Physique : DM6

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Aspects de la propulsion spatiale

Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\widehat{u}_x$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

Données valables dans tout le problème

- Masse de l'électron, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- Charge élémentaire, $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- Constante de Newton de la gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^2}$;
- Permitivité diélectrique du vide, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$;
- Constante d'Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$;
- Rayon de la Terre, $R_t = 6,37 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$;
- Masse de la Terre, $M_t = 5,97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$;
- Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- Constante de Boltzmann, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$;
- Constante de Planck, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$;
- Constante des gaz parfaits, $R = 8,31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$;

Ce problème s'intéresse à la propulsion d'engins spatiaux et plus particulièrement au moteur ionique, dans lequel le carburant n'est pas brûlé mais ionisé. Les ions alors libérés passent par deux grilles fortement chargées électriquement et subissent ainsi une accélération. La force d'accélération des ions cause une force de réaction de sens opposé : c'est la force de propulsion du moteur à ions. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

I. — Généralités

I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse

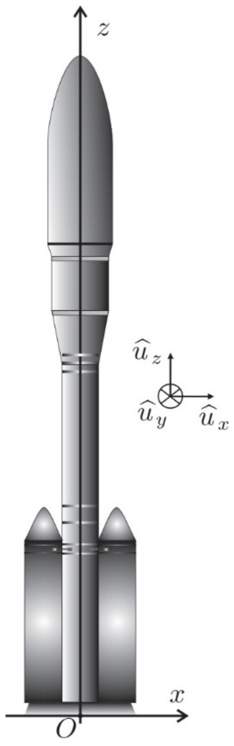

FIGURE 1 – Fusée

A l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m_0 décolle verticalement dans le référentiel terrestre (voir figure 1). On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés, par $D_m = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\vec{u} = -u\widehat{u}_z$ avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note $\vec{v} = v(t)\widehat{u}_z$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur g reste uniforme lors du lancement.

❑ **1** — En prenant pour système la fusée à l'instant t, exprimer sa quantité de mouvement $\vec{p}_f$ aux instants t et $t + \mathrm{d}t$. Déterminer de même la quantité de mouvement $\vec{p}_g$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$ du gaz éjecté pendant $\mathrm{d}t$.

❑ **2** — On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{w}(t)$ est définie par la relation $\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\vec{w}(t+\mathrm{d}t) - \vec{w}(t)}{\mathrm{d}t}$. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble $\{\text{fusée} + \text{gaz}\}$, établir l'équation différentielle

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_m u - mg \qquad (1)$$

❑ **3** — Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité F de la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

❑ **4** — On nomme impulsion spécifique I_s d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse m de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par m à la surface de la terre. Exprimer I_s en fonction de u et g.

❑ **5** — Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t, en fonction de t, $m(t)$, g, u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0.

❑ **6** — On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire), sa masse totale est alors m_i et sa vitesse $\vec{v} = v_i\widehat{u}_z$. On allume à nouveau un moteur pendant une durée Δt conduisant à une variation de masse $\Delta m = m_i - m_f$. Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté $\Delta V = v_f - v_i$, en fonction de u, m_i et m_f.

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale $m_t = 134$ tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est $m_{t_1} = 110$ tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est $m_{t_2} = 24,0$ tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

❑ **7** — En considérant que la vitesse d'éjection des gaz $u = 4,00\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masses, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

Une autre manière de minimiser les dépenses en carburant est d'augmenter la vitesse d'éjection, limitée à quelques kilomètres par seconde dans le cas d'une propulsion chimique comme nous le verrons dans la suite de ce problème.

❏ **8** — Pour une charge utile de masse $m_u = 500\,\mathrm{kg}$, calculer les masses m_{c_1}et m_{c_2} de carburant (la masse initiale du vaisseau est $m_0 = m_u + m_c$) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse $\Delta V = 5,00\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, dans le cas d'une propulsion chimique ($u = 4,00\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) et d'une propulsion ionique ($u = 20,0\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$).

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

❏ **9** — Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme v dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse dm du gaz éjectée pendant dt, en déduire la puissance cinétique P_{jet} contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de D_m, u et v.

❏ **10** — On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

où l'on précisera l'expression de x en fonction des données du problème.

❏ **11** — Tracer la courbe $\eta(x)$, pour quelle valeur de x le rendement propulsif est-il maximal ? Pour quelles valeurs de x le rendement est il nul ? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection variable soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergétique de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Limites de la propulsion chimique

Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre S_1' et S_2' à l'instant $t + \mathrm{d}t$. Durant le laps de temps dt cette tranche échange un certain travail W et une certaine quantité de chaleur Q avec l'extérieur. On note par ailleurs W' le travail échangé sans mettre en jeu les forces de pression.

❏ **12** — Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette tranche, écrire, en régime permanent, la relation entre W', Q et les variations d'énergie massique de la tranche considérée.

On se place dans la tuyère d'un moteur fusée, lorsque l'écoulement est permanent et s'effectue à altitude constante sans travail autre que celui des forces de pression. Le gaz éjecté est considéré comme parfait, de masse molaire M, d'indice adiabatique $\gamma = 1,4$. Il provient d'une chambre de combustion, où ses température et pression sont notées T_c et P_c . Le gaz est initialement au repos, $v_c = 0$. Par ailleurs, on considère que le transit du gaz dans la tuyère est suffisamment rapide et les échanges suffisamment lents pour que l'on puisse négliger les transferts thermiques.

❏ **13** — Exprimer la vitesse maximale atteinte par le gaz en sortie de la tuyère en fonction de γ, R, T_c et M. On négligera la température de sortie devant T_c.

❏ **14** — Les ergols utilisés pour la propulsion sont du dihydrogène et du dioxygène, leur réaction stœchiométrique permet d'obtenir une température de combustion de l'ordre de $T_c = 3,0 \cdot 10^3$ K. Calculer la vitesse maximale d'éjection des gaz issus de la tuyère et l'impulsion spécifique correspondante.

Partie II – Etude de l'éolienne

G) Préliminaire :

Bilan d'énergie pour un système ouvert en écoulement permanent :

Expression générale du premier principe de la thermodynamique pour un système fermé :

27) Rappeler l'équation générale traduisant la conservation de l'énergie pour un système fermé en mouvement.

Bilan enthalpique lors de l'écoulement unidimensionnel d'un fluide en régime permanent :

On considère un fluide parfait, en écoulement permanent, de débit massique D_m qui traverse une partie active (figure 3) qui lui fournit une puissance utile P_u et une puissance thermique P_{th}.

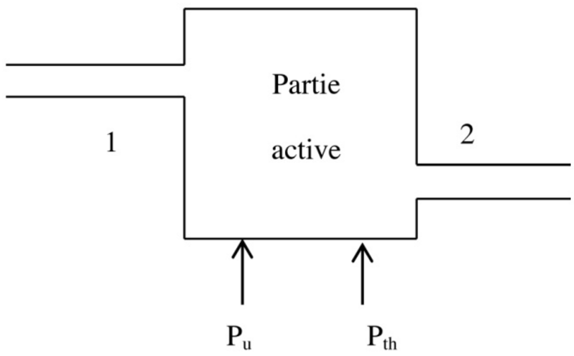

Figure 3 : partie active

On note respectivement P_1, e_{c1}, e_{p1}, u_1, h_1 et v_1 : la pression, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle massique, l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et le volume massique du fluide en amont de la partie active.

Ces mêmes grandeurs sont notées P_2, e_{c2}, e_{p2}, u_2, h_2 et v_2 en aval de la partie active.

On considère comme système fermé à la date t l'ensemble constitué du fluide contenu dans la partie active à la date t et du fluide, de masse dm_1, qui va entrer pendant l'intervalle de temps dt dans cette partie active.

28) a) Définir le système à la date t + dt.

b) En notant dm_2 la masse qui est sortie de la partie active entre t et t + dt, comparer dm_1 et dm_2. Que conclure quant au débit massique D_m ?

29) Donner les expressions des travaux des forces de pression δW_1 et δW_2 respectivement en amont et en aval du système pendant l'intervalle de temps dt.

30) En s'appuyant sur l'équation de conservation de l'énergie, montrer qu'on peut établir une nouvelle équation (E_1) de la forme :

$$D_m\left[(x_2 - x_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + (e_{p2} - e_{p1})\right] = P_u + P_{th}\,. \qquad (E_1)$$

Préciser à quoi correspond la fonction x ainsi que son unité.

Dans toute la suite du problème, on négligera les variations d'énergie potentielle de sorte que le bilan précédent s'écrira sous la forme suivante :

$$D_m\left[(x_2 - x_1) + (e_{c2} - e_{c1})\right] = P_u + P_{th}\,.$$

Bilan de quantité de mouvement pour un système unidimensionnel en écoulement permanent :

De même, l'établissement d'un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle (figure 4) délimité par deux sections droites S_1 et S_2, d'un tube de courant où le fluide entre avec une vitesse $\vec{V}_1$ supposée uniforme sur la section S_1 et en ressort avec une vitesse $\vec{V}_2$ également uniforme sur la section S_2, permet d'établir une équation (E_2) du type :

$$Y_m\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right) = \vec{R} \qquad (E_2)$$

où $\vec{R}$ est la résultante des forces exercées sur le fluide considéré par les éléments en contact avec celui-ci.

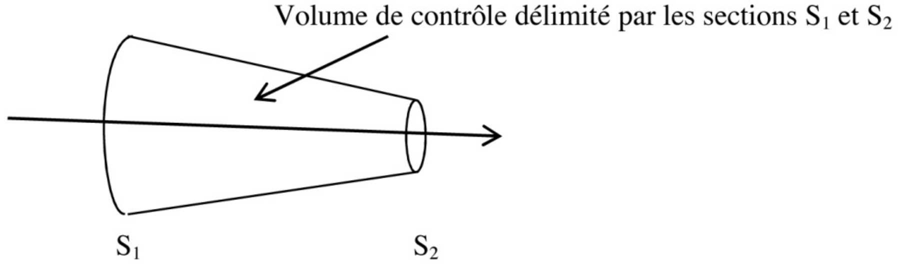

Figure 4 : volume de contrôle

31) Par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de Y_m et préciser à quoi correspond ce terme.

H) Application à l'éolienne :

Modélisation :

L'éolienne sera assimilée à ses pales qui récupèrent une puissance mécanique $P_{éol}$ provenant de l'écoulement de l'air avoisinant.

L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé Galiléen où les pales sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe x'x de vecteur unitaire $\vec{e}_x$ (figure 5).

Les effets de la pesanteur sont négligeables. L'air est assimilé à un gaz parfait. L'écoulement de l'air autour des pales est supposé stationnaire, parfait, incompressible et à symétrie de révolution autour de l'axe x'x. On note ρ la masse volumique de l'air.

La figure 5 représente le tube de courant passant par les extrémités des pales de l'hélice.

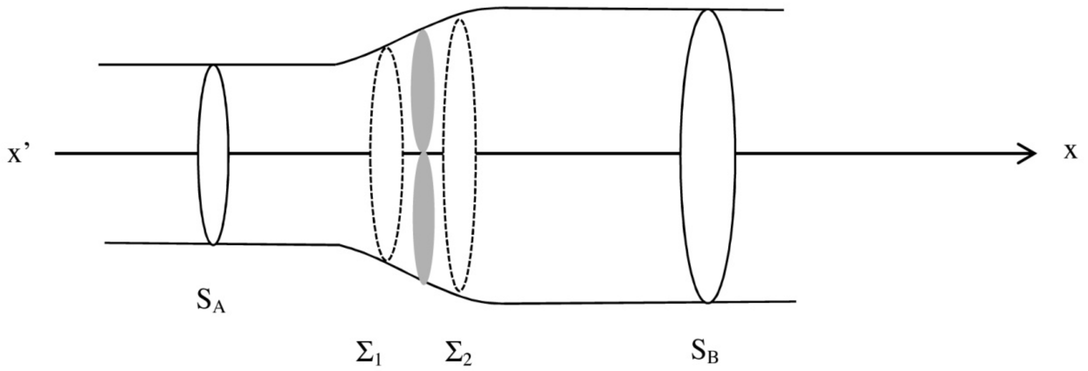

Figure 5 : pales de l'éolienne et tube de courant

La vitesse de l'air est supposée uniforme sur une section perpendiculaire au tube de courant. Elle vaut respectivement : $\vec{V}_A = V_A\vec{e}_x$, sur la section S_A située loin en amont des pales et vaut $\vec{V}_B = V_B\vec{e}_x$ sur la section S_B située loin en aval des pales. A grande distance des pales, en amont ou en aval, la pression de l'air est égale à la pression atmosphérique P° et la température égale à T_0.

Les sections Σ_1 et Σ_2, situées au voisinage immédiat des pales, l'une en amont et l'autre en aval, ont leurs aires quasiment identiques. De sorte que l'on supposera $\Sigma_1 = \Sigma_2 = S$, au premier ordre. La pression du fluide est supposée uniforme sur chacune de ces sections et vaut P_1 sur Σ_1 et P_2 sur Σ_2.

Au voisinage des pales, il y a continuité de la composante normale, (suivant $\vec{e}_x$), de la vitesse de l'air. Cette composante sera notée : $\vec{V} = V\vec{e}_x$. On néglige la dissipation d'énergie par frottement de l'air le long des pales.

Puissance récupérable par les pales de l'éolienne :

32) Ecrire deux relations liant tout ou partie de ces grandeurs : S_A, V_A, S_B, V_B, S et V.

33) Exprimer les pressions P_1 et P_2 en fonction de P°, ρ, V_A, V_B et V.

34) On se propose d'appliquer l'équation (E_2) sur le fluide contenu dans le tube de courant compris entre les sections voisines Σ_1 et Σ_2 situées de part et d'autre des pales de l'éolienne.

a) On note $\vec{R}_{12} = R_{12}\vec{e}_x$: la résultante des forces exercées sur l'air considéré et $\vec{F}_{\text{pâles}\to\text{air}} = F\vec{e}_x$: la force exercée par les pales de l'éolienne sur l'air.
Exprimer R_{12} en fonction de F, P_1, P_2 et de S.

b) Par application de l'équation (E_2), en déduire que $\vec{R}_{12} = \vec{0}$.

c) Exprimer alors F en fonction de P_1, P_2 et S.

d) Puis exprimer F en fonction de ρ, S, V_A et V_B.

35) On se propose d'appliquer l'équation (E_2) sur le fluide contenu dans le tube de courant compris entre les sections éloignées S_A et S_B situées en amont et en aval des pales de l'éolienne, en admettant que la résultante des forces de pression est nulle.
Exprimer F en fonction de ρ, S, V, V_A et V_B.

36) Déduire de ce qui précède une relation simple entre V_A, V_B et V.

37) On se propose d'appliquer l'équation (E_1) sur la portion du tube de courant, délimitée par les sections S_A et S_B, considérée comme une partie active.

Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) le fait que $P_{th} = 0$?

Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) le fait que $h_B - h_A = 0$?

38) Quelle est la puissance algébrique utile fournie par les pales de l'éolienne au fluide considéré ? En déduire l'expression de la puissance mécanique, $P_{éol}$, fournie par le vent à l'éolienne en fonction de ρ, S, V_A et V_B.

39) En posant $x = \dfrac{V_B}{V_A}$, exprimer $P_{éol}$ en fonction de ρ, S, V_A et x. Pour quelle valeur de x, $P_{éol}$ est-elle maximale ? Exprimer cette valeur maximale en fonction de ρ, S et V_A.

40) Application numérique :

a) Evaluer la puissance maximale récupérable par une éolienne dont les pales ont un diamètre D = 60 m pour une vitesse du vent de 40 $km.h^{-1}$.

b) Combien faudrait-il d'éolienne de ce format, dans les mêmes conditions météorologiques pour produire la même puissance qu'une tranche de centrale nucléaire de 1 500 MW ?