# Physique : DM2 (Optionnel)

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

# Partie I – Cuvette paraboloïque

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur **g**, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre *R* $(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ supposé galiléen. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution *P*, d'axe vertical ascendant Oz , dont l'équation en coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$ est $\rho^2 - az = 0$ avec a>0 (Figure A-l).

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur *P*.
Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant celle de $R_c$ $(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ (Figure A-l).
On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées $\rho$ et z de M satisfont à l'inégalité :

$$z \geq \frac{\rho^2}{a}$$

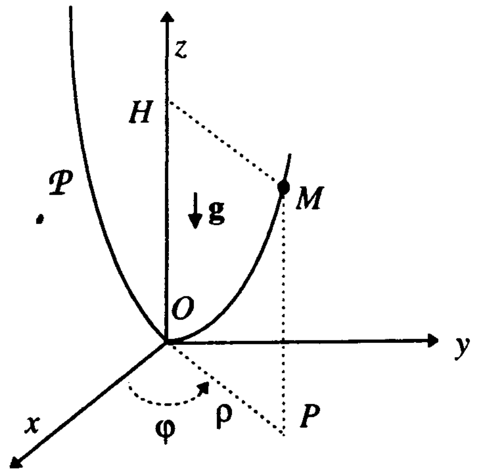



**Figure A-1**

1. Moment cinétique

a) Exprimer, dans la base de $R_C$, la vitesse de M par rapport à *R* .
b) Quelle est l'expression, dans la base de $R_C$, du moment cinétique en O, $\overrightarrow{L_0}$ , par rapport à *R* ? En déduire sa projection selon l'axe Oz.
c) Montrer que la réaction $\vec{R}$ qu'exerce *P* sur M est contenue dans le plan OHP. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que la projection de $L_O$ sur Oz se conserve au cours du temps. Expliciter cette relation de conservation en fonction de φ et ρ. Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par L cette constante.

2. Energie

a) Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique $E_k$ de la particule M par rapport à $R$?

b) Justifier l'existence d'une énergie potentielle $E_p$ dont dérivent les forces extérieures agissant sur M. Exprimer $E_p$ en fonction de $\rho$ en supposant que $E_p(0) = 0$ .

c) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

3. Discussion générale du mouvement

a) Déduire de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2G(\rho) + E_{p,eff}(\rho) = E_m$$

où $G(\rho)$ est positif et sans dimension et où $E_{p,ef}(\rho)$ est une énergie potentielle effective.
Expliciter $G(\rho)$ et $E_{p,ef}(\rho)$ .

b) Représenter avec soin le graphe $E_{p,ef}(\rho)$. Montrer que $E_{p,ef}(\rho)$ passe par un minimum pour une valeur $\rho_m$ de $\rho$ que l'on exprimera en fonction de L, m, a et g, intensité du champ de pesanteur.

c) Discuter, à l'aide du graphe $E_{p,ef}(\rho)$, de la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur $P$ est nécessairement tracée sur une région de $P$ limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

4. Etude de quelques mouvements particuliers

a) A quelle condition sur L la trajectoire de M sur $P$ est-elle une parabole méridienne ?

b) Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur $P$ soit un cercle horizontal.

c) Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée $\rho$ de la valeur $\rho_m$ pour laquelle $E_{p,ef}(\rho)$ est minimal. Montrer que $\varepsilon=\rho-\rho_m$ oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où $\rho_m=1$ m et a=2 m. On rappelle que $g=9{,}81 ms^{-2}$.

5. Réalisation du contact

La force de réaction qu'exerce $P$ sur M s'écrit : $\vec{R} = R\overrightarrow{e_n}$, $\overrightarrow{e_n}$ étant le vecteur unitaire porté par la normale intérieure à $P$ au point M.

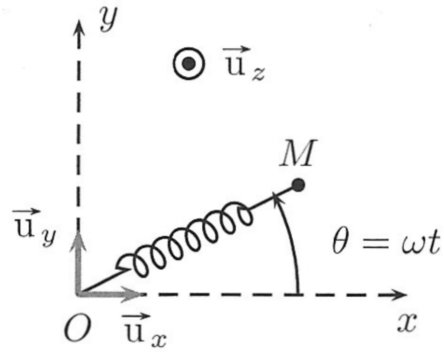
Ecrire, sous forme vectorielle, la loi fondamentale appliquée au mouvement de M par rapport à $R$. En déduire, en projetant selon $\overrightarrow{e_n}$, que le contact ne peut être rompu.

6. Réalité du mouvement

L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement. Commenter à l'aide du graphe $E_{p,ef}(\rho)$.

# Partie II – Ressort en rotation

On considère une table à coussin d'air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur ponctuel M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort. (voir figure en vue de dessus).




La table forme le plan $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, l'extrémité fixe du ressort est située en O. La table à coussin d'air permet de compenser le champ de pesanteur terrestre qui est dirigé le long de la verticale ascendante $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$. Le ressort possède une longueur à vide $l_0$ et sa constante de raideur est notée k.

1°) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M)$ du point M par rapport à O est conservé au cours du mouvement.

2°) À t = 0, le mobile M est abandonné en $A(x = \frac{6}{5}\, l_0, y = 0)$ sans vitesse initiale.

2a) Calculer $\overrightarrow{\sigma_O}(M)$ à l'aide des coordonnées cylindriques et en déduire la nature de la trajectoire.

2b) Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ et indiquer dans quel intervalle varie la longueur du ressort.

3°) On prend de nouvelles conditions initiales,

$$\overrightarrow{OM}\,(t = 0) = l_1 \overrightarrow{u_x} \ et\ \vec{v}(t = 0) = l_1 \omega \overrightarrow{u_y}$$

de manière à ce que le mobile autoporteur adopte un mouvement de rotation autour de l'axe $(O, \overrightarrow{u_z})$.

3a) Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M)$ et montrer qu'il se conserve au cours du mouvement. On exprimera sa norme $\sigma$ en fonction de m, $l_1$ et $\omega$.

3b) Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve au cours du mouvement et donner son expression.

3c) Montrer que cette énergie peut être écrite sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

Où l'on exprimera $E_{p,eff}(r)$ en fonction de r, σ, k, $l_0$ et m.

3d) Tracer l'allure de la fonction $E_{p,eff}(r)$ et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s'éloigner du pôle d'attraction O.

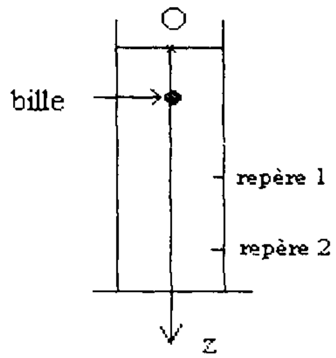
# Partie III - Etude de deux mouvements avec force de frottement du type $-k\vec{v}$

## I -Mouvement d'une bille dans un liquide

Dans tout le problème, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen. Dans cette partie, on étudie le mouvement de translation d'une bille d'acier de rayon **r** et de masse m dans de la glycérine de viscosité **η.**

On admettra que les actions de frottement exercées par le liquide sur la bille en mouvement sont modélisables par une force : $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente le vecteur vitesse de la bille.

Données :
- masse volumique de l'acier: $\rho$=7800 kg.m$^{-3}$
- masse volumique de la glycérine $\rho_0$ = 1260 kg.m$^{-3}$
- g=9,8m.s$^{-2}$




On dépose la bille en 0 sans vitesse initiale dans la glycérine contenue dans une grande éprouvette.

I-1) Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède exercée sur la bille plongeant dans la glycérine.

I-2) Faire le bilan des forces exercées sur la bille plongeant dans la glycérine en précisant le référentiel de travail.

I-3) Si l'on applique le principe des actions réciproques (appelé aussi principe de l'action et de la réaction), quelle est la force réciproque du poids de la bille ?

I-4) Etablir l'équation différentielle que vérifie la valeur de la vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie de la bille.

I-5) Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limite $\overrightarrow{v_{lim}}$ telle que $||\overrightarrow{v_{lim}}|| = \frac{2(\rho-\rho_0)}{9\eta}gr^2$

Donner l'expression de la constante de temps τ caractéristique du mouvement.

I-6) On mesure cette vitesse limite pour différents rayons de la bille ; la vitesse limite est mesurée entre les deux repères notés sur la figure.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| [r]/mm | 1,50 | 1,60 | 1,75 | 2,00 | 2,25 |
| [$v_{lim}$]/cm.s$^{-1}$ | 5,2 | 5,9 | 7,1 | 9,1 | 11,5 |

En déduire la viscosité η de la glycérine (la méthode utilisée sera présentée et on précisera l'unité de la viscosité).

Calculer la constante de temps pour r=1,5 mm et conclure sur le caractère observable du phénomène.

## II - Mouvement d'un proton dans un liquide

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

II-1) Un proton de masse m & de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale $v_0$ en un point fixe 0 ; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est une constante positive et v est la vitesse du proton à l'instant de date t.
Par la suite, on posera : $\omega = \frac{eB}{m}$ & $\tau = \frac{m}{k}$

II-1-1 Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on négligera le poids du proton et la poussée d'Archimède).

II-1-2 Etablir l'équation différentielle du mouvement du proton.

II-2) On désigne par Oxyz un trièdre orthogonal direct lié au référentiel Galiléen et par $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ la base de vecteurs unitaires associés.
On choisit : $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ & $\overrightarrow{v_0} = v0\overrightarrow{u_x}$

II-2-1 Si la force de frottement était négligeable, quelle serait la variation d'énergie cinétique du proton ?

Rappeler, avec un minimum de calculs, quelle serait alors la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire).

II-2-2 - Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire ?

II-2-3 Montrer que l'équation différentielle du II-1-2 peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles :

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \ (1) \quad et \quad \frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \ (2)$$

Déterminer a *et b.*

II-2-4 On pose j le nombre complexe tel que $j^2=-1$ pour résoudre le système d'équations différentielles, on introduit le complexe $\underline{V} = v_x + jv_y$.

Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est :

$$\underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$$

En déduire $v_x$ *et* $v_y$.

*II-3)*

II-3-1 Déduire de $\underline{V}$ l'expression de $\underline{X} = x(t) + j\,y(t)$ en fonction de *a, b,* $v_o$ et *t.*

II-3-2 Déterminer la limite, notée $\underline{X}_\infty$, de $\underline{X}$ lorsque t tend vers l'infini.
En déduire la position limite $M_\infty$ $(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de *a, b* et $v_o$.

II-3-3 Donner l'allure de la trajectoire.