

Physique : DM4

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I - Réacteur à eau pressurisée

Les réacteurs nucléaires à eau pressurisée (REP) exploitent l'énergie libérée par la fission de noyaux d'uranium 235 provoquée par des flux de neutrons pour chauffer l'eau d'un premier circuit appelé circuit primaire. Ce dernier va transférer son énergie thermique, via un échangeur appelé générateur de vapeur, à un deuxième circuit : le circuit secondaire. L'eau du secondaire subit un cycle thermodynamique qui consiste en une vaporisation au niveau de la source chaude, une détente de la vapeur dans une turbine (reliée à un alternateur qui va produire de l'électricité), une condensation de la vapeur sortant à basse pression de la turbine et une compression de l'eau condensée afin de ramener cette eau à la pression initiale.

Ce problème a pour objectif d'étudier des aspects thermodynamiques du circuit secondaire et ce, systématiquement, **en régime permanent**.

Données :

Pression de vapeur saturante (bar) 1 bar = 10 ⁵ Pa	enthalpies massiques (kJ.kg ⁻¹)		entropies massiques (kJ.K ⁻¹ .kg ⁻¹)	
	à l'état de liquide saturant : h'	à l'état de vapeur saturante : h''	à l'état de liquide saturant : s'	à l'état de vapeur saturante : s''
0,05	137,8	2 561,6	0,4763	8,3960
10	762,6	2 776,2	2,1382	6,5828
70	1 267,4	2 773,5	3,1219	5,8162

Tableau 1

On rappelle que l'enthalpie massique h d'un mélange diphasique de titre massique en vapeur x est donnée par la relation : $h = x.h'' + (1-x).h'$, où h'' et h' sont respectivement les enthalpies massiques à l'état de vapeur saturante et à l'état de liquide saturant. Par ailleurs, l'entropie massique s d'un mélange diphasique de titre x est donnée par la relation : $s = x.s'' + (1-x).s'$, où s'' et s' sont respectivement les entropies massiques à l'état de vapeur saturante et à l'état de liquide saturant.

A1- Etude thermodynamique du circuit secondaire simplifié

Le circuit secondaire est constitué du générateur de vapeur (G.V.), d'une turbine (T) reliée à un alternateur, d'un condenseur (C) et d'une pompe d'alimentation secondaire (P), comme précisé en figure 1.

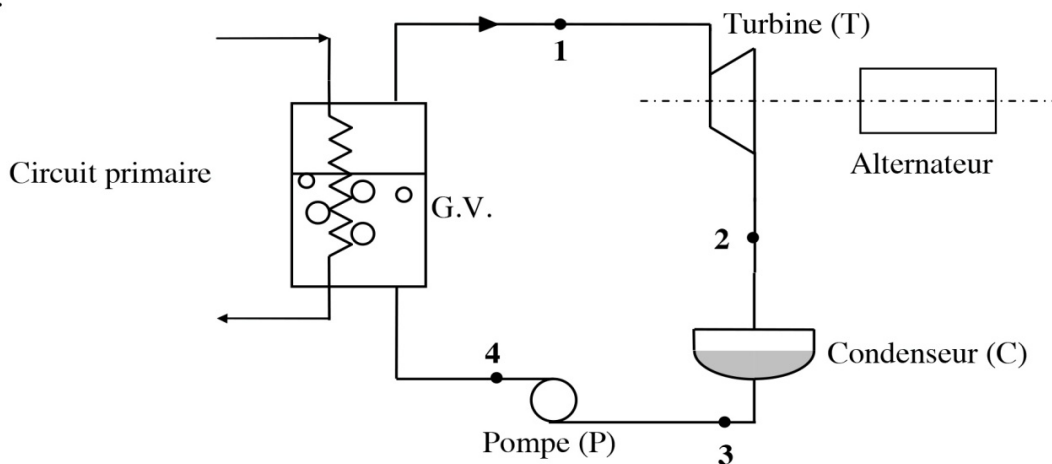


Figure 1 : circuit secondaire simplifié

Pour l'ensemble du problème, nous négligerons les frottements ainsi que les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du fluide secondaire. **L'expression du premier principe pour une masse $m = 1$ kg de fluide en écoulement au travers d'une machine est : $\Delta h = w_i + q_e$** , où Δh représente la différence $h_s - h_e$ entre les enthalpies massiques (en kJ.kg⁻¹) du fluide à la sortie h_s et à l'entrée h_e de la machine, w_i le travail massique indiqué, c'est-à-dire le travail massique (en kJ.kg⁻¹) échangé entre une masse $m = 1$ kg de fluide et les parois mobiles de la machine, q_e le transfert thermique entre le kilogramme de fluide et la machine (en kJ.kg⁻¹). **Dans le condenseur et le générateur de vapeur il n'y a pas de pièce mobile.**

A1.1- Questions préliminaires

A1.1.1- Sur un diagramme de Clapeyron (figure 2) que vous reproduirez, préciser la position du point critique, les parties courbes de rosée et d'ébullition. Indiquer également les domaines du liquide, du mélange diphasique et de la vapeur surchauffée. Mentionner où se trouve le liquide saturant et la vapeur saturante.

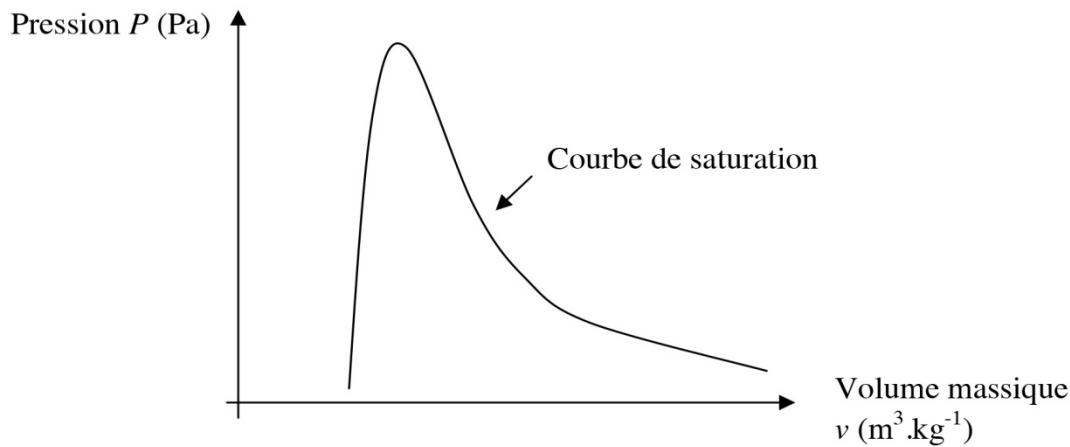


Figure 2 : diagramme de Clapeyron

A1.1.2- Sur le diagramme de Clapeyron de la figure 3, l'allure de l'isotherme correspondant à la température $T = 306 \text{ K}$ a été représentée. Justifier l'allure de cette isotherme pour chaque domaine. On pourra, dans le domaine de la vapeur surchauffée, se référer au modèle du gaz parfait. Tracer l'allure de l'isotherme correspondant à la température $T = 559 \text{ K}$ sur un diagramme de Clapeyron que vous reproduirez et où apparaît l'allure de l'isotherme correspondant à la température $T = 306 \text{ K}$.

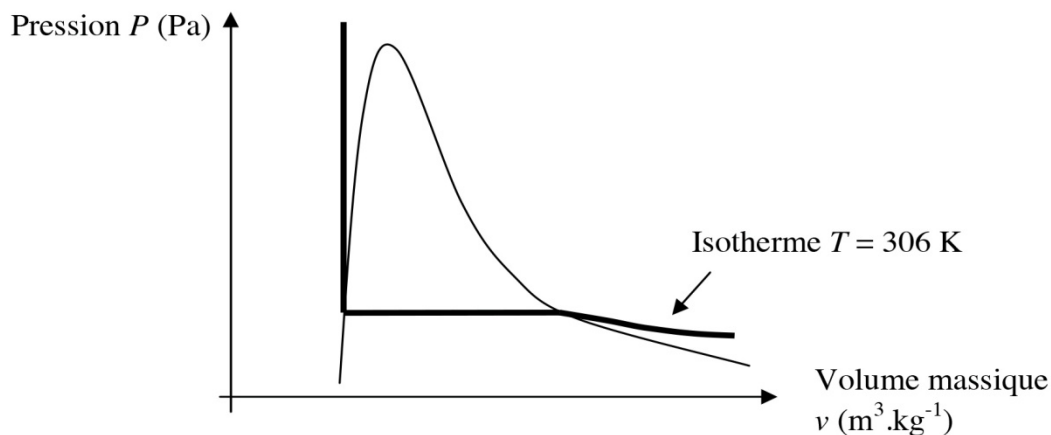


Figure 3 : isotherme dans le diagramme de Clapeyron

A1.1.3- Démontrer qu'une transformation adiabatique réversible est une transformation isentropique.

A1.1.4- En considérant que l'eau liquide dans une pompe est incompressible et de volume massique $v = 10^{-3} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$, calculer le travail massique indiqué w_{iP} échangé par l'eau circulant dans une pompe, en considérant la transformation adiabatique réversible et une augmentation de pression de $\Delta P = 70 \text{ bar}$. On rappelle que la variation élémentaire de l'enthalpie massique dh du fluide peut s'écrire : $dh = T \cdot ds + v \cdot dP$.

Ce travail peut être considéré comme négligeable devant les autres échanges énergétiques ; **dans toute la suite du problème, le travail indiqué échangé par un liquide sera systématiquement considéré comme nul.**

En déduire alors, que l'enthalpie massique du liquide reste constante lors de son passage dans une pompe.

A1.2- Etude du cycle thermodynamique simplifié

Le fluide secondaire subit le cycle thermodynamique suivant :

- 1 → 2 : détente adiabatique réversible dans la turbine,
- 2 → 3 : liquéfaction isobare totale dans le condenseur,
- 3 → 4 : compression adiabatique réversible dans la pompe d'alimentation secondaire,
- 4 → 1 : échauffement puis vaporisation isobare dans le générateur de vapeur saturante.

Le tableau suivant précise l'état thermodynamique du fluide secondaire en certains points du cycle :

Point	Pression (bar) 1 bar = 10 ⁵ Pa	Température (K)	Etat du fluide secondaire	Enthalpie massique (kJ.kg ⁻¹)	Entropie massique (kJ.K ⁻¹ .kg ⁻¹)
1	70	559	Vapeur saturante	2 773,5	5,8162
2	0,05	306	Mélange diphasique		
3	0,05		Liquide saturant	137,8	0,4763
4	70		Liquide sous-saturé		

Tableau 2

A1.2.1- Tracer dans un diagramme de Clapeyron l'allure du cycle thermodynamique subi par le fluide secondaire. Y placer notamment les points 1, 2, 3 et 4.

A1.2.2- Calculer, en sortie de turbine, le titre x_2 et l'enthalpie massique h_2 du fluide. En déduire le travail massique indiqué w_{IT} échangé par le fluide dans la turbine. On rappelle que le titre correspond à la fraction massique de la vapeur dans le mélange liquide-vapeur.

Une vapeur humide est d'autant plus corrosive pour les pales de la turbine que son titre est faible, que pensez-vous de la détente étudiée ?

A1.2.3- Déterminer la température T_3 et la valeur du titre x_3 du fluide en sortie du condenseur. Calculer la chaleur massique q_{eC} échangée par le fluide avec le condenseur.

A1.2.4- Calculer la chaleur massique q_{eGV} échangée par le fluide dans le générateur de vapeur.

A1.2.5- Calculer le rendement de ce cycle thermodynamique η_{cycle} puis celui de Carnot η_{Carnot} en utilisant les mêmes sources chaude et froide. D'où provient la différence de rendement entre ces cycles ?

A2- Etude thermodynamique du circuit secondaire réel

Afin d'optimiser la qualité de la vapeur utilisée (augmentation du titre en sortie de turbine), l'industriel utilise un circuit secondaire plus complexe, représenté à la figure 4 de la page 5.

On rappelle qu'à chaque échangeur du circuit à plusieurs entrées/sorties, la conservation de l'énergie impose un bilan de puissance sous la forme générale : $\sum D_{me} \cdot h_e = \sum D_{ms} \cdot h_s$, où h_e et h_s sont respectivement les enthalpies massiques d'entrée et de sortie de l'échangeur concerné, D_{me} et D_{ms} les débits massiques d'entrée et de sortie de l'échangeur concerné.

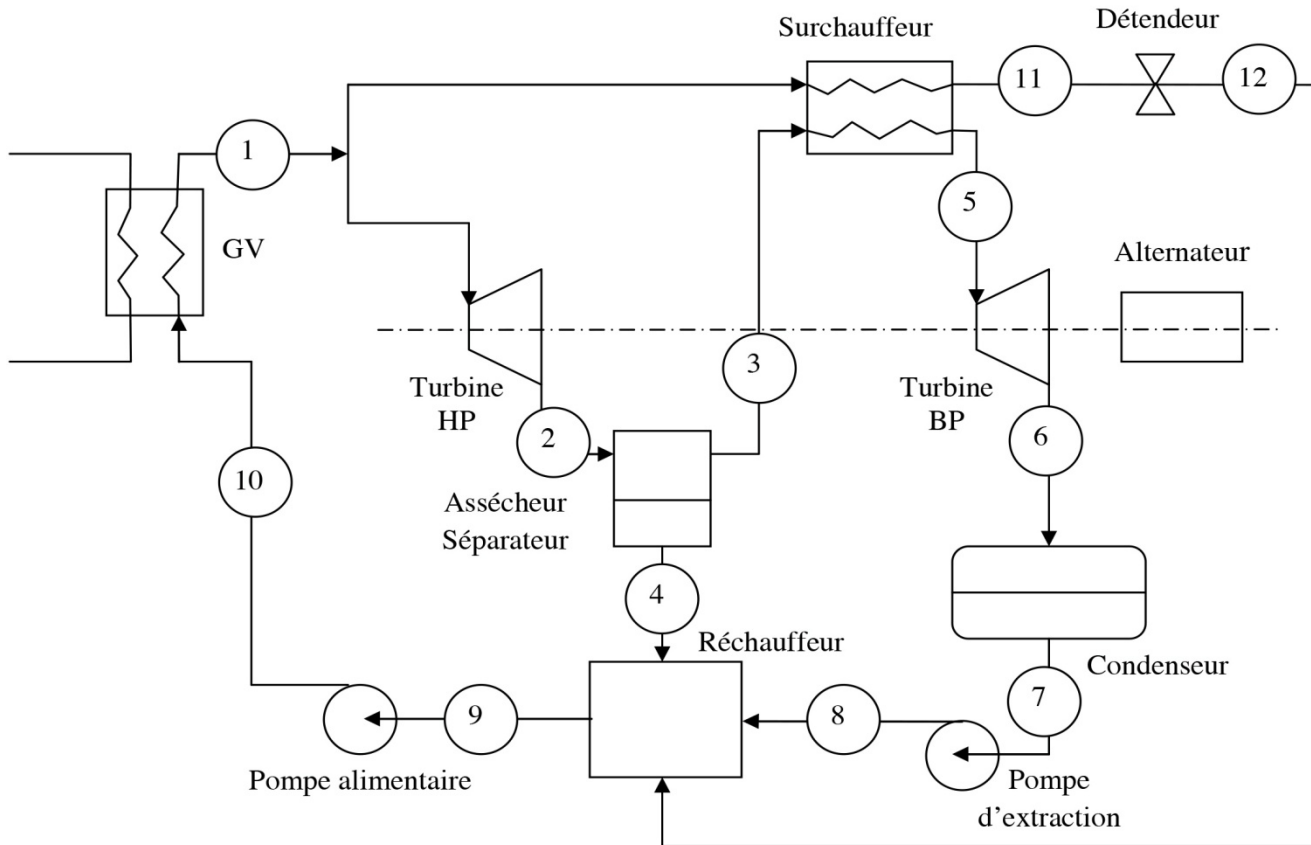


Figure 4 : circuit secondaire industriel

Les turbines haute pression (HP) et basse pression (BP) entraînent l'alternateur.

Le débit massique de vapeur en sortie du générateur de vapeur vaut $D_{m1} = 1\,500 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, le débit massique de vapeur alimentant le surchauffeur est $D_{m11} = 100 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Le tableau suivant précise l'état thermodynamique du fluide secondaire en certains points du cycle :

Point	Pression (bar) 1 bar = 10^5 Pa	Température (K)	Etat du fluide secondaire	Enthalpie massique ($\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$)	Entropie massique ($\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$)
1	70	559	Vapeur saturante	2 773,5	5,8162
2	10	453	Mélange diphasique		
3	10		Vapeur saturante		
4	10		Liquide saturant		
5	10	250	Vapeur surchauffée	2 943,0	6,9259
6	0,05		Mélange diphasique		
7	0,05		Liquide saturant		
8	10		Liquide sous-saturé		
9	10		Liquide sous-saturé		
10	70		Liquide sous-saturé		
11	70				
12	10				

A2.1- En considérant qu'une partie du fluide primaire effectue une détente adiabatique réversible dans la turbine haute pression (HP), déterminer les valeurs de l'entropie massique s_2 , du titre x_2 et de l'enthalpie massique h_2 au point 2.

Calculer le travail massique indiqué w_{iTHP} échangé par le fluide dans la turbine HP. En déduire la puissance P_{HP} développée par la turbine HP.

A2.2- Un assécheur-séparateur permet la séparation du mélange diphasique obtenu au point 2 en, d'une part, de la vapeur saturante au point 3 et d'autre part, du liquide saturant au point 4. Ecrire deux relations vérifiées, au niveau de l'assécheur-séparateur, par les débits massiques D_{m2} , D_{m3} , D_{m4} et les enthalpies massiques h_2 , h_3 et h_4 . Donner l'expression, en fonction de D_{m2} , h_2 , h_3 et h_4 , des débits massiques D_{m3} et D_{m4} aux points 3 et 4. Calculer la valeur de ces débits massiques.

Exprimer les débits massiques D_{m3} et D_{m4} en fonction du titre x_2 et du débit massique D_{m2} .

A2.3- Une partie du fluide issu du générateur de vapeur circule dans un surchauffeur pour échanger une partie de son énergie à la vapeur saturée issue de l'assécheur-séparateur afin de la surchauffer. A partir d'un bilan de puissance sur le surchauffeur, déterminer l'enthalpie massique du fluide h_{11} au point 11.

A2.4- La puissance P_{BP} développée par la turbine basse pression (BP) vaut $P_{BP} = 963$ MW.

Calculer le travail massique indiqué w_{iTBP} échangé par le fluide dans la turbine BP. Déterminer la valeur du titre x_6 au point 6.

A2.5- Calculer la chaleur massique q_{eC} échangée par le fluide au condenseur.

A2.6- Un détendeur est un organe adiabatique qui ne présente pas de parois mobiles et qui permet au fluide d'abaisser sa pression. Montrer qu'une des grandeurs d'état reste constante lors de l'écoulement d'un fluide au travers d'un détendeur. Comment s'appelle ce type de détente ? Est-elle réversible ?

A2.7- A l'aide d'un bilan de puissance sur le réchauffeur, déterminer l'enthalpie massique h_9 au point 9. Quel est le rôle du détendeur ?

A2.8- Calculer la chaleur massique q_{eGV} échangée par le fluide dans le générateur de vapeur. En déduire la puissance P_{GV} générée par le générateur de vapeur.

A2.9- Calculer le rendement de ce cycle thermodynamique η_{cycle} . Le comparer avec le rendement du circuit simplifié et en déduire quel pourrait être l'avantage principal du cycle réel.

Partie II – Tunnel du Fréjus

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{j} pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{e}_z tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

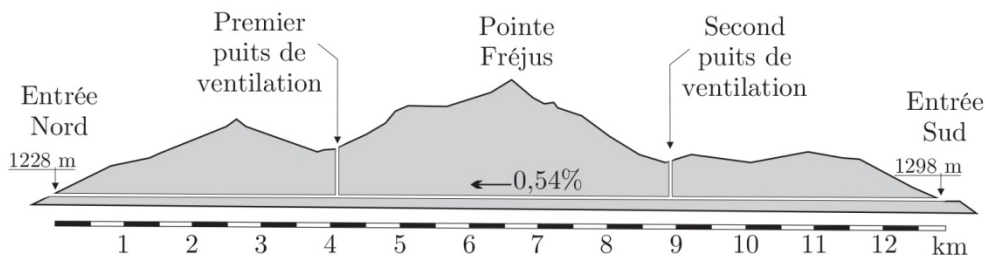


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

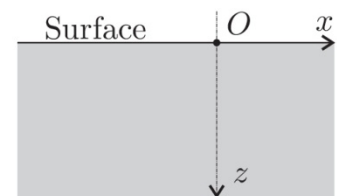


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$. (Voir figure 2).

❑ 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.

❑ 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

❑ 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .

❑ 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et \mathcal{S} puis en fonction de ρ_s, c_s, \mathcal{S} et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de \underline{k} qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

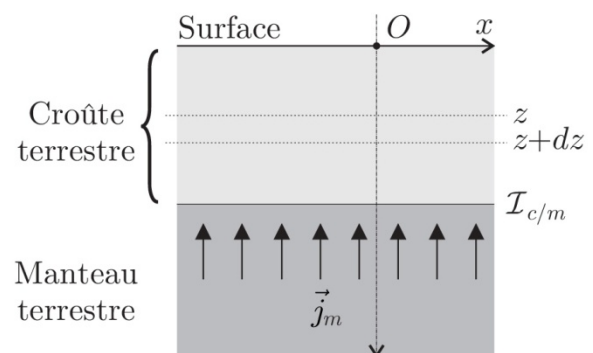


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface \mathcal{S} , comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : $H, L_c, \mathcal{P}, j_m, \kappa$ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10,0$ km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

□ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x, z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.

Déterminer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S . En déduire que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1 , c_2 , c_3 et δ en fonction des données du problème.