

Physique : DM5

Partie I : Vol d'une balle de Golf (Centrale PC - 2012)

II.A) Écoulement stationnaire \vec{v} ne dépend pas de t .

• Invariance par translation selon Oz : \vec{v} ne dépend pas de z .

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(r, \theta)$$

II.B) Quand $r \rightarrow \infty$: $\vec{v} = \vec{v}_0$
 ——— $r = R$: $v_r = 0$ | par continuité de fluide parfait

II.C) Écoulement irrotationnel : $\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{grad } \phi$

$$\text{II.D) Soit } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(-v_0 + \frac{p}{2\pi R z} \right) \cos \theta = v_r \\ \left(v_0 + \frac{p}{2\pi R z} \right) \sin \theta + \frac{R^2 \Omega}{r} = v_\theta \\ 0 = v_z \end{cases}$$

$$\text{II.E) Soit } \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v} = \vec{v}_0 \Leftrightarrow -v_0 \cos \theta \vec{u}_r + v_0 \sin \theta \vec{u}_\theta = v_0 \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{u}_x = -\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta \text{ ce qui est vrai}$$

$$\text{de plus } v_r(R) = 0 \Leftrightarrow p = 2\pi R^2 v_0$$

II.F) Écoulement parfait, stationnaire, incompressible et irrotationnel

\rightarrow Théorème de Bernoulli t.q :

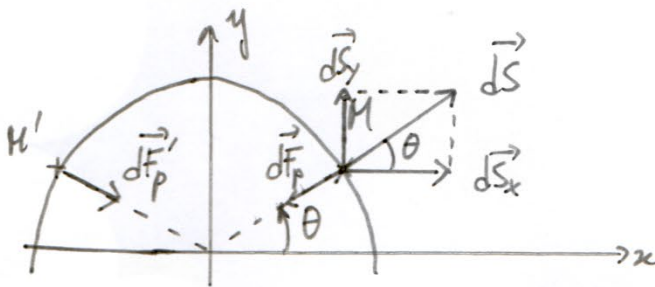
$$\frac{p(r)}{\mu} + \frac{v^2(r)}{2} = \frac{p_0}{\mu} + \frac{v_0^2}{2}$$

Si on se place en $r = R$:

$$\begin{aligned} p(R, \theta) &= p_0 + \rho \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2(R)}{2} \right) \\ &= p_0 + \rho \left(\frac{v_0^2}{2} - \left[v_0 \left(1 + \frac{R^2}{R^2} \right) \sin \theta + \frac{R^2 \Omega}{R} \right]^2 \right) \\ &= p_0 + \frac{\rho}{2} v_0 \left(v_0 - 4 \sin^2 \theta \frac{v_0}{2} - \frac{(R\Omega)^2}{v_0} - 4 \sin \theta R \Omega \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(R, \theta) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \left(2 \rho v_0^2 \sin^2 \theta + 2 \rho v_0 R \Omega \sin \theta + \frac{\rho R^2 \Omega^2}{2} \right)$$

II.6) Soit $\vec{F}_p = \iint_S d\vec{F}_p = - \iint_S p(R, \theta) d\vec{S}$



Or $d\vec{F}'_{px} + d\vec{F}_{px} = \vec{0}$ car $P(M) = P(M')$ vu que $p(\theta)$ est impair.

$\Rightarrow \vec{F}_p$ n'a pas de composante selon Ox

II.7) Calculons F_{py} : $F_{py} = \iint_S dF_{py} = - \iint_S p(R, \theta) \cdot dS_y$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow F_{py} &= - \iint_S p(R, \theta) R d\theta d\theta \sin \theta \quad \text{ou' on met } p(R, \theta) = A + B \sin \theta + C \sin^2 \theta \\ &= - R h \left[\int_0^{2\pi} A \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} B \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} C \sin^3 \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

$$\text{or } \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = - \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = - \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

donc $F_{py} = -RhB\pi$

$$\Rightarrow F_{py} = +Rh\pi \cdot 2\rho v_0 R\Omega$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{F}_p = 2\rho v_0 \pi R^2 h \Omega \vec{u}_y}$$

$$\text{Or } \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\omega_0 \vec{u}_x \wedge \Omega \vec{u}_z = \omega_0 \Omega \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{F}_p = \alpha \vec{\omega} \wedge \vec{v} \text{ où } \alpha = 2\rho \pi R^2 h}$$

II.1.1) Si $\Omega > 0$, la portance est dirigée vers "le haut" et va aller plus loin.
Si $\Omega < 0$ "le bas" et va aller moins loin.

II.1.2) On obtient $\begin{cases} F_p = 0,4N \\ P = 0,45N \end{cases} \Rightarrow$ la force de Magnus compense pratiquement le poids.

II.1.3) Si $\vec{\omega} \neq \Omega \vec{u}_z$ il va y avoir des composantes de \vec{F}_p suivant Ox et Oz et la balle va être déviée de la trajectoire déviée.

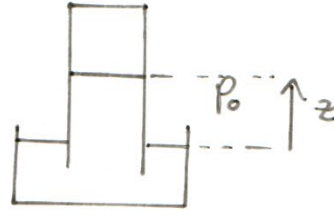
II.1.4) Il faut tenir compte de la viscosité de l'air. la balle va être freinée et elle tournera moins vite.

Partie II - Physique du cavitron (Mines Ponts PC 2019)

I.A) Pressions négatives

1°) Statique des fluides: $\frac{dp}{dz} = -\rho g$.

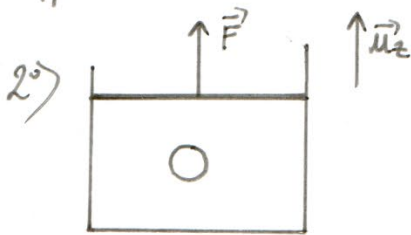
$$\Rightarrow p(z) = p_0 - \rho g z$$



$$\text{Donc } p < 0 \Leftrightarrow p_0 - \rho g z < 0$$

$$\Leftrightarrow z > \frac{p_0}{\rho g} = z_m \quad \Rightarrow z_m = \frac{10^5}{10^3 \times 10} = \underline{\underline{10 \text{ m}}}$$

• Pour des arbres de hauteur supérieure à 10m, la pression de l'eau est "négative" \Rightarrow l'eau liquide sera dans un état métastable ou des bulles de vapeur apparaîtront.



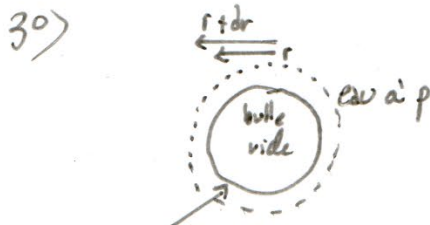
Si on applique le PFD au piston de masse nulle on a:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \Leftrightarrow \vec{0} = \sum \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \underbrace{\vec{F}}_{F\vec{u}_z} + p_{\text{eau}} \cdot S\vec{u}_z$$

$$\text{D'où } p = -\frac{F}{S} < 0$$

La pression de l'eau est négative et la nucléation de bulles de vapeur est possible.



Couronne
sphérique

$$\text{Soit } \delta W_p = -p dV$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\delta W_p = -p 4\pi r^2 dr}}$$

$$\Leftrightarrow \delta W_p = -d\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot p\right) = -p \cdot 4\pi r^2 \cdot dr.$$

Ce travail peut s'écrire sous la forme $\delta W_p = -dE'_p = \vec{F}' \cdot d\vec{u}_r$.

$$\text{Si on choisit } E'_p(0) = 0 \text{ alors : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}' = -p \cdot 4\pi r^2 \vec{u}_r \\ E'_p = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot p \end{array} \right.$$

4°) D'après l'énoncé $E_p = E'_p + \gamma_e \Sigma$

$$\Leftrightarrow E_p = \frac{4}{3}\pi r^3 p + 4\pi r^2 \cdot \gamma_e.$$

$$\text{t.q. } \frac{dE_p}{dr} = 0 \Leftrightarrow pr^2 + 2r\gamma_e = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } -\frac{2\gamma_e}{p} = r_c.$$

La valeur $r = 0$ correspond à un minimum local nul de E_p : $E_p(0) = 0$.

— $r = r_c$ — maximum de E_p : $E_a = E_p(r_c)$ t.q

$$E_p(r_c) = \frac{4}{3}\pi p \cdot (-1) \cdot \frac{8\gamma_e^3}{p^3} + 4\pi \gamma_e \cdot \frac{4\gamma_e^2}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow E_a = \frac{4\pi\gamma_e^3}{p^2} \left(4 - \frac{8}{3}\right) \quad \Leftrightarrow E_a = \frac{16\pi\gamma_e^3}{3p^2}$$

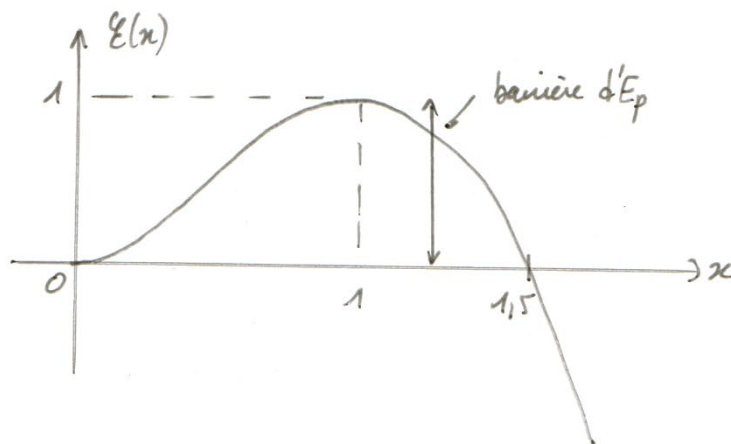
$$\text{Si } p = -2,0 \text{ MPa alors : } \left\{ \begin{array}{l} E_a = 1,4 \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ r_c = 70 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \xi(x) &= \frac{E_p(x)}{E_a} = \frac{4\pi \left(r^2 \gamma_e + \frac{pr^3}{3} \right)}{\left(\frac{16\pi\gamma_e^3}{3p^2} \right)} \\ &= \frac{3r^2 p^2}{4\gamma_e^2} + \frac{p^3 r^3}{4\gamma_e^3} = 3r^2 \cdot \left(\frac{-p}{2\gamma_e} \right)^2 + (-2) \cdot \left(\frac{p^3}{8\gamma_e^3} \right) \cdot r^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\xi(x) = 3x^2 - 2x^3 = x^2(3 - 2x)}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} E(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{de plus } \begin{cases} E'(x) = 6x(1-x) \text{ t.q. } E'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \\ E(x) = \begin{cases} 0 \text{ en } x=0 \\ 1 \text{ en } x=1 \\ 0 \text{ en } x=3/2 \end{cases} \end{cases}$$



5). L'état d'équilibre de la bulle correspond à une bulle de rayon nul. Cet état est stable mais $E_p(\infty) < E_p(0)$.

. Pour aller vers l'état d'énergie minimale il faut donc franchir la barrière d' E_p présente en $r=r_c$. Ainsi le rayon de la bulle tend à devenir infiniment grand : le liquide se vaporise entièrement.

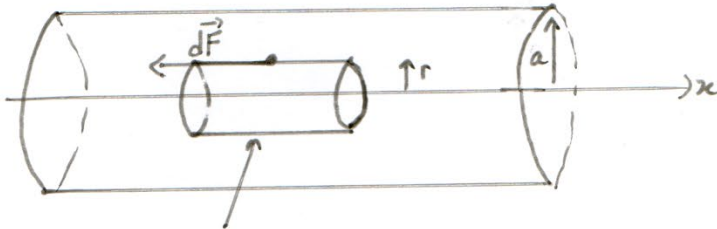
. A $p = -2,0 \text{ MPa}$: $E_a = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ J}$. Or $k_B T \approx 5 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ à température ordinaire. Sans apport d'énergie extérieure l'état liquide sans bulle est un état stable.

1.B) Conductance hydraulique

6) Soit $\vec{v} = v(r, x) \vec{u}_x$ or l'écoulement est incompressible d'où :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \underline{\vec{v} = v(r) \vec{u}_x}$$

7)



• Le cylindre de volume dV subit une force de cisaillement du

$$\text{type : } d\vec{F} = -\eta_c dS \frac{\partial v}{\partial r} \vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow \underline{d\vec{F} = +\eta_c 2\pi r dr \frac{\partial v}{\partial r} \vec{u}_x}$$

• De plus le cylindre subit des forces de pression au face d'entrée et de

$$\text{sortie : } \begin{cases} d\vec{F}_c = p(x) \pi r^2 \vec{u}_x \\ d\vec{F}_s = -p(x+dx) \pi r^2 \vec{u}_x \end{cases}$$

Or $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$ car $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (stationnaire) et $(\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = \vec{0}$ car $\vec{v} = v(r)$.

$$\text{d'où } d\vec{F} + d\vec{F}_c + d\vec{F}_s = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow +\eta_c 2\pi r dr \frac{\partial v}{\partial r} + p(x) \pi r^2 - p(x+dx) \pi r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow +\eta_c \frac{2 \partial v}{\partial r} dr - \frac{\partial p}{\partial x} r dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_c}{r} \frac{\partial v}{\partial r}} \quad (1)$$

D'où $F(r) = G(r)$ avec x et r deux variables d'espace indépendantes

par conséquent $\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_0}{r} \frac{dv}{dr} = K = \text{cste.}$

$$\Rightarrow p(x) = Kx + B \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p(-R) = p_1 = -KR + B \\ p(R) = p_2 = KR + B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 = -2KR \\ p_1 + p_2 = 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{p_2 - p_1}{2R} \\ B = \frac{p_1 + p_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{p_2 - p_1}{2R} x + \frac{p_1 + p_2}{2}$$

8) d'équation (1) s'écrit : $\frac{2\eta_0}{r} \frac{dv}{dr} = K = \frac{p_2 - p_1}{2R}$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{2R} \cdot \frac{r}{2\eta_0}$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{p_2 - p_1}{8\eta_0 R} r^2 + C.$$

or $v(a) = 0$ d'où $v(r) = \frac{p_1 - p_2}{8\eta_0 R} (a^2 - r^2)$

le débit volumique s'en déduit : $D_v = \int_0^{2\pi} \int_0^a v(r) \cdot r dr d\theta$

$$\Leftrightarrow D_v = \frac{p_1 - p_2}{8\eta_0 R} \cdot 2\pi \left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{\pi a^4}{16\eta_0 R} (p_1 - p_2) \Rightarrow G_H = \frac{D_v}{p_1 - p_2} = \frac{\pi a^4}{16\eta_0 R}$$

$$9^{\circ}) \text{, soit } \bar{v} = \frac{Dv}{\pi a^2} \Leftrightarrow \bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) a^2}{16 \eta_e R}$$

• Pour une tranche de fluide située entre x et $x+dx$ et de rayon a on a :

$$d\vec{F} = \eta_e \cdot \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=a} dS \vec{u}_x = \eta_e \cdot \frac{p_2 - p_1}{4 \eta_e R} a \cdot 2\pi a dx \vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow d\vec{F} = \eta_e \cdot \frac{p_2 - p_1}{16 \eta_e R} a^2 \cdot 8\pi dx \vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow d\vec{F} = -8\pi \bar{v} \eta_e dx \vec{u}_x$$

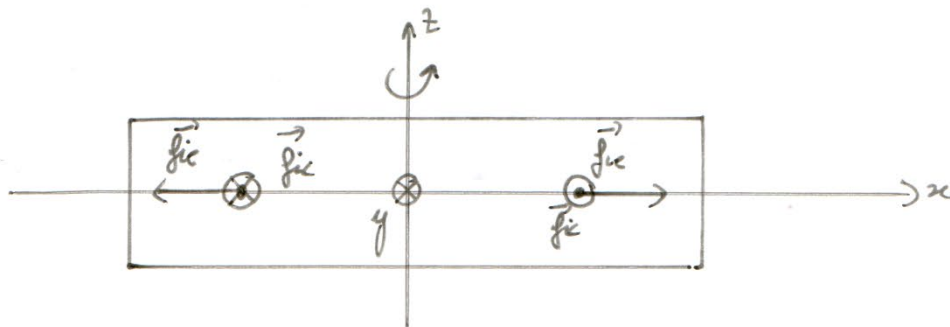
$$10^{\circ}) \text{ soit } Re = \frac{\rho_e \cdot \bar{v} \cdot (2a)}{\eta_e} \quad \text{avec } \begin{cases} \bar{v} = 6 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}, a = 0,02 \text{ mm}, p_1 - p_2 = 10^5 \text{ Pa} \\ R = 0,4 \text{ m}, \eta_e = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \rho_e = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{0,3}}$$

Comme $Re \ll 2000$, le régime d'écoulement de la sève est laminaire.

I.c) la cavitation

$$11^{\circ}) \text{ des forces d'inertie ont pour expression : } \begin{cases} \vec{f}_{ic} = \rho_e \omega^2 x \vec{u}_x \\ \vec{f}_{ic} = -2\rho_e \vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{cases}$$



12) Au bilan précédent, il faut ajouter les forces d'inertie pour la zone $x > 0$:

$$d\vec{F}_{ie} = \rho \omega^2 x \cdot \pi a^2 dx \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_{ic} = -2\rho \omega \bar{v} \pi a^2 dx \vec{u}_y \text{ et une force normale } d\vec{N} = dN \vec{u}_y$$

On projette sur Ox

$$0 = -8\pi \eta \omega \bar{v} dx - \frac{dp}{dx} dx \pi a^2 + \rho \omega^2 x \pi a^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = \rho \omega^2 x - \frac{8\eta \omega \bar{v}}{a^2}$$

Si $x > 0$ alors :

$$\int_{p(x)}^{p(R)} dp = \int_x^R \left(\rho \omega^2 x - \frac{8\eta \omega \bar{v}}{a^2} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow p_2 - p(x) = \frac{\rho \omega^2 (R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta \omega \bar{v}}{a^2} (R - x)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = p_2 - \frac{\rho \omega^2 (R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta \omega \bar{v}}{a^2} (x - R)$$

13) La pression est continue en $x=0$ d'où :

$$\begin{cases} p(0^-) = p_2 - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} + \frac{8\eta \omega \bar{v}}{a^2} R \\ \text{et} \\ p(0^+) = p_1 - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} - \frac{8\eta \omega \bar{v}}{a^2} R \end{cases}$$

$$\text{D'où } p(0) = \frac{p(0^-) + p(0^+)}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2}$$

• Et si on soustrait les 2 expressions : $0 = p_2 - p_1 + 16\eta \omega \bar{v} R / a^2$

$$\Leftrightarrow \bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) a^2}{16\eta \omega R}$$

• Vu qu'on retrouve l'expression de la vitesse moyenne établie précédemment, la conductance hydraulique reste inchangée.

14) Sur la surface du cylindre de la figure 2.5 il n'y a pas de forces de cisaillement d'où le bilan des forces : $\frac{dp}{dx} = \rho \omega^2 x \Leftrightarrow dp = \rho \omega^2 x dx$.

. On intègre entre x et $d-L$ d'où :

$$p(d-L) - p(x) = \rho \frac{\omega^2}{2} [(d-L)^2 - x^2]$$

$$\Leftrightarrow p(x) = p(d-L) + \frac{\rho \omega^2}{2} [x^2 - (d-L)^2]$$

. En $x = -R$ on a donc : $p_1 = \underbrace{p(d-L)}_{= p_0} + \frac{\rho \omega^2}{2} [R^2 - (d-L)^2]$

. De m[^] si on intègre entre R et L on obtient :

$$p_2 = \underbrace{p(L)}_{p_0} + \frac{\rho \omega^2}{2} [R^2 - L^2]$$

$$\text{D'où } p_1 - p_2 = \frac{\rho \omega^2}{2} [L^2 - (d-L)^2] = \frac{\rho \omega^2}{2} [2Ld - d^2]$$

$$\text{Si } d \ll L \text{ alors : } p_1 - p_2 \approx \frac{\rho \omega^2}{2} \times 2Ld$$

$$\Leftrightarrow \underline{p_1 - p_2 = \rho \omega^2 L d}$$

15) Pour $S_6 = +50\%$, on a grâce au graphique $\Delta p = -\rho \omega^2 L^2 = -311 \text{ Pa}$

$$\Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\frac{-\Delta p}{\rho L^2}}} = 2 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \underline{\underline{30 \text{ tours/s} = \omega}}$$

. D'où $\underline{p_1 - p_2 = \rho \omega^2 L \cdot d = 0,111 \text{ Pa}}$

dorsque les bulles de gaz se forment et obstruent les canaux, le débit volumique de la sève décroît, ce qui réduit la conductance hydraulique.

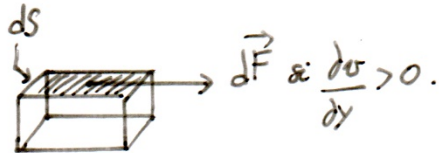
Partie III : Etude de la couche limite (Centrale PC - 2011)

I) Préliminaires

I.A. On suppose que $\vec{v} = v_x(y,t)\vec{u}_x$ d'où la force :

$$\vec{dF} = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_y dS \vec{u}_x$$

en Pl. ou Pa.s



- des particules situées en $y+dy$ passent en y et amènent leur quantité de mouvement transverse : $v_x(y+dy)\vec{u}_x$ d'où le transfert convectif.
- le brassage moléculaire est dû à l'agitation thermique.

I.B. Sur un élément de volume dG :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= d\vec{F}_{y+dy} + d\vec{F}_y \\ &= \eta dS \left(\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y+dy} - \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_y \right) \vec{u}_x \\ &= \eta dS dy \cdot \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_y \vec{u}_x \\ &= \eta \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_y dG \vec{u}_x \end{aligned}$$

Si on considère les axes (Ox) et (Oz) : $\vec{dF} = \eta (\nabla^2 \vec{v}) dG$ pour un fluide newtonien

I.C.1 En appliquant le PFD : $\frac{D\vec{p}}{Dt} = \Sigma d\vec{F}$

$$\Leftrightarrow \mu dG \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} dG + \eta \nabla^2 \vec{v} dG - \text{grad } p dG$$

si l'écoulement est incompressible.

III) Poiseuille plan

III.A.1)

a) Cette fois le champ de pression dépend de x, y d'où en régime stationnaire :

$$\begin{cases} 0 = +\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = +\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases}$$

b) On a $\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Leftrightarrow F(x) = G(y)$ par conséquent les 2 fonctions sont égales à une constante d'où : $\frac{\partial p}{\partial x} = k$

c) Pour $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k \Leftrightarrow v = \frac{k}{\eta} \frac{y^2}{2} + \alpha y + \beta$.

$$\text{or } v(-d/2) = v(d/2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k}{\eta} \frac{d^2}{8} + \alpha \frac{d}{2} + \beta = 0 \\ \frac{k}{\eta} \frac{d^2}{8} - \alpha \frac{d}{2} + \beta = 0 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{k}{\eta} \frac{d^2}{8} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_x(y) = \frac{k d^2}{8\eta} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right) \vec{u}_x$ profil parabolique.

III.A.2) Soit $\Delta p = -kL$ d'où : $Dv = \int_{\text{section}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$

$$\Leftrightarrow Dv = -\frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{d^2}{8\eta} \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right) dy dz$$

$$\Leftrightarrow Dv = -\frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{d^2}{8\eta} \cdot h \cdot \left[y - \frac{4}{3} \frac{y^3}{d^2} \right]_{-d/2}^{d/2} = -\frac{\Delta p \cdot d^2 h}{8\eta L} \left[d - \frac{4}{3} \frac{d^3}{d^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow Dv = -\frac{\Delta p}{L} \frac{d^3 h}{12\eta} \quad \left| \text{ Cette loi rappelle la loi d'Ohm } i = \frac{U}{R} \text{ d'où } R_h = \frac{12L\eta}{d^3 h} \right|$$

III.A.3) Si $\Delta p_2 = \frac{\Delta p_1}{2}$ alors $Dv_2 = \frac{Dv_1}{8}$

• Pour deux tubes identiques d'épaisseur $\frac{d}{2}$ alors $Dv = \frac{Dv_1}{4}$

• Alors que pour une résistance électrique : $R_e = \frac{l}{\delta h d} \Rightarrow Dv = Dv_1$.

Conclusion : Pour un écoulement les diminutions de section réduisent considérablement le débit.

III.B) On atteint le régime parabolique lorsque $\delta = \frac{d}{2}$ d'où en utilisant le résultat

de la question II) : $\frac{\delta}{x_1} = \sqrt{\frac{1}{Re}}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{d/2} = \sqrt{Re} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x_1}{d} = \frac{1}{2} \sqrt{Re}}$$

IV) Equation du mouvement dans la couche limite

IV.A) L'écoulement est incompressible d'où $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

IV.B) On est en régime stationnaire d'où :

$$\begin{cases} \mu \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x \\ \mu \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \mu g + \eta \Delta v_y \end{cases}$$

IV.C.1) En COG : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ d'où : $\frac{v_x}{x_0} + \frac{v_y}{\delta} = 0$

$$\text{donc : } \frac{v_y}{v_x} + \frac{\delta}{x_0} = 0 \quad \text{d'où : } \frac{v_y}{v_x} \approx \frac{1}{\frac{x_0}{\delta}} \quad \text{or } Re_x \gg 1 \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} \ll 1$$

IV.C.2 | Toujours en ODB :

$$\bullet \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_x}{\delta^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_x}{x_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} / \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{x_0^2}{\delta^2} = Re_{x_0} \gg 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad \textcircled{1}$$

• De même : $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$

IV.C.3 | Soit $v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim v_y \cdot \frac{v_x}{\delta}$ ou $\frac{\delta}{x_0} \sim \frac{v_y}{v_x}$ (III.C.1)

d'où : $v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{v_x^2}{x_0}$

$$\Rightarrow \frac{v_y \partial v_x}{\partial y} \simeq \frac{v_x \cdot \partial v_x}{\partial x}$$

• Et, $v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_x^2}{x_0}$

• Et : $v \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim v \frac{v_x}{\delta^2} \sim v \cdot \frac{Re_{x_0}}{x_0^2} \cdot v_x$

• $Re_{x_0} = \frac{v_x \cdot x_0}{\nu} \Rightarrow v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_x^2}{x_0}$

d'où : $v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \simeq v \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

IV.C.4 | d'où les équations $\mu \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$ car on néglige les dérivées partielles de v_y .

IV.D | Hors de la couche limite on retrouve l'équation d'Euler stationnaire avec

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \simeq v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \simeq 0 \quad \text{(IV.C.4)}$$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ en dehors de la couche limite.

D'après l'énoncé on a donc $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ dans la couche limite d'où :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{où} \quad v = \eta / \mu$$