flux : $\frac{\mathcal{P}'_c - \mathcal{P}_c}{\mathcal{P}'_c}$.
- Quel serait le pourcentage d'énergie économisée si l'échange thermique entre l'air neuf et l'air vicié était parfait, c'est-à-dire si l'air vicié sortait de l'échangeur à la température T_{ext} ?

L'humidité de l'air d'une pièce doit être contrôlée. Trop grande, elle peut en effet favoriser le développement de moisissures, bactéries, acariens, mais aussi provoquer la dégradation de certains matériaux.

II.1 - L'air humide

L'air sec ne contient pas de vapeur d'eau. C'est un mélange de gaz, de proportions connues et invariables, principalement du diazote et du dioxygène. Un mélange d'air sec, de masse molaire M_{as} et de pression partielle p_{as} , et de vapeur d'eau, de masse molaire M_e et de pression partielle p_e , est qualifié d'air humide. Ce mélange sera considéré par la suite comme un mélange idéal de gaz parfaits.

L'air humide est caractérisé à la température T par son degré hygrométrique φ ou humidité relative : $\varphi = \frac{p_e}{p_{e,sat}(T)}$ où $p_{e,sat}(T)$ est la pression de vapeur saturante (pression d'équilibre liquide-vapeur) de l'eau pure à la température considérée.

Q11. Représenter l'allure du diagramme des phases pression-température du corps pur "eau". Y indiquer le domaine de chaque phase en présence. Définir avec précision les deux points caractéristiques qui y figurent.

L'air d'une cuisine hermétiquement close, de volume $V = 50 \text{ m}^3$, est à la pression atmosphérique p_0 et à la température $T = 293 \text{ K}$. À cette température, la pression de vapeur saturante de l'eau est égale à $2,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Le degré hygrométrique de l'air dans cette pièce est de 55%.

Q12. Rappeler la relation entre p_0 et les pressions partielles p_e et p_{as} .

Calculer les masses m_e de vapeur d'eau et m_{as} d'air sec dans la pièce. En déduire la valeur de l'humidité spécifique ϕ de l'air de la pièce, exprimée en kg d'eau par kg d'air sec et définie par : $\phi = \frac{m_e}{m_{as}}$.

Q13. On porte à ébullition un récipient rempli d'eau. Calculer le volume V_e d'eau à évaporer pour saturer en humidité l'air de la cuisine, c'est-à-dire atteindre un degré hygrométrique de 100%. On négligera l'augmentation de la température de l'air de la cuisine.

On considère maintenant que la cuisine de volume V est dotée d'un système de renouvellement d'air. L'air est supposé homogène dans la pièce, avec à l'instant t une concentration massique en vapeur d'eau $C(t)$ uniforme (exprimée en kg d'eau par m^3 d'air). De l'air extérieur neuf, de concentration massique en vapeur d'eau C_{ext} constante, entre dans la cuisine avec un débit volumique D_v , tandis que de l'air vicié de concentration massique $C(t)$ sort de la cuisine avec le même débit. Les personnes présentes dans la cuisine et leurs activités sont une source de vapeur d'eau. On note S le taux de création de vapeur d'eau dans la pièce, c'est-à-dire la masse de vapeur d'eau créée par unité de temps.

Q14. Établir une équation différentielle vérifiée par $C(t)$ à partir d'un bilan de masse entre les instants t et $t + dt$ pour la vapeur d'eau dans l'air de la cuisine.

En déduire que le débit volumique minimal nécessaire pour maintenir une concentration en vapeur d'eau sous une valeur limite C_{lim} s'écrit en régime stationnaire : $D_{v,m} = \frac{S}{C_{lim} - C_{ext}}$.

Q15. L'air extérieur, de température égale à $5\text{ }^\circ\text{C}$, a un degré hygrométrique de 100%, soit une concentration massique en vapeur d'eau $C_{ext} = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le taux de création de vapeur d'eau dans la cuisine est $S = 0,30 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$. Pour l'air dans la cuisine, de température égale à $20\text{ }^\circ\text{C}$, on souhaite ne pas dépasser un degré hygrométrique de 60%, soit une concentration massique en vapeur d'eau $C_{lim} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer le débit volumique minimal nécessaire $D_{v,m}$. Commenter le choix d'un débit massique de renouvellement d'air $D_m = 150 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ comme celui de la VMC double flux étudiée dans la partie I.

Partie II – Diffusion thermique

Ce problème traite de quelques applications de l'analyse de Fourier à la physique. Il comporte 3 parties largement indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude de l'échantillonnage d'un signal électronique. La deuxième partie aborde le filtrage acoustique à travers l'étude de la transmission d'une onde sonore par une paroi mobile. La troisième partie présente l'expérience originelle de Joseph Fourier de l'étude des phénomènes de diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique. C'est notamment cette expérience qui lui a permis d'introduire pour la première fois la décomposition d'une fonction périodique en séries dites « de Fourier ».

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau \hat{e} , ainsi, dans l'espace cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ un vecteur quelconque \vec{a} s'écrira $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Données numériques

- Masse volumique de l'air : $\mu_0 = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse volumique du fer : $\mu_f = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

- ▣ – 15. Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ , du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

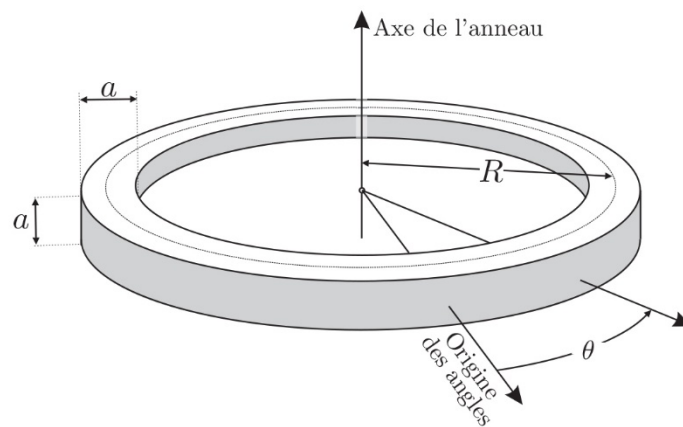


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta,t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\Phi = h(T(\theta,t) - T_e)dS,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z.$$

- – 16. Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

- – 17. Déterminer les expressions approchées de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

- – 18. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .
- – 19. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{\text{th}}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

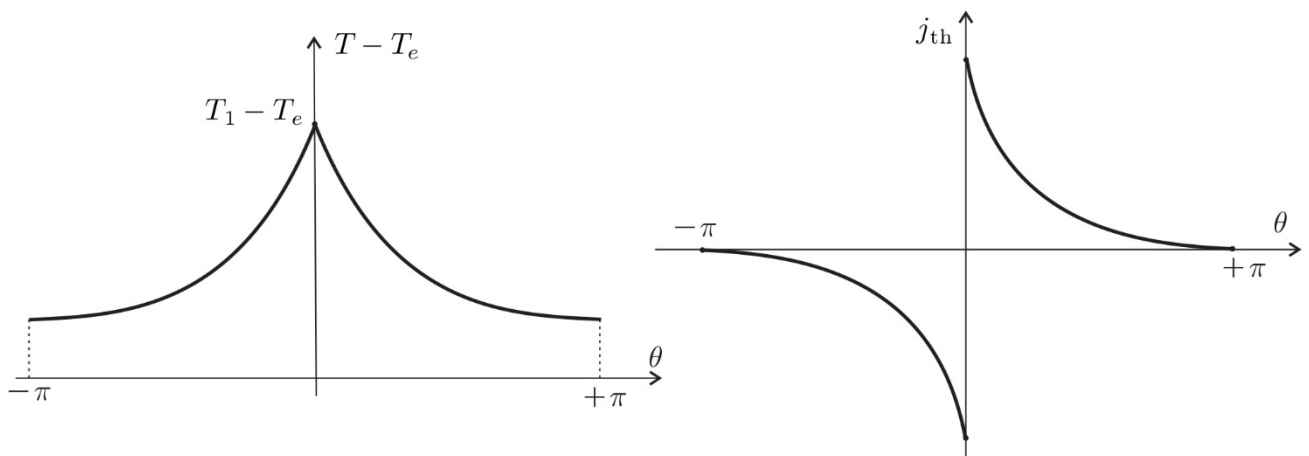


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique surfacique à droite.

- – 20. Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale

de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta, t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi]$, avec $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par symétrie.

- – 21. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta, t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}.$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

- – 22. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t).$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

- – 23. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.

Partie III – Pendule de Foucault

À la fin du XX^e siècle est apparue une réinterprétation en termes géométriques et topologiques de résultats physiques bien connus. Cette nouvelle vision a permis de regrouper des phénomènes très différents sous un même cadre théorique élégant, mais a aussi donné lieu à des prédictions très intéressantes.

Ce sujet a pour objectif d'introduire les problématiques de géométrie et de topologie à travers des exemples tirés de différents domaines de la physique : mécanique (partie I), optique (partie II), mécanique quantique (partie III), électromagnétisme (partie IV) et mécanique des fluides (partie V). Ces parties sont essentiellement indépendantes. Seules les questions de fin de partie nécessitent d'avoir traité les parties précédentes. Après un changement de partie, une notation utilisée dans les parties précédentes est libre d'être réaffectée à une autre grandeur physique.

Données numériques

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \quad \sqrt{6} \approx 2,4 \quad \sqrt{7} \approx 2,6 \quad \sqrt{11} \approx 3,3 \quad \sqrt{14} \approx 3,7$$

Masse volumique de l'eau	$\rho_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Masse volumique de l'air	$\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$

Formulaire

- Éléments d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques pour un champ scalaire f et un champ de vecteurs \vec{A} :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

- Pour tout champ de vecteurs \vec{A} , on a $\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$.
- Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et 0 sinon.
- Règle de la chaîne pour la dérivation d'une fonction f de n variables A_i , dont chacune dépend du temps :

$$\frac{d}{dt} (f(\vec{A}(t))) = \frac{d}{dt} (f(A_1(t), A_2(t), \dots)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{dA_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial A_i} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$$

- Développement par ligne du déterminant d'une matrice 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Remarque : Dans le schéma qui suit l'axe représenté (Oz) est la côte, et l'axe (x) pointe vers l'est.

1 Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67$ m de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36$ kg.

La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω . On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (cf. figure 1). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite *locale*. On note α l'angle entre le pendule et l'axe vertical dirigé par le vecteur \vec{e}_z (cf. figure 1(b)). On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.

1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis

Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.

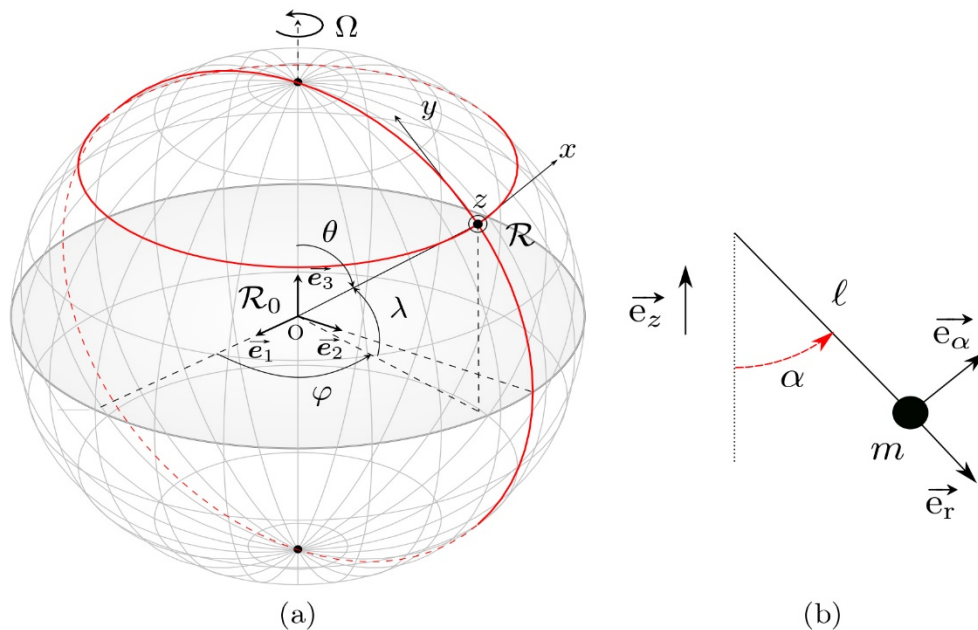


FIGURE 1 – (a) Définitions des repères liés aux référentiels géocentrique et terrestre. (b) Définition de l'angle α et de la base mobile.

1. Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz . Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.
2. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m , puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ définie sur la Fig. 1(b) (on supposera son mouvement plan).
3. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0 . Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.
4. Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α .

1.2 Effet de la force d'inertie de Coriolis

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49^\circ$ comme définie sur la figure 1(a). On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et

accélération selon l'axe Oz . On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x \vec{e}_x - m\omega_0^2 y \vec{e}_y$.

5. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0 .
6. Décomposer le vecteur \vec{e}_3 dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\tilde{\Omega} \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\tilde{\Omega} \dot{x}. \end{cases} \quad (1)$$

Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.

7. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par \underline{u} . Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues \underline{A} et \underline{B} .
8. On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de \underline{u} .
9. En utilisant le résultat de la question 5, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.
10. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24 h ?
11. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ .
12. Sur la figure 2, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifier votre réponse.



FIGURE 2 – Le professeur Tournesol et son pendule.

Il est possible de reformuler ce résultat d'un point de vue géométrique : considérons la position \vec{R} du point d'attache du pendule dans le référentiel géocentrique. La rotation de la Terre sur elle-même conduit \vec{R} à suivre une courbe fermée γ sur le globe. Mais bien que \vec{R} soit revenu à sa valeur initiale, le système dans son ensemble n'est pas revenu à son état initial : le plan d'oscillation du pendule n'est plus le même, il a tourné à cause de la présence de la force de Coriolis. On appelle ce phénomène une *non-holonomie*.

Soit γ la trajectoire fermée suivie par un point de l'hémisphère nord lors de la rotation de la planète. On définit $h(\gamma)$ comme le rapport de la surface entourée par le contour γ sur la sphère terrestre et la surface totale de la sphère.

13. Faire un schéma de la situation en précisant le chemin γ . Exprimer $h(\gamma)$ sous la forme d'une intégrale double et la calculer en fonction de λ . Mettre le résultat sous la forme $h(\gamma) = \frac{\chi}{4\pi}$. Comparer la valeur trouvée pour χ au résultat de la question 10.