

Physique : DS5

PARTIE A – Transmission d'un signal (CCP 2018 – PC)

I.1 Le câble coaxial parfait

Q1. Lorsque le câble est fermé à son extrémité par un dipôle, le courant "revient" par la gaine. **Cependant, on ne se place pas dans l'ARQS ici, donc le courant n'a pas réellement besoin de "revenir"... La question peut donc troubler certains élèves...**

Q2. La loi des mailles donne, en notant u_L la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\boxed{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}}$$

Ensuite, la loi des nœuds donne, en notant i_C le courant qui "descend" dans le condensateur :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_C$$

Or $i_C = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ au premier ordre, et $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\boxed{\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}}$$

Q3. On dérive la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à l'espace, et on assimile les dérivées croisées : $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ (théorème de SCHWARTZ). Il vient alors :

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = 0}$$

De même, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t , et en assimilant les dérivées croisées de $i(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0}$$

On reconnaît dans les 2 cas une équation de D'ALEMBERT avec une célérité des ondes $v = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$.

v est bien une vitesse pour que l'équation reste homogène : $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ est en $V.s^{-2}$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ est en $V.m^{-2}$ donc v est bien en $m.s^{-1}$. Autre manière de le vérifier : $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la pulsation caractéristique d'un circuit RLC, donc en s^{-1} , or Γ et Λ sont des grandeurs linéiques donc $\sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$ est bien en $m.s^{-1}$.

Q4. On injecte la solution proposée dans l'équation de D'ALEMBERT. Comme $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{u}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 \underline{u}(x, t)$, celle-ci devient :

$$-k^2 \underline{u}(x, t) + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{u}(x, t) = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

On obtient la relation de dispersion usuelle associée à l'équation de D'ALEMBERT : en effet, on a cherché une solution en somme d'OPPM se propageant dans le sens des x croissants (terme en i_0) et décroissants (terme en i_1).

Q5. On injecte la solution proposée dans l'une des équations de couplage, par exemple $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$:

$$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} = -\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

On en déduit :

$$k\rho = \Lambda\omega \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$$

Si u est une tension et i une intensité, ρ et donc Z_c sont des impédances, homogènes à des résistances, donc en Ω .

Q6. On applique la loi d’OHM à l’extrémité du câble : $\underline{u}(d, t) = \underline{Z}i(d, t)$:

$$\rho i_0 e^{j(\omega t - kd)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kd)} = \underline{Z}i_0 e^{j(\omega t - kd)} + \underline{Z}i_1 e^{j(\omega t + kd)}$$

$$i_0(\rho - \underline{Z})e^{-jkd} = i_1(\rho + \underline{Z})e^{+jkd} \Rightarrow \underline{i}_1 = i_0 \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$$

Q7. On note $\chi = \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$ le coefficient de réflexion pour exprimer $\underline{Z}_l(x)$:

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)} = \frac{\rho(i_0 e^{-jkx} - i_1 e^{+jkx})}{i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+jkx}}$$

$$\underline{Z}_l(x) = \rho \frac{e^{-jkx} - \chi e^{+jkx}}{e^{-jkx} + \chi e^{+jkx}} = \rho \frac{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkd} - (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkd} + (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}$$

$\underline{Z}_l(x)$ est donc indépendant de x si $\rho = \underline{Z} = Z_c$. Dans ce cas, $\underline{Z}_l(x) = \rho$ et $\chi = 0$, c’est-à-dire $\underline{i}_1 = 0$: il n’y a **pas d’onde réfléchi** : toute l’onde est transmise, ce qui optimise le transfert du signal. il faut donc mettre en bout de câble une impédance égale à Z_c ("adaptation d’impédance").

1.2 Le câble coaxial avec pertes

Q8. Les parties métalliques (gaine et âme) sont en métal non parfait, ayant une conductivité limitée, donc une certaine résistance : il y a donc des pertes par effet JOULE.

Q9. La loi des mailles donne cette fois :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L + u_R$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$, $u_R = r dx i(x, t)$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r i(x, t)$$

Par ailleurs, on a toujours $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ par la loi des nœuds. En dérivant la première équation par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En remplaçant avec la seconde équation, on obtient la relation demandée :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Q10. On injecte la solution proposée :

$$(-jk)^2 = \Gamma\Lambda(j\omega)^2 + r\Gamma j\omega$$

D’où la relation de dispersion : $\underline{k}^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - r\Gamma j\omega$.

Q11. Si $\underline{k} = \alpha - j\beta$, on peut écrire $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$. Ainsi α correspond à l’aspect propagatif de l’onde, et β à l’absorption de l’onde (sur une distance caractéristique $1/\beta$). Si $\alpha > 0$, l’onde se propage vers les x croissants, donc $\beta > 0$ pour avoir une atténuation, cohérente avec la dissipation d’énergie par effet JOULE.

Q12. On a $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ et $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$, donc la puissance moyenne s’écrit :

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t)) = \frac{1}{2} u_0 i_0 e^{-2\beta x} = P_0 e^{-2\beta x}$$

On en déduit $A = \frac{10}{\ln 10} \frac{2\beta x}{x} = 2\beta \frac{10}{\ln 10}$.

Q13. On a $\underline{k}^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$. On passe à la puissance 1/2, puis on utilise le DL de $(1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$ (en admettant qu'il fonctionne pour les complexes et que la racine est définie également...):

$$\underline{k} \approx \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{2\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$$

On identifie la partie imaginaire de \underline{k} à β donc on trouve $\beta = \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \cdot \frac{r\Gamma \omega}{2\Gamma \Lambda \omega^2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$. On reporte dans l'expression de A pour obtenir l'expression demandée :

$$A = 2\beta \frac{10}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Q14. Le phénomène responsable est l'**effet de peau** : le champ EM ne pénètre dans un conducteur ohmique que sur une profondeur caractéristique $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, donc le courant ne circule que sur cette épaisseur caractéristique. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la section de conduction diminue donc la résistance augmente avec $r \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

II / La fibre optique

II.1 Généralités

Q15. Pour la réflexion, avec les notations du schéma :

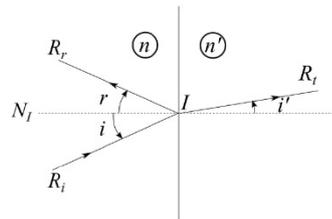
- Le plan d'incidence (\mathcal{R}_i, N_I) et le plan de réflexion (\mathcal{R}_r, N_I) sont confondus.
- avec les angles **orientés** :

$$\underline{r} = -\underline{i}$$

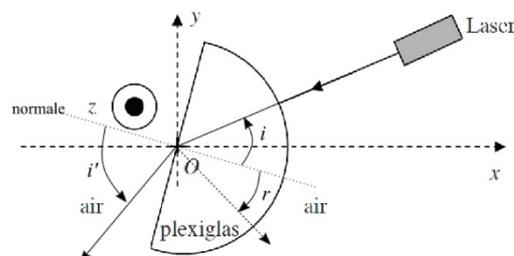
Pour la réfraction, avec les notations ci-dessous :

- Le plan d'incidence (\mathcal{R}_i, N_I) et le plan de réfraction (\mathcal{R}_t, N_I) sont confondus.
- avec les angles **orientés** :

$$n \sin i = n' \sin i'$$



Q16. Le laser n'est pas dévié lorsqu'il traverse le dioptre sphérique car s'il suit le rayon du cercle, il arrive localement sous incidence normale sur ce dioptre. Sur le dioptre plan, une faible partie du faisceau (quelques %) est réfléchi, ce qui permet de vérifier la loi sur l'angle de réflexion. La majorité du faisceau traverse le dioptre plan en étant dévié, ce qui permet de vérifier la loi sur l'angle de réfraction (à condition de connaître l'indice optique du plexiglas). L'air étant moins réfringent que le plexiglas, le faisceau sortira en s'éloignant de la normale. La coplanarité des rayons peut éventuellement être vérifiée également en choisissant un faisceau laser rasant le support, on constatera alors que les faisceaux réfléchis et réfractés sont aussi rasants.



Si on augmente progressivement l'angle d'incidence, on pourra également mettre en évidence le phénomène de réflexion totale car l'air est moins réfringent que le plexiglas.

Enfin, on utilise un laser pour avoir un faisceau parallèle, donc un seul angle d'incidence (si l'on néglige, à cette échelle petite devant la longueur de RAYLEIGH, la divergence du faisceau). De plus, le laser est monochromatique, ce qui évite les problèmes de dispersion (avec de la lumière blanche, on observerait un faisceau de sortie en "arc en ciel" car l'indice du plexiglas dépend de la longueur d'onde, donc l'angle de réfraction également).

Partie B : Millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

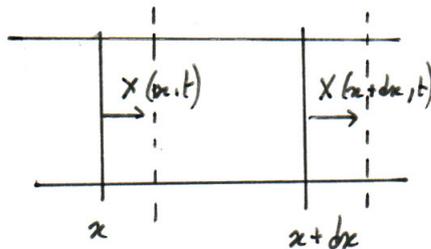
(II) Système élastique continu

10) Le module d'Young vérifie : $F = ES \cdot \frac{\Delta L}{L}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } [E] &= [F]/[S] \\ &= \frac{MLT^{-2}}{L^2} \end{aligned}$$

Donc E s'exprime en Pa ou $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

11)



Appliquons le PFD à la masselotte de largeur dx :

$$\text{Som } \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = F(x+dx, t) - F(x, t) \quad (1)$$

$$\text{or } F(x, t) = ES \frac{\Delta L_x}{L}$$

$$= ES \frac{X(x+dx, t) - X(x, t)}{dx} = ES \cdot \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\text{d'où (1) s'écrit: } \rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \left[\frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_x \right]$$

$$\Leftrightarrow \rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} : \text{équation de d'Alembert}$$

12) Pour le modèle de la corde :

$$\mu dl \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

On projette sur Ox : $0 = T_x(x+dx, t) - T_x(x, t)$ car les mouvements sont uniquement verticaux.

$$\Leftrightarrow T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) = 0$$

Or $\alpha \ll 1 \Rightarrow \underline{T(x+dx, t) \simeq T(x, t) = T_0} \Rightarrow \underline{\text{la norme est indépendante de } x}$

13) Sur Oy : $\mu dl \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 [\sin \alpha(x+dx, t) - \sin \alpha(x, t)]$

$$\text{or } \left\{ \begin{array}{l} dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \\ \text{et} \\ \frac{dy}{dx} = \tan \alpha \simeq \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \mu dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ où } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

III) Modèle de la poutre élastique

14) Si $y(x,t) = f(x) \cdot g(t)$ alors il s'agit d'ondes stationnaires. Ce type d'onde apparaît lorsqu'une onde réfléchie se superpose à une onde incidente après réflexion sur un obstacle. C'est les conditions aux limites (comme la corde vibrante par exemple) qui imposent de telles ondes.

$$15) \text{ soit } \rho S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^4} = 0$$

$$\text{d'où: } \rho S \cdot \ddot{g} + EI \cdot f^4 \cdot g = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ddot{g}}{g}}_{F(t)} = - \underbrace{\frac{EI}{\rho S} \cdot \frac{f^4}{f}}_{G(x)} = C$$

Comme $F(t) = G(x) \forall (x,t)$ on peut dire que les deux termes sont égaux à une constante C .

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{g} - Cg = 0 \\ f^4 + \frac{\rho S \cdot C}{EI} = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse on s'intéresse à des mouvements bornés donc on pose $C = -\omega^2$

$$\Rightarrow g(t) = A \cos(\omega t + \phi) : \text{fonction périodique de pulsation } \omega$$

• d'équation différentielle vérifiée par f : $\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f = 0$ est de quatrième ordre \Rightarrow on a 4 constantes à déterminer.

• Pour g on a deux constantes à déterminer.

$$\text{D'où } y(x,t) = A \cos(\omega t + \phi) [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + A_3 f_3(t) + A_4 f_4(t)]$$

On peut poser $A=1$ et ainsi il reste 5 constantes à déterminer.

16) Soit : $\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f = 0$ d'où le polynôme caractéristique :

$$\Rightarrow r^4 - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow r^4 = \alpha \quad \Rightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{\alpha} \\ r^2 = -\sqrt{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \alpha^{1/4} \\ r_2 = -\alpha^{1/4} \\ r_3 = j \cdot \alpha^{1/4} \\ r_4 = -j \cdot \alpha^{1/4} \end{cases}$$

$$\text{D'où la solution : } f = \underbrace{A e^{r_1 x}}_{f_1} + \underbrace{B e^{r_2 x}}_{f_2} + \underbrace{C e^{r_3 x}}_{f_3} + \underbrace{D e^{r_4 x}}_{f_4}$$

f_1 et f_2 peuvent s'écrire à l'aide fonctions hyperboliques
 f_3 et f_4 — " — " — sinusoïdales

$$\Rightarrow f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

$$\text{où } \beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$$

17) des conditions aux limites :

$$\cdot y(0,t) = 0 \text{ impose } f(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0$$

$$\cdot y''(0,t) = 0 \text{ impose } f''(0) = 0 \Rightarrow -\beta A + \beta C = 0 \Rightarrow A - C = 0$$

$$\text{D'où } \underline{A = 0 \text{ et } C = 0}$$

$$\cdot y(L,t) = 0 \Rightarrow f(L) = 0 \rightarrow B \sin(\beta L) + D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \quad (3)$$

$$\cdot y''(L,t) = 0 \Rightarrow f''(L) = 0 \Rightarrow -\beta B \sin(\beta L) + \beta D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \quad (4)$$

$$\text{D'où } \left\{ \begin{array}{l} (3) + \frac{(4)}{\beta} \Rightarrow 2D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \Rightarrow D = 0 \\ (3) - \frac{(4)}{\beta} \Rightarrow 2B \sin(\beta L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \text{ (} \Rightarrow f = 0 \text{ impossible)} \\ \underline{\beta L = m\pi} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \beta_m L = m\pi$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\rho S}{IE} \right)^{1/4} \omega_m^{1/2} L = m\pi$$

$$\Leftrightarrow \underline{\omega_m = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}}$$

18) On a vu que : $y_m(z,t) = A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m) \sin(\beta_m z)$ donc l'amplitude A_m ne dépend pas de z par exemple c'est le cas du mode (a) :



mais pas des modes (b), (c), (d), (e) dont y dépend de z .

→ des modes à conserver sont : a, c, e, f.

Le mode : a) possède 2 nœuds aux extrémités en $x=0$ et $x=L$.

: c) — " — " — " et un nœud en $x = \frac{L}{2}$

: e) ————— et deux nœuds en $x = \frac{L}{3}$ et $\frac{2L}{3}$

: f) ————— et trois nœuds en $\frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$, $\frac{3L}{4}$

D'où les valeurs de n :

a	c	e	f
1	2	3	4

13) Calculons les fréquences des quatre modes obtenus.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{IE}{\rho S}} \quad \text{ou} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

Avec les valeurs proposées on obtient : $f_n = \frac{m^2}{L^2} \cdot 9,17 \cdot 10^3$ d'où le tableau avec f en Hz :

L (m)	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$L_1 = 70$	0,50	2,0	4,5	8,0
$L_2 = 144$	0,12	0,47	1,1	1,9
$L_3 = 108$	0,21	0,84	1,9	3,4

Si on considère la marche des piétons à $f = 2\text{Hz}$ alors 3 modes peuvent être excités :

$$n = \{2, 3, 4\}$$

On remplace I' par I en inversant les rôles de b et h d'où $I' = \frac{1}{12} b^3 h$

$$\Leftrightarrow I' = \frac{b^2}{h^2} I = 16 I$$

D'où les nouvelles fréquences multipliées par 4 environ.

L (m)	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$L_1 = 76$	1,9	7,5	17	30
$L_2 = 144$	0,44	1,8	4,6	7,2
$L_3 = 168$	<u>0,79</u>	3,1	7,1	12,4

Cependant l'oscillation du Millénum sur cet axe est due à l'action latérale des pieds avec une alternance pied gauche et pied droit. Il faut donc comparer à $f = 1,0 \text{ Hz}$ cette fois.

Le mode qui pose problème à cette fréquence est le mode 1 avec $f_1(L_3) = 0,79 \text{ Hz} \neq 1,0 \text{ Hz}$.
C'est ce mode qui a posé problème dans la construction du Millénum Bridge.