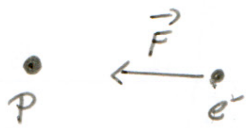
Physique : DM0

Partie A : De l'atome d'H aux galaxies (Centrale PC – 2018)

Q1) Soit $\vec{F} = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$



Q2) Or $dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{OM} \Rightarrow \boxed{E_p = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} + \underbrace{cste}_{=0}$ avec $\lim\limits_{r\to\infty} E_p = 0$

Q3) Soit $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{OM}\wedge m\vec{v} = \vec{cste}$

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ et $\vec{OM}$ $\in$ au m̂ plan qui est toujours orthogonal à $\vec{L}$

$\Rightarrow$ Le mouvement est plan

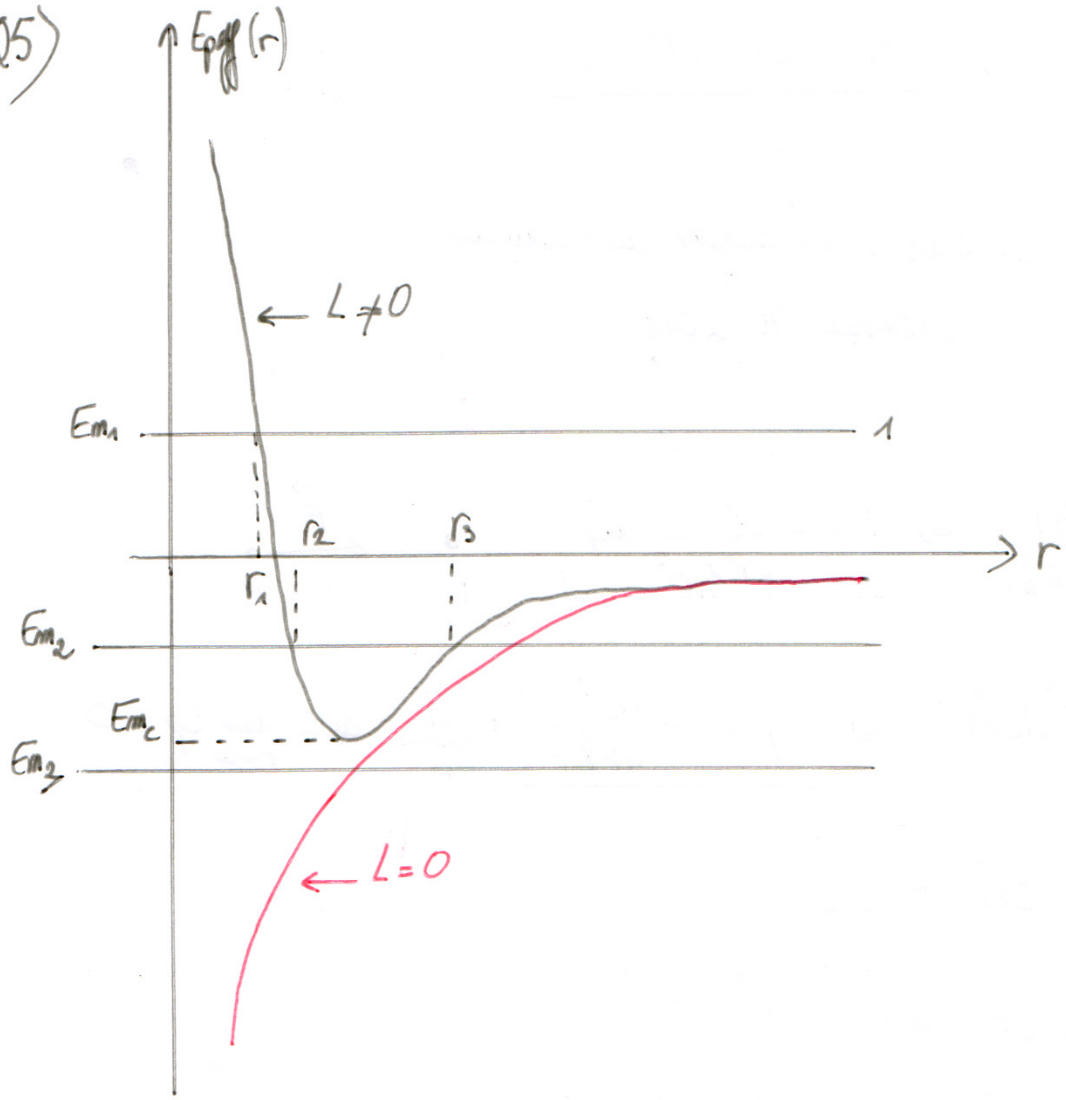
Q4) Soit $E_m = \dfrac{1}{2}m_e v^2 - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{1}{2}m_e\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $\|\vec{L}\| = m_e r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{\|\vec{L}\|}{m_e r^2} = \dfrac{L}{m_e r^2}$

d'où $E_m = \dfrac{1}{2}m_e\dot{r}^2 - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{r^2}{2}\cdot\dfrac{L^2}{m_e r^4}$

$\boxed{\rightarrow E_m = \dfrac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \text{ où } E_{peff}(r) = \dfrac{L^2}{2m_e r^2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

Q5)



1^er^ cas : $L \neq 0$

- Si $E_m = E_{m_1}$, $r \geq r_1$: état libre (hyperbole)
- Si $E_m = E_{m_2}$, $r_2 \leq r \leq r_3$: état lié (ellipse)
- Si $E_m = 0$, parabole.
- Si $E_m = E_{m_3}$, états impossibles.

2^ème^ cas : $L = 0$

- Si $E_m > 0$: états impossibles
- Si $E_m < 0$: états libres

Q6) Pour avoir une trajectoire circulaire : . $L \neq 0$

. $E_m = E_{m_0} = E_{p,eff,min}$

• Soit $\dfrac{dE_{p\,eff}}{dr} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{\cancel{2}m_e}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{r^3}\right) + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{m_e r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{m_e e^2}} \quad (1)$$

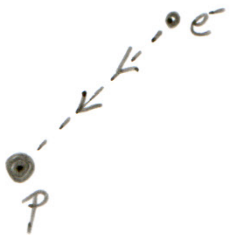
• Et $E_m = \dfrac{1}{2} m_e \dfrac{L^2}{m_e^2 r^2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ car $\dot{r} = 0$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}} \quad (2)$$

Q7) Si $L = 0$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\Rightarrow$ trajectoire rectiligne



Q8) Soit : $L = mvr = n\hbar$

$$(1) \Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow r = n^2 a_0 \text{ où } a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e\cdot e^2} = 52{,}9\text{ pm}}$$

Q9) $$(2) \Rightarrow E_m = -\frac{m_e\cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 (n\hbar)^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_m = \frac{E_0}{n^2} \text{ où } E_0 = -\frac{m_e\cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -13{,}6\text{ eV}}$$

Q10) Soit $\begin{cases} \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T \\ E_i = - E_0 \end{cases}$ (On tient compte des 3 degrés de liberté de translation)

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2}{3} \frac{|E_0|}{k_B}} \simeq \underline{10^5 K}$$

Q11) Soit $|E_n - E_0| = E_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Pour $\begin{cases} n = 2 \text{ on a } |E_2 - E_1| = 10{,}2\,eV & \text{cas } 1 \\ n \to \infty \text{ on a } |E_n - E_1| = 13{,}6\,eV & \text{cas } 2 \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} \lambda_1 = hc \cdot \frac{1}{|E_2 - E_1|} = 1{,}22.10^{-7} m \\ \lambda_2 = hc \cdot \frac{1}{|E_n - E_1|} = 9{,}13.10^{-8} m \end{cases}$

Partie B : Millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

I) Oscillateur simple

1°) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\dot{x}\,\vec{u}_x - mg\,\vec{u}_x - k(l-l_0)\,\vec{u}_x$

Sur $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x-l_0)$ car $l = OG = x(t)$.

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}(x-l_0) = -g.$

Notons $\check{x} = x_{eq}$ d'où $\dfrac{k}{m}(\check{x}-l_0) = -g \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}(x-\check{x}) = 0$

Si $X = x - \check{x}$ alors : $\boxed{\ddot{X} + 2\gamma\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0}$ (1)

où $\begin{cases} \boxed{\omega_0^2 = k/m} \\ 2\gamma\omega_0 = \dfrac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{\alpha}{2m\omega_0} = \dfrac{\alpha}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{mk}}} \end{cases}$

- ω_0 est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement
- γ est le facteur d'amortissement, il croît proportionnellement à α.

2°) 1er cas $\gamma = 0$

Dans ce cas (1) s'écrit $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \Rightarrow X = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Or $\begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = X_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

2ème cas : $0 < \gamma < 1$

Dans ce cas le polynôme caractéristique s'écrit : $r^2 + 2\gamma\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

t.q $\Delta = 4\gamma^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\gamma^2 - 1) < 0$

Les solutions sont du type : $X = \left[A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)\right] e^{-\gamma\omega_0 t}$ où $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2}$

Or $\begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = -\xi\omega_0 A + B\omega_a . \end{cases}$

car $\dot{X} = -\xi\omega_0\left[A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t} + \omega_a\left[-A\sin(\omega_a t) + B\cos(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$

Donc $V_0 = -\xi\omega_0 X_0 + B\omega_a$

$\Leftrightarrow B = \dfrac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_a}$

Donc $\boxed{X(t) = \left(X_0\cos(\omega_a t) + \dfrac{1}{\omega_a}(V_0 + \xi\omega_0 X_0)\sin\omega_a t\right)e^{-\xi\omega_0 t}}$

On observe des pseudo-oscillations.

- L'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$ car $\vec{F_v} = +\beta\dot{x}\vec{u_x}$

$\Rightarrow \xi = \dfrac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$

- Si $\beta > \alpha$, l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.

3°). ① s'écrit avec l'ajout de cette force $\vec{F} = \vec{F_0} + \vec{F_1}\cos(\omega t)$

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left[X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right] = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

or $Y = X + \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\dfrac{F_1}{m}\cos(\omega t)$

- On pose $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ et $\underline{F_1} = F_{1m}e^{i(\omega t)}$

$$\Rightarrow \underline{Y}\left(-\omega^2 + 2\xi\omega_0(i\omega) + \omega_0^2\right) = -\frac{\underline{F_1}}{m} = -\underline{E}$$

D'où $\underline{Y} = \dfrac{-\underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(2\xi\omega_0\omega)} = \dfrac{-\underline{E}/\omega_0^2}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\left(\dfrac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}$

Donc $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1/\omega_0^2}{1-\Omega^2+2i\xi\Omega}}$

4°) Une résonance se produit si $|\underline{H}|$ présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur.

Soit $|\underline{H}| = \dfrac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\Omega^2\xi^2}}$

t.q $\dfrac{dH}{d\Omega} = 0 \iff -4\Omega(1-\Omega^2)+8\Omega\xi^2 = 0$

$\iff \begin{cases} \Omega = 0 \text{ (cas non intéressant car minimum)} \\ (1-\Omega^2) = 2\xi^2 \end{cases}$

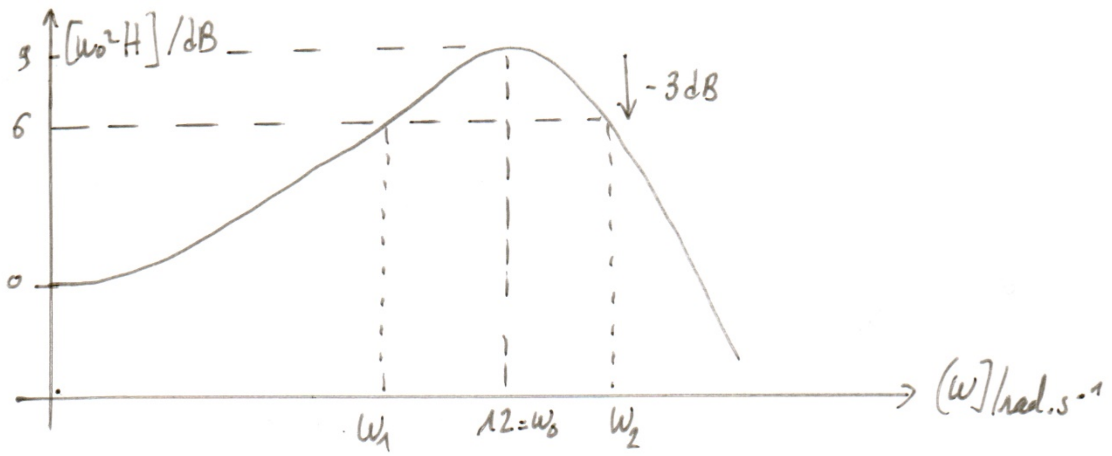
D'où $\Omega^2 = 1-2\xi^2 \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$

A la résonance : $|\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4+(1-2\xi^2).4.\xi^2}}$

$\iff |\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^2-\underbrace{4\xi^4}_{\ll 4\xi^2}}}$

Vu que $\xi^2 \ll 1 \Rightarrow \boxed{|\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1}{2\omega_0^2\xi}}$

5°)



. Pour $\xi^2 \ll 1$ on a $\omega_r = \omega_0 \simeq 12\,rad.s^{-1}$

. Or on sait que la bande passante est t.q : $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q} = 2\xi$

Avec $\Delta\omega = 14{,}2 - 9{,}5 = 4{,}7\,rad.s^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}} = \frac{4{,}7}{2 \times 12} = \underline{\underline{0{,}2}}$$

6°) Il est important de connaître les fréquences de résonance d'une structure pour éviter qu'elle ne soit excitée à leur voisinage. Exciter sur une résonance un pont ou une tour peuvent être détruites : <u>pont de Tacoma à Washington</u>

7°) On peut fixer sur la structure des accéléromètres.