Physique : DM9

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

GSM – 4G

Données :

- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ou l'air : $c = 3.10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$,
- permittivité diélectrique du vide ou de l'air : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$,
- perméabilité magnétique du vide ou de l'air : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Toutefois, la compréhension et la réalisation de la première partie permettent d'aborder plus rapidement les deux dernières parties.

On s'intéresse à l'un des deux standards de télécommunication, candidat pour la 4^e génération de la téléphonie mobile, « Long Term Evolution – Advanced ». Il est constitué, en France, de deux bandes de fréquences dites 800 MHz et 2 600 MHz. Par le déploiement de technologies particulières, des débits supérieurs à 30 Mbits / seconde pour des mobiles en mouvement sont visés.

L'espace est défini par un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ et on considère un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

PARTIE III : PROPAGATION DANS L'AIR

III.1. Propagation

III.1.1. Donner, en les nommant, les équations de Maxwell sous leurs formes locales dans l'air en l'absence de sources. On traitera des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ comme n'étant pas nécessairement ceux d'une Onde Plane Progressive Sinusoïdale (OPPS).

III.1.2. Etablir l'équation de propagation en champ électrique et en déduire l'expression de la vitesse de propagation de l'onde, en fonction des données de l'énoncé.

III.1.3. On considère à présent que le champ $\vec{E}(M,t)$ est celui d'une OPPS polarisée rectilignement parallèlement à $\vec{e}_x$, se propageant suivant les z croissants et dont la formulation générale est donnée par l'expression complexe $\underline{\vec{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E}_m}\, e^{j\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}$.
$\vec{k}$ est le vecteur d'onde de norme constante k, ω est la pulsation et $\overrightarrow{\underline{E}_m}$ est une constante complexe vectorielle.

III.1.3.a. Préciser et justifier l'expression de $\vec{k}$ et la direction de $\overrightarrow{\underline{E}_m}$.

III.1.3.b. Donner l'expression de $\underline{\vec{E}}(M,t)$ en fonction des coordonnées de M et en projection dans la base cartésienne $\mathcal{B}$ associée à $\mathcal{R}$.

III.1.3.c. Expliciter les deux termes de l'équation de propagation en fonction de k, ω et $\underline{\vec{E}}(M,t)$.

III.1.3.d. En déduire la relation de dispersion du milieu.

III.1.4. Dans l'hypothèse de la question précédente, expliciter le champ $\underline{\vec{B}}(M,t)$ dans la base cartésienne $\mathcal{B}$ en fonction de $\underline{E}_m$, c, k et ω.

III.1.5. En notant $\underline{E}_m = E_m\, e^{j\varphi}$, φ étant une constante, expliciter les champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

III.2. Puissance et rayonnement

III.2.1. Donner la définition du vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$ en fonction des champs et son interprétation physique. Quelle est sa dimension physique ?

III.2.2. Montrer que la valeur moyenne temporelle de la norme de $\vec{R}(M,t)$ peut s'écrire $\left\langle \left\| \vec{R} \right\| \right\rangle = \alpha\, c\varepsilon_0 {E_m}^2$ pour les champs de l'OPPS définie dans la partie **III.1**. On donnera la valeur de la constante α.

III.2.3. Dans le cas d'une antenne réelle, l'hypothèse de l'OPPS n'est valable que localement. On sait alors que la valeur de $\left\langle \vec{R} \right\rangle$ dépend de la distance d à l'antenne, de la puissance P_a d'alimentation et de son gain G, lequel dépend de la direction d'observation. On peut ainsi écrire : $4\pi d^2 \left\langle \left\| \vec{R}(d) \right\| \right\rangle = P_a\, G$. Exprimer l'amplitude E_m du champ en fonction de c, ε_0, P_a, G et d.

III.3. Exposition

Il est parfois nécessaire de privilégier un sens de fonctionnement de l'antenne. L'énergie rayonnée par une antenne est alors répartie de manière inégale dans l'espace et il existe des directions privilégiées, appelées "lobes de rayonnement". Ces différentes directions peuvent être visualisées à l'aide du diagramme de rayonnement réalisé en trois dimensions. Le lobe le plus important est appelé "lobe principal". Il est dirigé vers l'avant de l'antenne. Les lobes secondaires, moins importants, sont dirigés vers l'arrière ou sur les côtés de l'antenne.

La norme sanitaire pour ce type de rayonnement est actuellement en France $E_{\max} = 61\ \mathrm{V/m}$. Elle correspond à un seuil défini sur la base des effets thermiques (échauffement) liés au champ électromagnétique. A titre de comparaison, la norme en Italie, Russie, Pologne et Chine est de $E_1 = 6\ \mathrm{V/m}$.

III.3.1. Dans le cadre d'une implantation urbaine, il se peut que certains locaux interceptent le lobe principal. En considérant dans ce cas une puissance $P_a = 50\ \mathrm{W}$, un gain $G = 63$ et une distance d = 100 m, calculer l'intensité du champ E_{m1}. Commenter le résultat.

III.3.2. Une autre possibilité d'être exposé au rayonnement d'une antenne relais concerne le lobe secondaire orienté vers le sol. Dans ce cas le gain est plus faible, mais la distance également. Calculer, pour la même puissance $P_a = 50$ W, le champ E_{m2} dans le cas où $G = 2$ et $d = 10$ m. Commenter le résultat.

PARTIE IV : REFLEXION D'UNE OPPS PAR UN MUR DE BETON

De façon préliminaire, on considère une interface air – métal parfait dans le plan $z = 0$. L'air occupe l'espace des $z < 0$ et le métal celui des $z > 0$. L'onde incidente est une OPPS se propageant dans l'air, polarisée selon $\vec{e}_x$ et qui arrive normalement à l'interface. On note $\underline{E}_{mi} = E_m e^{j\varphi}$ et $\underline{E}_{mr}$, respectivement, les amplitudes complexes des champs incident et réfléchi. On note $\vec{k}_i$ et $\vec{k}_r$, les vecteurs d'ondes associés respectifs. On admet que l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente.

IV.1. Expressions des champs

IV.1.1. Exprimer les champs électrique $\underline{\vec{E}}_i(M,t)$ et magnétique $\underline{\vec{B}}_i(M,t)$ incidents en fonction de $\underline{E}_{mi}$, z, ω, t et $k = \left\|\vec{k}_i\right\| = \dfrac{\omega}{c}$.

IV.1.2. Exprimer les champs électrique $\underline{\vec{E}}_r(M,t)$ et magnétique $\underline{\vec{B}}_r(M,t)$ réfléchis en fonction de $\underline{E}_{mr}$, z, ω, t et $k = \left\|\vec{k}_i\right\| = \dfrac{\omega}{c}$.

IV.1.3. Rappeler les propriétés d'un conducteur à l'équilibre. Quelles sont les expressions des champs $\underline{\vec{E}}_c(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}_c(M,t)$ dans le conducteur ?

IV.1.4. Enoncer, sous sa forme la plus générale, la relation de passage pour les composantes tangentielles du champ électrique.

IV.1.5. En déduire la valeur du coefficient de réflexion en champ $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{mr}}{\underline{E}_{mi}}$.

IV.2. Champ total et ondes stationnaires

IV.2.1. Déterminer l'expression du champ total réel $\overrightarrow{E_{total}}(M,t)$.

IV.2.2. Quelle est sa particularité ? Justifier.

IV.2.3. Représenter l'amplitude de $\overrightarrow{E_{total}}(M,t)$ en fonction de la position de M pour trois valeurs différentes de t.

IV.2.4. Localiser et nommer les points remarquables de la représentation.

IV.2.5. Donner la distance d_m entre un minimum et un maximum adjacents en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde.

On remplace à présent le métal parfait par du béton. On reprend l'ensemble du problème et des notations considérées dans les parties **IV.1** et **IV.2**. On donne le nouveau coefficient de réflexion en champ $\underline{r} = r\,e^{j\alpha}$ dans la gamme de fréquence de la bande 2 600 MHz avec $r = 0{,}386$ et $\alpha = 169°$.

IV.3. Mettre le champ total $\vec{\underline{E}}_{total}(M,t)$ dans l'air sous la forme $\vec{\underline{E}}_{total}(M,t) = \left[\underline{f}(z)\right]\vec{\underline{E}}_i(M,t)$ et exprimer $\underline{f}(z)$ en fonction de r, α, z et k.

IV.4. En constatant que $\left\|\vec{\underline{E}}_{total}\right\| = \left|\underline{f}(z)\right|\left\|\vec{\underline{E}}_i\right\|$, exprimer les valeurs maximale $\left\|\vec{\underline{E}}_{total}\right\|_{\max}$ et minimale $\left\|\vec{\underline{E}}_{total}\right\|_{\min}$ de l'amplitude de $\left\|\vec{\underline{E}}_{total}\right\|$ en fonction de r et E_m.

IV.5. Pour le coefficient de réflexion donné ci-dessus pour le béton, calculer le rapport $\rho = \dfrac{\left\|\vec{\underline{E}}_{total}\right\|_{\max}}{\left\|\vec{\underline{E}}_{total}\right\|_{\min}}$, également appelé Rapport d'Onde Stationnaire ou ROS.

IV.6. Donner la distance d_m entre un minimum et un maximum adjacents.

IV.7. Pour un véhicule se déplaçant à $v = 60$ km/h, calculer le temps qui s'écoule entre un maximum et un minimum de champ. En quoi cela peut-il affecter la communication ?

PARTIE V : TECHNOLOGIE MIMO

L'une des clés pour l'élévation du débit de la 4G réside dans la capacité des antennes à différencier les signaux en fonction de leur direction d'arrivée (ou d'envoi). Pour illustrer cette fonction, considérons le cas de deux OPPS de même amplitude E_m, mais de phases à l'origine différentes. En associant cette origine à la première onde, on a $\underline{E}_{m1} = E_m \neq E_m\,e^{j\varphi} = \underline{E}_{m2}$. Elles utilisent le même canal et donc la même pulsation ω. Elles ont la même polarisation rectiligne $\vec{e}_x$. Les directions d'arrivée en un point quelconque de l'espace sont $\vec{k}_1 = k\left(\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$ et $\vec{k}_2 = k\left(-\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$.

V.1. Champs électriques

V.1.1. En vous appuyant sur un schéma clair, représenter dans le repère cartésien les vecteurs $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$, ainsi que les champs associés $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$ et $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$ en respectant la vraisemblance liée à la structure des OPPS.

V.1.2. Exprimer les composantes $\underline{E}_{1x}(M,t)$ et $\underline{E}_{2x}(M,t)$ respectivement des champs $\vec{\underline{E}}_1(M,t)$ et $\vec{\underline{E}}_2(M,t)$ selon la direction $\vec{e}_x$ en fonction de E_m, φ, ω, t, k, z, y et θ.

V.2. Détection MIMO

V.2.1. On dispose deux antennes de réception en mesure de détecter le champ électrique aux points $P\left(x_P = 0, y_P = -\dfrac{\lambda}{4}, z_P = 0\right)$ et $Q\left(x_Q = 0, y_Q = +\dfrac{\lambda}{4}, z_Q = 0\right)$. Exprimer les composantes $\underline{E}_{1x}(P,t)$, $\underline{E}_{1x}(Q,t)$, $\underline{E}_{2x}(P,t)$ et $\underline{E}_{2x}(Q,t)$ des champs en fonction de E_m, φ, ω, t et θ, puis exprimer les champs totaux $\overrightarrow{\underline{E}_{total}}(P,t)$ et $\overrightarrow{\underline{E}_{total}}(Q,t)$ en fonction de ces mêmes paramètres.

V.2.2. On introduit le paramètre réel et variable ϕ. Grâce à un calculateur numérique, on peut estimer la quantité $\vec{\underline{E}}(t,\phi) = \overrightarrow{\underline{E}_{total}}(P,t) + e^{j\phi}\overrightarrow{\underline{E}_{total}}(Q,t)$ pour diverses valeurs de ϕ. Montrer que les contributions issues des champs $\vec{\underline{E}}_1$ et $\vec{\underline{E}}_2$ font apparaître respectivement les facteurs $\underline{f}_1(\phi) = 1 + e^{j(\phi+\pi\sin\theta)}$ et $\underline{f}_2(\phi) = 1 + e^{j(\phi-\pi\sin\theta)}$.

V.2.3. Proposer deux valeurs particulières ϕ_1 et ϕ_2 respectivement telles qu'après calcul de $\vec{\underline{E}}$:

- on annule la contribution de $\vec{\underline{E}}_2$ dans $\vec{\underline{E}}(t,\phi_1)$,
- on annule la contribution de $\vec{\underline{E}}_1$ dans $\vec{\underline{E}}(t,\phi_2)$.

V.2.4. On peut donc conclure que, si les directions d'arrivée sont connues et que l'on dispose d'une capacité de calcul suffisante, on peut séparer les deux signaux. Commenter l'intérêt de ce traitement dans le contexte du sujet.