

Physique : DM2

Partie I - Cuvette parabolique (CCP MP 1999)

① Moment cinétique

(a) Dans \mathcal{R}_C : $\vec{r}(M) = \rho \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$

(b) Par définition: $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \rho & \rho \dot{\varphi} & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -\rho z \dot{\varphi} & \rho \dot{z} - \rho z \dot{\varphi} & \rho z \dot{\varphi} \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{L_z = m\rho^2 \dot{\varphi}}$$

(c) \vec{R} est normal au plan tangent à la trajectoire. Comme il y a invariance par rotation autour de Oz le vecteur normal est dans le plan OHP .

$$\Rightarrow \underline{\vec{R} \cdot \vec{e}_\varphi = 0}$$

TMC en O: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = d\vec{b}_O \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge (\vec{R} + \vec{P})$

$$= \begin{vmatrix} \rho & \rho \dot{\varphi} & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \rho(mg - R_z) + R_\rho z & 0 \end{vmatrix}$$

d'où $\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{e}_z = 0 \Rightarrow \underline{L_z = \text{cte} = m\rho^2 \dot{\varphi} = L}$

② Energie

(a) Soit $\epsilon_c = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow \underline{\epsilon_c = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2]}$

- (b) les forces extérieures sont : $-\vec{R}$ qui ne travaille pas (pas de frottements)
- le poids qui dérive de $E_p(z)$

t.q : $E_p = mgz + \text{cste}$

Si $E_p(0) = 0$ alors $E_p = mgz \Leftrightarrow \underline{E_p = mg \frac{e^2}{a}}$

- (c) les forces étant conservatives : $\underline{E_m = \text{cste}}$

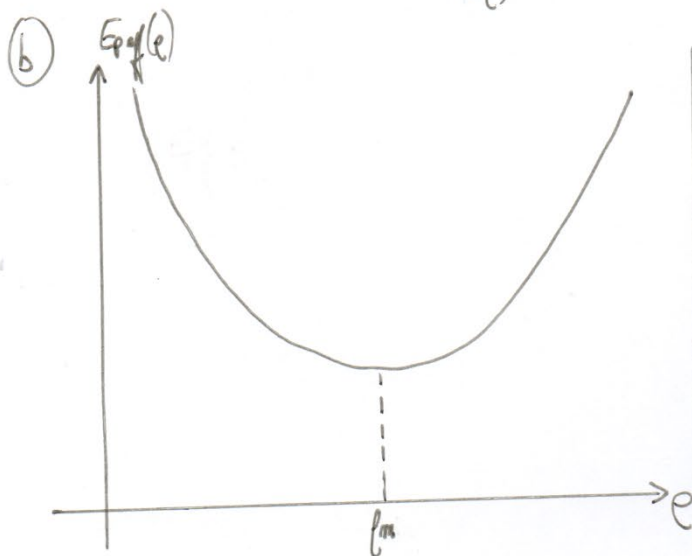
- (3) Discussion générale du mouvement

(a) Soit $E_m = \frac{1}{2} m [\dot{e}^2 + e^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + mg \frac{e^2}{a}$

or $\begin{cases} z = e^2/a \Rightarrow \dot{z} = 2e\dot{e}/a \\ \text{et} \\ \dot{\varphi} = \frac{L}{mpe^2} \end{cases}$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{e}^2 \left[1 + e^2 \cdot \left(\frac{L}{mpe^2} \right)^2 + 4e^2 \dot{e}^2 / a^2 \right] + mg e^2 / a$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{e}^2 \underbrace{\left[1 + 4e^2 / a^2 \right]}_{G(e)} + \underbrace{mg e^2 / a + L^2 / 2me^2}_{E_{\text{eff}}(e)}$



$\cdot E_{\text{eff}}(e) \underset{e \rightarrow 0}{\sim} \frac{L^2}{2m} \cdot \frac{1}{e^2}$

$\cdot E_{\text{eff}}(e) \underset{e \rightarrow \infty}{\sim} \frac{mg}{a} \cdot e^2$

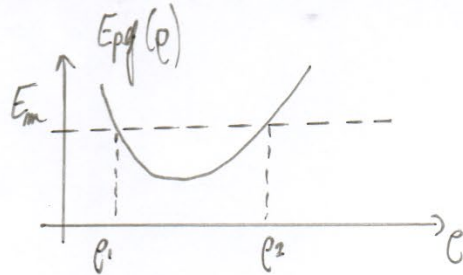
$\cdot \frac{dE_{\text{eff}}(e)}{de} = 0 \Leftrightarrow \frac{2mge}{a} - \frac{L^2}{mp^2} = 0$

$\Leftrightarrow e^4 = \frac{aL^2}{2m^2g} \Leftrightarrow \boxed{e_m = \left(\frac{aL^2}{2m^2g} \right)^{1/4}}$

$$c) \text{ Soit } E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) + E_{\text{pot}}(\rho)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) = E_m - E_{\text{pot}} > 0$$

Par conséquent les valeurs de ρ possibles sont t.q : $E_m > E_{\text{pot}}$



Pour obtenir ρ_1 et ρ_2 il faut résoudre $E_m = E_{\text{pot}}$

4) Etude de qqs mouvements particuliers

a) Parabole méridienne est t.q $\dot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow L = 0$

b) La trajectoire de M est un cercle horizontal si $z = \text{cste} \Leftrightarrow \rho = \text{cste}$ pour $\rho = \rho_{\text{min}}$ d'après le graphique.

$$\cdot \text{ Or } L = m \rho^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}_{\text{min}} = \frac{L}{m \rho_{\text{min}}^2} = \frac{L}{m} \left(\frac{2m^2 g}{a L^2} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_{\text{min}} = \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

$$\text{Donc } \rho(0) = \rho_{\text{min}} \text{ et } \dot{\varphi}(0) = \sqrt{2g/a}$$

c) Effectuons un développement autour de ρ_{min} t.q : $\rho = \rho_{\text{min}} + \xi$.

$$E_{\text{pot}}(\rho) = E_{\text{pot}}(\rho_{\text{min}}) + \xi \left. \frac{dE_{\text{pot}}}{d\rho} \right|_{\rho_{\text{min}}} + \frac{\xi^2}{2} \left. \frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\rho^2} \right|_{\rho_{\text{min}}} + o(\xi^3)$$

$= 0$ car $E_{\text{pot}}(\rho_{\text{min}})$ minimal

• Or $\frac{d^2 E_{\text{peff}}}{d\rho^2} \Big|_{\rho_m} = \left(2mg/a + \frac{3L^2}{m\rho^4} \right) (m \rho_m)$
 $= 2mg/a + \frac{3L^2}{m} \cdot \frac{2m^2g}{aL^2} = 2mg/a + 6mg/a = 8mg/a$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \rho^2 G(\rho) + E_{\text{peff}}(\rho_m) + 4mg \frac{\xi^2}{a}$ si $\rho = \rho_m + \xi$ où $\xi \ll 1$

• Or $\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) \approx \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 G(\rho_m)$ ← ordre 2 en ξ

• Par conséquent $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow m \dot{\xi} \ddot{\xi} G(\rho_m) + \frac{8mg}{a} \xi \dot{\xi} = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{\xi} + \frac{8\xi g}{aG(\rho_m)} = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$ où $\omega_0^2 = \frac{8g}{a(1+4\rho_m^2/a^2)}$

Equation différentielle type oscillateur harmonique t.q : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \underline{\underline{1,162s}}$

⑤ Réalisation d'un contact

PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + R\vec{e}_m$

$\Leftrightarrow m \frac{d(v\vec{e}_T)}{dt} = m\vec{g} + R\vec{e}_m \Leftrightarrow m\dot{v}\vec{e}_T + mv \frac{d\vec{e}_T}{dt} = m\vec{g} + R\vec{e}_m$

Or $\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_m \Rightarrow m\dot{v}\vec{e}_T + mv \cdot \dot{\theta}\vec{e}_m = m\vec{g} + R\vec{e}_m$
"v/p"

Donc sur \vec{e}_m : $m \frac{v^2}{\rho} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_m + R \Leftrightarrow R = \frac{mv^2}{\rho} - m\vec{g} \cdot \vec{e}_m > 0$ car $\vec{g} \cdot \vec{e}_m < 0$.

⑥ Réalité du mouvement

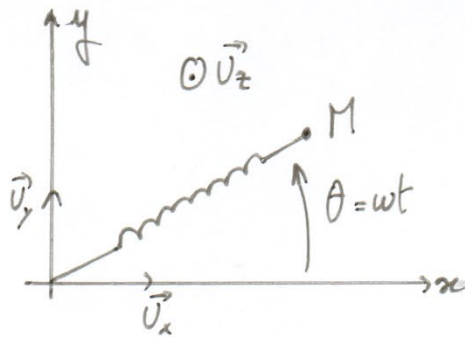
$\Rightarrow R > 0$: le contact ne peut pas être rompu

En réalité les frottements vont diminuer l' E_m jusqu'à obtenir la valeur minimale de $\rho = \rho_m$.
 la valeur de $\dot{\rho}$ jusqu'à devenir nulle

Comme $\rho_m = \left(\frac{L^2 a}{2m^2 g} \right)^{1/4}$ et que L proportionnel à l on aura $\dot{\rho}(\infty) = 0$ et $\rho(\infty) = 0$

Partie II - Ressort en rotation (CCP TSI 2015)

1°)



Palan des forces : $\vec{f} = -k(x-l_0)\vec{u}_r$

$\vec{P} + \vec{R} = 0$ grâce à la table et coussin d'air

$$\begin{aligned} \text{D'où } \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} &= \vec{OM} \wedge \vec{f} = x\vec{u}_r \wedge (-k(x-l_0)\vec{u}_r) \\ &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{\sigma}_O &= \text{cste} \end{aligned}$$

2a) Par définition : $\vec{\sigma}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = m \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

On reconnaît un problème à forces centrales donc le mouvement est plan. De plus

$$\vec{v}_O(t) = \vec{0} \text{ et } y=0 \text{ d'où : } \begin{cases} \vec{\sigma}_O = \vec{0} \\ \vec{OM} = x\vec{u}_x \end{cases}$$

\Rightarrow la trajectoire du mobile est rectiligne suivant (Ox)

2b) Soit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \Leftrightarrow \ddot{x} = -k(x-l_0)/m \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$ où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\text{d'où } x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + l_0$$

$$\text{or } \begin{cases} x(0) = 6/5 l_0 = A \cos \varphi + l_0 \\ \dot{x}(0) = 0 = -A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = l_0/5 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boxed{\begin{cases} x = \frac{l_0}{5} \cos(\omega_0 t + \varphi) + l_0 \\ \text{et} \\ x \in [4/5 l_0; 6/5 l_0] \end{cases}}$$

3a) de résultat du 2a) se retrouve : $\vec{\sigma}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \text{cste} \vec{u}_z$

$$C.I. \Rightarrow \sigma = m l_1^2 \omega$$

3b) Absence de frottements $\Rightarrow E_m = \text{cste}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 + \text{cste} \quad (E_{pp} = \text{cste})$$

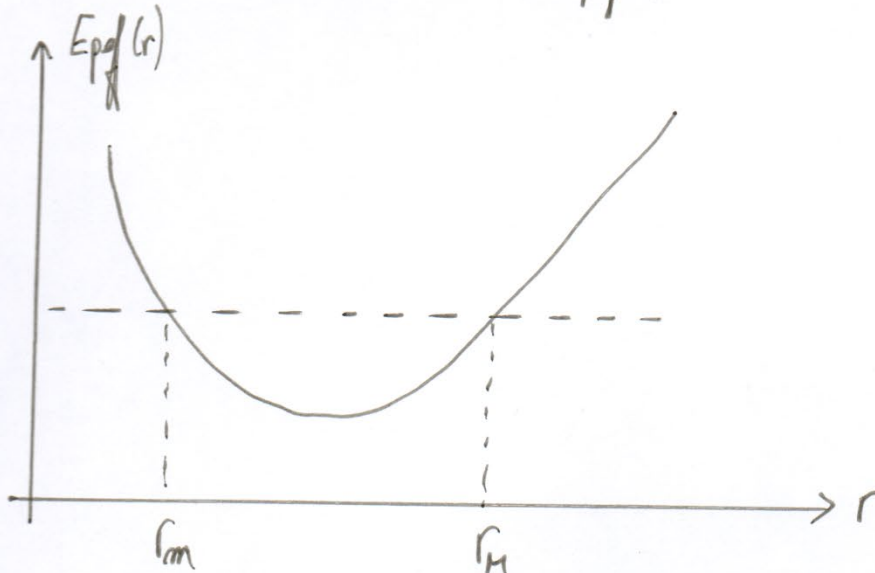
$$\text{On choisit } \text{cste} = 0 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

3c) Soit $r^2 \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m} \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\sigma^2}{m^2 r^4}$ avec $\sigma = m l_1^2 \omega$

$$\text{donc } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{\sigma^2}{m^2 r^4} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} k (r - l_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{m r^2}}_{E_{pp}(r)}$$

3d)



la forme de $E_{pp}(r)$ entraîne que quel que soit la valeur de E_m , r est borné par 2 valeurs r_m et $r_M \Rightarrow$ C'est un état lié

Partie III - Etude de deux mouvements avec force de frottement du type $-k\vec{v}$ (Mines d'Albi 2004)

① Mot d'une bille dans un liquide

I.1) Poussée d'Archimède : $\vec{A} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g \vec{e}_z$. opposé au poids
 . norme = poids du fluide déplacé

I.2) Dans le référentiel du laboratoire (Oxy \vec{z}) on a :

$$\vec{P} + \vec{A} + \vec{f} = m\vec{a} \text{ où } \begin{cases} \vec{P} = \text{poids de la bille} \\ \vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v} \end{cases}$$

I.3) Si $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{P} = -\vec{A}$

I.4) PFD: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta r \vec{v} + m\vec{g} - m\vec{g}$

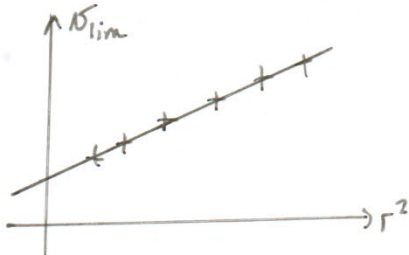
$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r \vec{v}}{m} = \vec{g} \left(1 - \frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho}\right) \text{ où } \tau = \frac{2}{9} \frac{\rho r^2}{\eta} \quad \textcircled{1}$$

I.5) la solution de ① s'écrit : $\vec{v} = \vec{A}e^{-t/\tau} + \vec{g}\tau \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho}\right)$ où $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho r^2}{\eta}$

d'où si $t \rightarrow \infty$: $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho_0}{\eta} g r^2$

I.6) A l'aide d'une régression linéaire $v_{\text{lim}} = f(r^2)$ faite sur calculatrice ou ordinateur :



$$v_{\text{lim}} = 2,01 \cdot 10^{-3} + \underbrace{22\,318}_{\text{pente}} r^2 \text{ où } r^2 = 0,9998$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho_0}{\text{pente}} \cdot g = 0,64 \text{ Pl} \text{ ou } \underline{\underline{0,64 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}}}$$

Et $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho r^2}{\eta} = \underline{\underline{61 \text{ ms}}}$. Après 5 τ , on peut considérer que $v = 0,99 v_{\text{lim}}$ et conclure que le phénomène est facilement observable.

①) Mvt d'un proton dans un liquide

$$\text{II.1.1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Forces de frottement fluide } \vec{f} = -k\vec{v} \\ \text{Force magnétique : } \vec{f}_c = q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{array} \right.$$

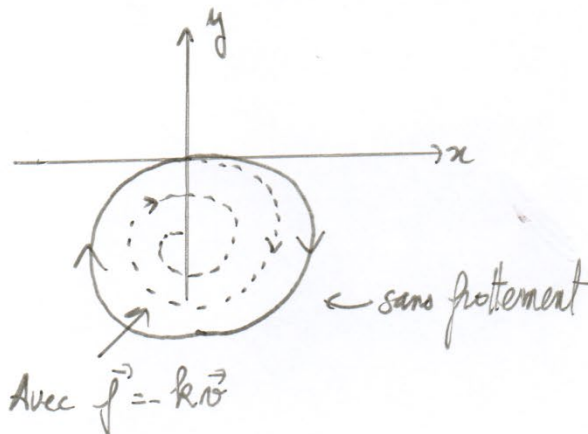
$$\text{II.1.2)} \text{ PFD : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\mathcal{C}} = \omega \vec{v} \wedge \vec{u} \quad \text{où } \mathcal{C} = \frac{m}{k}, \omega = \frac{eB}{m} \text{ et } \vec{u} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$

II.2.1) Absence de frottements $\Delta W_{mc} = 0$ et la force magnétique ne travaille pas d'où $\frac{dE_c}{dt} = 0$

On va retrouver un mouvement cyclotron c'est un mvt plan circulaire et uniforme de rayon : $R = \frac{v_0}{\omega}$ et de centre $C(0, -v_0/\omega)$

II.2.2) La force de frottement va abaisser v et donc E_c d'où une diminution de v : c'est une spirale.



$$\text{II.2.3)} \text{ II.1.2)} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\mathcal{C}} = \omega \begin{vmatrix} v_x & v_y & 1 \\ v_y & -v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega v_y \\ -\omega v_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dv_x/dt = -v_x/\mathcal{C} + \omega v_y = a v_y - b v_x \\ dv_y/dt = -v_y/\mathcal{C} - \omega v_x = -a v_x - b v_y \end{cases} \quad \text{d'où } \boxed{b = 1/\mathcal{C}, a = \omega}$$

$$\text{II.2.4)} \text{ Soit } \underline{V} = v_x + jv_y \text{ d'où: } \frac{d\underline{V}}{dt} = (av_y - bv_x) + j(-av_x - bv_y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\underline{V}}{dt} = v_y(a - jb) + v_x(-b - ja) = (v_x + jv_y)(-b - ja)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\underline{V}}{dt} + \underline{V}(a + jb) = 0 \quad \Leftrightarrow \underline{V} = Ae^{-(b+ja)t}$$

$$\text{Or à } t=0, \underline{V}(0) = v_0 \Rightarrow \underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} v_x = \text{Re}(\underline{V}) = v_0 e^{-bt} \cos(at) \\ v_y = \text{Im}(\underline{V}) = -v_0 e^{-bt} \sin(at) \end{cases}$$

$$\text{II.3.1)} \text{ Soit } \underline{V} = \frac{d\underline{X}}{dt} \Rightarrow \underline{X} = \int \underline{V} dt = \int v_0 e^{-(b+ja)t} dt$$

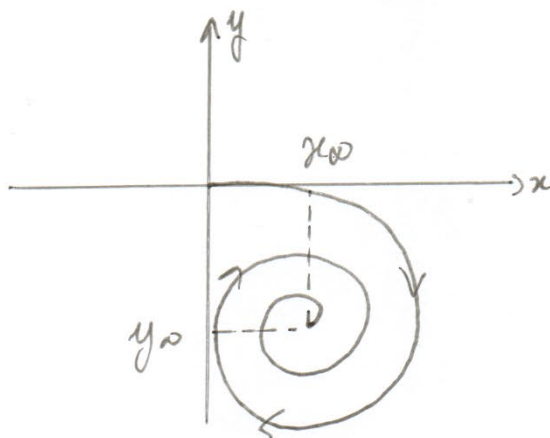
$$\Rightarrow \underline{X} = \frac{v_0}{-b-ja} e^{-(b+ja)t} + C$$

$$\text{or } \underline{X}(0) = 0 \Rightarrow \underline{X} = \frac{v_0}{b+ja} (1 - e^{-(b+ja)t})$$

$$\text{II.3.2)} \text{ lorsque } t \rightarrow \infty : \underline{X}_\infty = \frac{v_0}{b+ja} = x_\infty + jy_\infty = \frac{v_0}{\sqrt{a^2+b^2}} (b-ja)$$

$$\text{d'où } x_\infty = \frac{bv_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } y_\infty = -\frac{av_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

II.3.3)



• le centre de la spirale se déplace sur la droite d'où nos calculs par rapport au cas sans frottement.
• On appelle cette spirale, une spirale logarithmique.