

# Physique : DS5

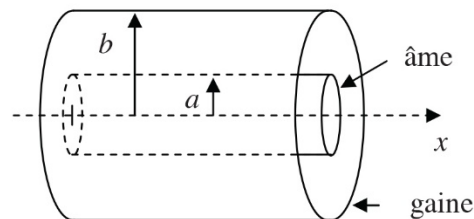
La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## PARTIE A – Transmission d'un signal

Dans ce problème, on se propose d'étudier et de comparer le câble coaxial et la fibre optique comme supports de distribution de signaux. La **partie I** traite du câble coaxial. Dans la sous-partie **I.1**, on le supposera parfait, tandis que la sous-partie **I.2** visera à en affiner la modélisation. La **partie II** traite de la fibre optique. Après avoir rappelé quelques résultats généraux d'optique géométrique dans la sous-partie **II.1**, on détaillera la propagation des rayons dans la fibre à saut d'indice (sous-partie **II.2**) puis dans la fibre optique à gradient d'indice (sous-partie **II.3**), ce qui nous conduira à analyser une technique d'augmentation de la capacité de transmission : le multiplexage (sous-partie **II.4**). La sous-partie **II.5** est consacrée aux pertes associées à l'usage de la fibre optique.

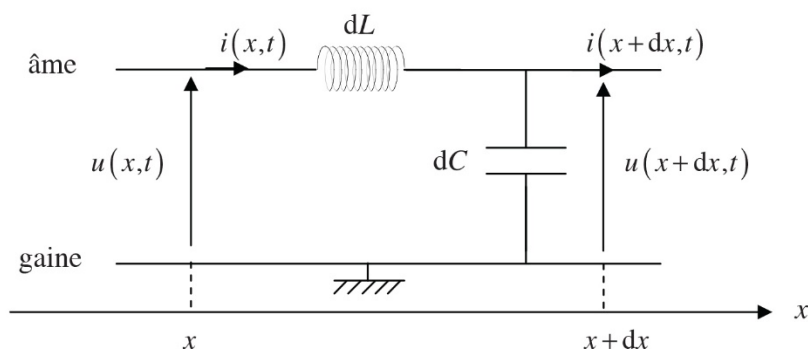
### Partie I – Le câble coaxial

Un câble coaxial, représenté en **figure 1**, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon  $a$ , appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur  $b$ . Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. À l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.



**Figure 1** – Structure d'un câble coaxial

On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement  $L$  et  $C$  les inductance et capacité par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur  $dx$ , considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance  $dL = L \cdot dx$  et une capacité  $dC = C \cdot dx$ . Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$  est représenté en **figure 2**. Dans ce modèle, on néglige toute perte résistive. On note  $i(x, t)$  et  $i(x + dx, t)$  les intensités des courants dans la ligne, à l'instant  $t$ , aux abscisses respectives  $x$  et  $x + dx$ . On note  $u(x, t)$  et  $u(x + dx, t)$  les tensions entre l'âme et la gaine, à l'instant  $t$ , aux abscisses respectives  $x$  et  $x + dx$ . Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence  $f$ .



**Figure 2** – Schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$

### I.1 – Le câble coaxial parfait

**Q1.** Comment le courant circulant dans l'âme revient-il jusqu'au générateur de tension ?

**Q2.** Démontrer que les deux équations différentielles couplées sur  $u$  et  $i$  sont :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Vous considérerez, notamment, que :  $\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  à l'ordre 0 en  $dx$ .

Par ailleurs, on rappelle que, puisque  $dx$  tend vers zéro, nous avons les relations suivantes :

$$u(x+dx,t) - u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad i(x+dx,t) - i(x,t) = \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \cdot dx.$$

**Q3.** Montrer que  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$  obéissent à deux équations de propagation de D'Alembert.

En déduire l'expression de la vitesse de propagation  $v$  des signaux dans la ligne en fonction de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Vérifier sa dimension.

**Q4.** On étudie les solutions des équations de D'Alembert en régime permanent sinusoïdal. La tension  $u(x,t)$  correspond à la partie réelle de la tension complexe  $\underline{u}(x,t)$ . L'intensité  $i(x,t)$  correspond à la partie réelle de l'intensité complexe  $\underline{i}(x,t)$ . On propose, avec  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ , des solutions complexes des équations de propagation de la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \rho \cdot i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) - \rho \cdot i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x))$$

et

$$\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) + i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x)).$$

Vérifier que  $\underline{u}(x,t)$  est compatible avec l'équation trouvée à la question **Q3**, à une condition sur  $v$ ,  $\omega$  et  $k$  qu'on explicitera.

Donner une interprétation physique de chacun des deux termes présents dans les expressions de  $\underline{u}(x,t)$  et  $\underline{i}(x,t)$ .

Pour la suite, nous considérerons toujours  $i_0$  non nul.

**Q5.** Donner l'expression de  $\rho$  en fonction de l'impédance caractéristique  $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ .

Préciser son unité.

**Q6.** L'extrémité du câble, de longueur  $d$ , est fermée sur une impédance  $\underline{Z}$ . Exprimer  $i_1$  en fonction de :  $i_0$ ,  $\underline{Z}$ ,  $\rho$ ,  $k$  et  $d$ .

**Q7.** L'impédance totale de la ligne vue depuis l'abscisse  $x$ , notée  $\underline{Z}_l(x)$ , a pour expression :

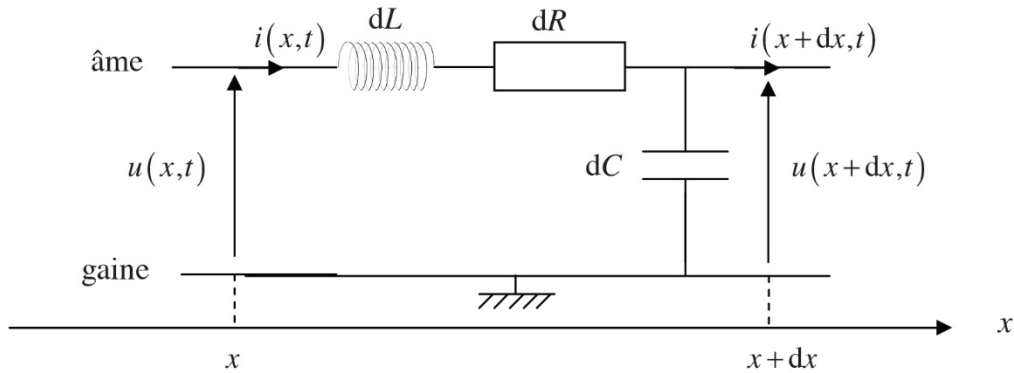
$$\underline{Z}_l(x) = \frac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}. \quad \text{Donner l'expression de } \underline{Z}_l(x) \text{ en fonction de : } \underline{Z}, \rho, k, d \text{ et } x. \text{ À quelle}$$

condition sur  $\underline{Z}$ , l'impédance  $\underline{Z}_l(x)$  est indépendante de l'abscisse  $x$ ? Quelle est alors l'expression de  $\underline{Z}_l(x)$ ? Que dire dans ce cas de  $i_1$  et que peut-on alors conclure ?

Quelle impédance mettre en bout de câble pour s'assurer, dans le cadre des télécommunications, que la puissance transmise est optimale ?

## I.2 – Le câble coaxial avec pertes

La modélisation précédente ne décrit qu'imparfaitement la propagation du signal. Aussi on se propose d'étudier le modèle représenté en **figure 3** dans lequel on a inséré une résistance  $dR = r \cdot dx$  par rapport au modèle de la **figure 2** de la page 2.



**Figure 3** – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfaite de longueur  $dx$

**Q8.** Quelle est l'origine physique de la résistance  $dR$  ?

**Q9.** Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension  $u(x,t)$  est :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + r \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

**Q10.** En considérant une solution de la forme  $\underline{u}(x,t) = u_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$  à l'équation de propagation précédente, dans laquelle  $\underline{k}$  est une pulsation spatiale complexe, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.

**Q11.** On écrit  $\underline{k}$  sous la forme :  $\underline{k} = \alpha - j \cdot \beta$ . Que représentent physiquement  $\alpha$  et  $\beta$  ? Justifier, par un raisonnement physique, le signe de  $\beta$  lorsque  $\alpha > 0$ .

**Q12.** On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en  $x = 0$  et un point d'abscisse  $x$  par la grandeur  $A$ , exprimée en décibel par unité de

longueur, 
$$A = \frac{10 \cdot \log\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x} = \frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{\ln\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x},$$
 avec  $P(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u(x,t) \cdot \underline{i}^*(x,t))$  la

puissance moyenne de l'onde à l'abscisse  $x$  et  $P_0 = P(x=0) = \frac{1}{2} u_0 \cdot i_0$  la puissance moyenne de l'onde en entrée du câble.

En considérant que  $\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$ , exprimer  $A$  en fonction de  $\beta$ .

**Q13.** À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, montrer que si  $r \ll \Lambda \cdot \omega$ , alors

$$A = \frac{10}{\ln 10} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} .$$

**Q14.** Par ailleurs, on montre que, lorsque  $r \gg \Lambda \cdot \omega$ , l'atténuation linéique de puissance a pour expression :  $A = \frac{10}{\ln 10} \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \Gamma \cdot \omega}$ . Ainsi, au vu de cette équation et de celle de la question

**Q13**, il semble que l'atténuation linéique de puissance progresse avec la fréquence puis devienne indépendante de celle-ci lorsque les effets inductifs prennent le pas sur les effets résistifs. Mais, en réalité, à cause d'un phénomène physique associé à la résistance  $r$ , en haute fréquence,  $r$  augmente avec la racine carrée de la fréquence. Nommer et expliquer ce phénomène.

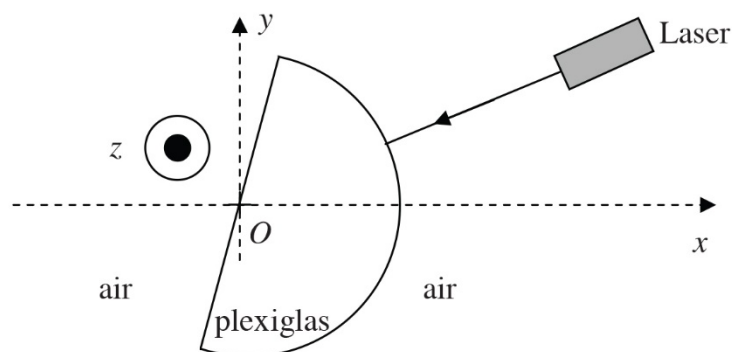
## Partie II – La fibre optique

Dans toute cette partie, on notera  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la célérité de la lumière dans le vide.

### II.1 – Généralités

**Q15.** Énoncer les lois de Snell – Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant de schémas.

**Q16.** Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglas dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglas suivant un de ses rayons comme indiqué en **figure 4**. Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe  $(Oz)$ ,  $O$  étant le centre du disque.



**Figure 4** – Expérience avec un demi-cylindre en plexiglas

Reproduire la **figure 4** et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Quelles lois peut-on vérifier avec cette expérience ? Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

## PARTIE B – Millenium Bridge

## Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ .

A l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .



La première partie du sujet était une étude mécanique type « Sup » : modélisation par un système de ressort avec force de frottements visqueux, où l'on montrait que le pont basculait en résonance en fonction de la fréquence des pas des piétons.

## II. — Système élastique continu

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus mais d'un point de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discrétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique  $\rho$  constante, qui a la forme d'un cylindre de section  $S$  et d'axe  $(O, \hat{u}_x)$  horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme  $F$  de la force de traction permettant à un solide de longueur  $L$  de s'allonger de  $\Delta L$  est donnée par la loi de Hooke :  $F = ES \frac{\Delta L}{L}$  où  $E$  est une constante appelée module d'Young du matériau.

▣ **10** — Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

▣ **11** — On note  $X(x, t)$  le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse  $x$ . Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos  $dx$  et en déduire la force de traction  $\vec{F}(x, t) = F(x, t)\hat{u}_x$  exercée par la partie « droite » (du côté des  $x$  croissants) sur la partie « gauche » (du côté des  $x$  décroissants) en fonction de  $E$ ,  $S$  et  $\frac{\partial X}{\partial x}$ . Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur  $dx$  et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $X(x, t)$ .

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle on introduit un axe vertical dirigé selon le vecteur unitaire  $\hat{u}_y$  et on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant  $t$  par une ligne d'équation  $y(x, t)$  de masse linéique  $\mu$  uniforme.

En un point  $M(x, y)$  de la passerelle, on définit le vecteur unitaire tangent  $\hat{u}_\tau$  à la passerelle tel que  $\hat{u}_\tau(x, t) = \cos[\alpha(x, t)]\hat{u}_x + \sin[\alpha(x, t)]\hat{u}_y$ . Les déplacements sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant  $\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \ll 1$ . Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé que selon la verticale. En chaque point  $M(x, y)$  de la passerelle règne à chaque instant  $t$  une tension  $\vec{T}(x, t)$  portée par  $\hat{u}_\tau$ . Un tronçon de corde est représenté sur la figure 5.

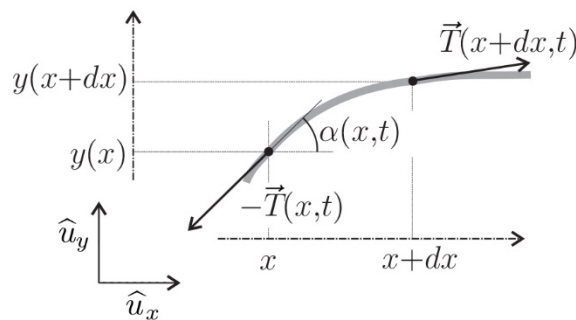


FIGURE 5 – Tronçon de corde élastique

▣ **12** — En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension de la corde est indépendant de  $x$ . On le notera  $T_0$ .

▣ **13** — Montrer alors que l'on peut écrire  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  où l'on exprimera  $c_\ell$  en fonction de  $T_0$  et  $\mu$ .

FIN DE LA PARTIE II

### III. — Modèle de la poutre élançée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur  $b$  selon  $(O, \hat{u}_z)$  et de hauteur  $h$  selon  $(O, \hat{u}_y)$ . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire  $y(x)$  très petit devant  $h$  ou  $b$ , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section  $S$ , de masse volumique  $\rho$ , de module d'Young  $E$  et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $(O, \hat{u}_z)$  est  $I = \frac{1}{12}bh^3$ . L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

□ 14 — On cherche des solutions sous la forme  $y(x, t) = f(x)g(t)$ . De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

□ 15 — Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $f(x)$  et  $g(t)$ . En déduire que  $g(t)$  est une fonction périodique de pulsation  $\omega$  constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution  $y(x, t)$  correspondant à la situation étudiée ?

□ 16 — Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de  $\beta$  en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur  $L$  en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent  $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$  et  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0,t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L,t} = 0$ .

□ 17 — Déterminer les pulsations propres  $\omega_n$  de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de  $L, E, I, \rho, S$  et d'un entier  $n$  caractérisant le mode.

□ 18 — Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondant à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier  $n$  le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur  $h = 1,07$  m (42 pouces) et de largeur  $b = 4$  m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de  $L_1 = 70$  m,  $L_2 = 144$  m et  $L_3 = 108$  m. On donne la masse volumique de l'aluminium  $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et son module d'Young  $E = 69 \times 10^9 \text{ SI}$ .

□ 19 — Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur  $b$ . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

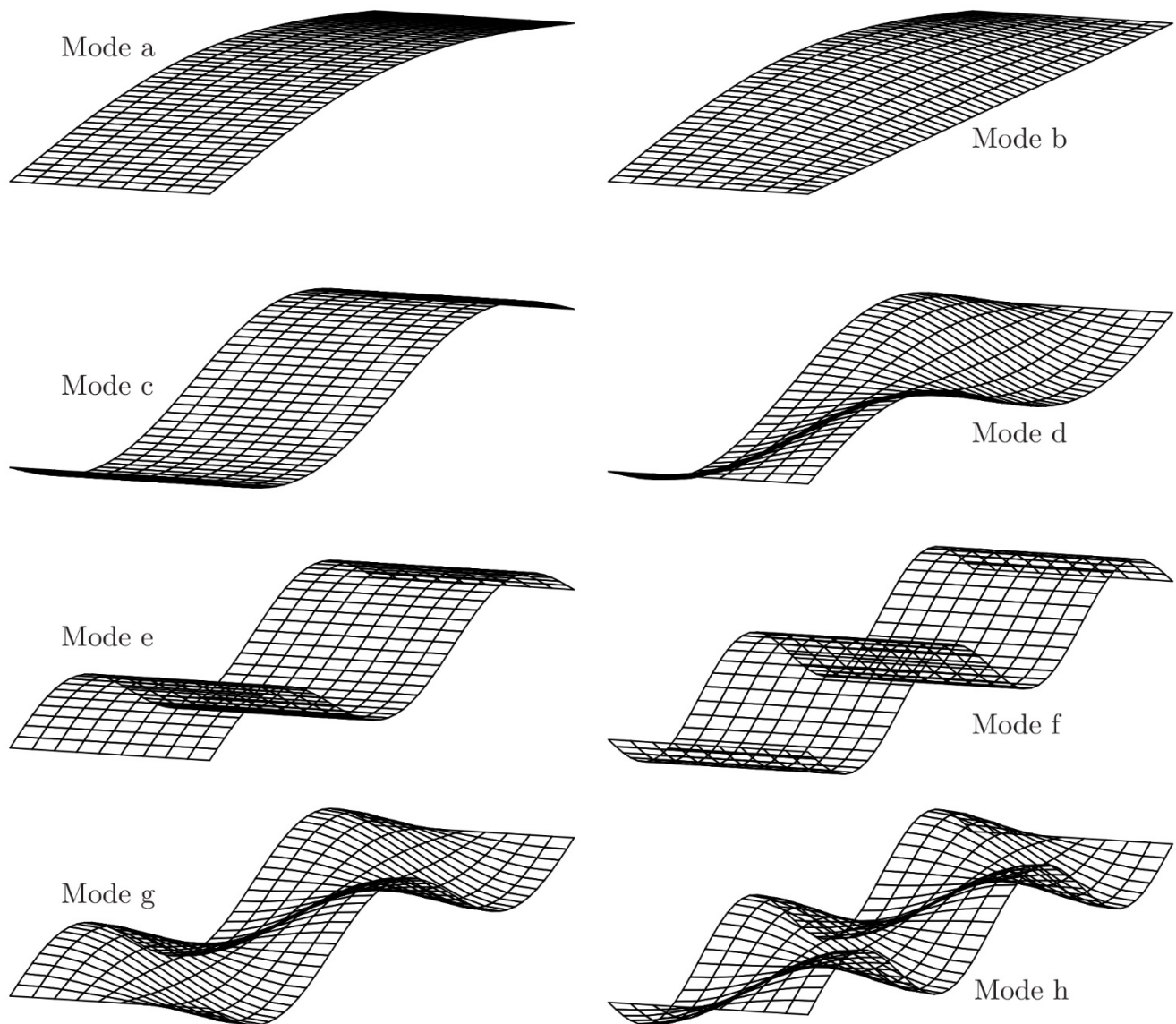


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités

**FIN DE LA PARTIE III**

**FIN DE L'ÉPREUVE**