

## Physique : DS4

## Sujet Centrale 2018 - Filière MP

## Etude Géophysique de la terre

Q1) Force électrique :  $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

Force gravitationnelle :  $\vec{F}_g = -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r$

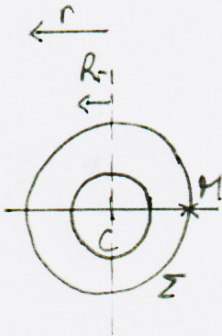
D'où les analogies :  $q \leftrightarrow m$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$$

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{g}$$

D'où Gauss pour la gravitation :  $\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$

Q2)



· tout plan contenant C est plan de symétrie  
 $\Rightarrow \vec{g} = g \vec{u}_r$

· le système est invariant par toute rotation autour de CM  
 $\Rightarrow g = g(r)$

D'où :  $\vec{g} = g(r) \vec{u}_r$

Théorème de Gauss appliqué à Σ pour  $r > R_T$  :  $g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \cdot M_T$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r \text{ où } r = R_T + z$$

$$\text{Q3) Donc } g = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$$

$$\stackrel{\text{D.L.}}{\approx} \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) + o(z).$$

$$\text{D'où } \underline{g_T(z) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)}$$

$$\text{Q4) Une variation de 1\% correspond à : } \frac{2z}{R_T} = \frac{1}{100}$$

$$\rightarrow z = \frac{R_T}{200} \approx \underline{\underline{31,9 \text{ km}}}$$

$$\text{Q5) On définit } \underline{\vec{\nabla}g = \text{grad } g = -\frac{2GM_T}{R_T^3} \vec{e}_z}$$

Il est dirigé vers les zones de champ fort et décrit la variation du champ  $g$ .

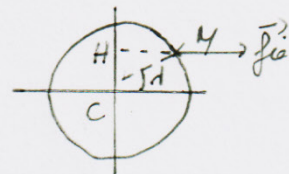
$$\text{Q6) On calcule } \nabla g = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\nabla g = 3,08 \mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1}}} \quad \text{car } 1 \text{ gal} \Leftrightarrow 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

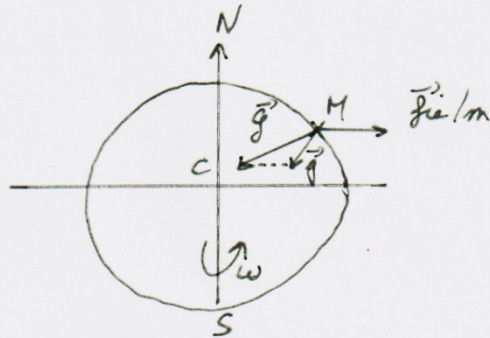
$$\Leftrightarrow 1 \text{ s}^{-2} \Leftrightarrow 1 \text{ gal} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$\text{Q7) Force d'inertie d'entraînement : } \underline{\vec{f}_c = m\omega^2 H \vec{M}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\vec{f}_{ic} = m\omega^2 R_T \cos \lambda \vec{u}}$$



$$\text{Q8) D'où } \underline{\underline{\vec{g} = \omega^2 R_T \cos \lambda \vec{u} - \frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r}}$$



$$Q9) \text{ D'où : } \alpha = \frac{\omega^2 R_T \cos h}{G M_T / R_T^2}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{\omega^2 R_T^3}{G M_T} = \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{-2}}}$$

$\alpha$  l'écart à l'équateur est significatif

$$Q10) \text{ Pendule simple : } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow \underline{\underline{g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}}} \text{ ce qui permet de mesurer } g \text{ connaissant } T \text{ et } l$$

Q11). Un pendule qui retarde a une période d'oscillation plus grande d'où :

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{1 + 2 \min 285}{1} = 1,0017.$$

$$\Rightarrow \frac{g_p}{g_c} = \left(\frac{T_c}{T_p}\right)^2 = 1,0034$$

$$\Rightarrow g_c = \left(\frac{T_c}{T_p}\right)^2 g_p = \underline{\underline{9,78 \text{ ms}^{-2}}}$$

Conséquence du changement d'altitude :

$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{2\Delta z}{R_T} = 7 \cdot 10^{-5}$ . Cette valeur ne peut expliquer le décalage du pendule. C'est bien  $f_{ci}$  qui est responsable du décalage.

$$Q12) \text{ Si } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ alors } \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

$$\text{Si } \Delta g = 1 \mu\text{gal} = 1 \mu\text{cm} \cdot \text{s}^{-2} = 10^{-8} \text{ms}^{-2}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{T}{2} \frac{\Delta g}{g} = \underline{\underline{5 \text{ ms}}}$$

$$Q13) \text{ A l'équilibre : } k(l - l_0) = mg$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta l = l \frac{\Delta g}{g}}} \approx 0,1 \text{ nm. si } l = 10 \text{ cm.}$$

$\Rightarrow$  impossible à mesurer au laboratoire.



Q14) Une faible variation de la longueur d'un tel ressort conduit à une variation relative plus importante de la force de rappel qu'avec un ressort de longueur à vide non nulle.

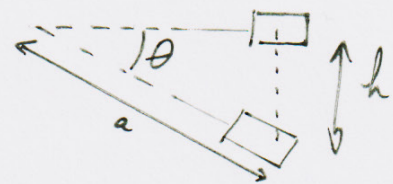
Q15) Imaginons que le système soit à l'équilibre si la tige est horizontale ( $\theta=0$ )

Alors  $\theta > 0$  si  $g$  augmente et  $\theta < 0$  si  $g$  diminue.

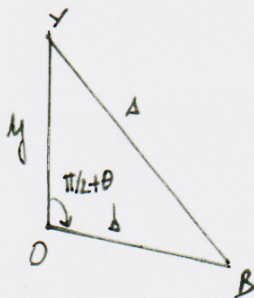
La variation du couple de rappel est donc faible permettant de détecter de faibles variations de  $g$ .

Q16) Soit  $\epsilon_p = \epsilon_{pe} + \epsilon_{pp} = \frac{1}{2}k(s-s_0)^2 - mgh$

$$\rightarrow \epsilon_p = \frac{1}{2}k(s-s_0)^2 - mgas \sin \theta$$



Q17)



Soit  $\vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}$

$$\Rightarrow b^2 + y^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OA} = s^2$$

$$\Rightarrow b^2 + y^2 - 2\vec{OB} \cdot \vec{OA} = s^2$$

$$\Rightarrow s^2 = b^2 + y^2 - 2yb \cos(\pi/2 + \theta)$$

$$\Rightarrow s = \left[ b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta \right]^{1/2}$$

Q18) D'où  $I' = -\frac{\partial \epsilon_p}{\partial \theta}$

$$= - \left[ -mg a \cos \theta + 2 \times \frac{1}{2} k (s-s_0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2yb \cdot \cos \theta}{s} \right]$$

$$= mg a \cos \theta - k \left( 1 - \frac{s_0}{s} \right) \cdot yb \cos \theta$$

$$= \left[ mga - k yb + \frac{k yb s_0}{\sqrt{b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta}} \right] \cos \theta$$

Q19) Avec  $s_0 = 0$ ,  $I = (mga - kxb) \cos \theta$ .

• d'équilibre est réalisé si  $I = 0$  donc  $g = \frac{kb}{a} y$  (ou  $\theta = \pm \pi/2$ , impossible ici)

• Une mesure de  $y$  donne directement  $g$ .

$$\text{Si } s_0 \neq 0 : I = mga \cos \theta - k \left(1 - \frac{s_0}{s}\right) yb \cos \theta$$

$\Rightarrow I = 0 \Leftrightarrow g = \frac{kb}{a} y \left(1 - \frac{s_0}{s}\right)$  la mesure dépendra de l'incertitude de  $s_0$  en supplément.  
 $\Rightarrow$  plus difficile à exécuter mais pas impossible.

Q20) d'angle  $\pi/2 + \theta$  devient  $(\pi/2 - \phi) + \theta = \frac{\pi}{2} + (\theta - \phi)$  d'où :

$$s = \left[ b^2 + y^2 + 2yb \sin(\theta - \phi) \right]^{1/2}$$

$$\text{Et } \epsilon_p' = \frac{1}{2} k \left[ b^2 + y^2 + 2yb \sin(\theta - \phi) \right] - mga \sin \theta$$

Q21) D'après les graphes si  $\phi \neq 0$ , la position d'équilibre passe d'instable à stable.

• des dérivées secondes autour de l'extremum sont plus importantes  
 $\Rightarrow$  position d'équilibre plus marquée

$$\text{Q22) Si } \phi = 0, I = mga \cos \theta - kxb \cos \theta$$

$$\rightarrow I' = mga \cos \theta - kxb \cos(\theta - \phi)$$

$$\Rightarrow I' = \left[ mga - kxb \cos \phi \right] \cos \theta - kxb \sin \theta \sin \phi$$

$$\text{Q23) TMC scalaire dans } \mathcal{R}_g \text{ appliqué à } m : \underline{J \ddot{\theta} = (mga - kxb) - kxb \phi \theta.}$$

$$\text{Q24) D'où } \ddot{\theta} + \frac{kxb \phi}{J} \theta = mga - kxb$$

$$\text{d'où } \omega_0^2 = \frac{kxb \phi}{J}$$



La position moyenne d'équilibre est t.q.  $\ddot{\theta}_0 = 0$

$$\Rightarrow \theta_0 = \frac{mga - kyb}{kyb\phi}$$

Q25)  $\theta_0 = 0$  si  $g = g_0 \Rightarrow mga = kyb$

$$\text{Or } \omega_0^2 = \frac{kyb\phi}{J} \Rightarrow \phi = \frac{J\omega_0^2}{kyb}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{J}{mga}$$

$$\text{or } J = ma^2$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{a}{g_0} = 10^{-4} \text{ rad}$$

Q26) Cette fois  $\theta'_0 = \frac{mga - mg_0a}{mga\phi}$

$$= \frac{g - g_0}{g_0\phi} \quad \text{d'où } \theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0\phi} \approx \frac{\Delta g}{g_0 \tan\phi} \quad \text{car } \phi \ll 1.$$

Q27) Avec  $\frac{\Delta g}{g_0} = 10^{-8}$  et  $\phi = 10^{-4} \text{ rad}$  alors  $\theta'_0 = 10^{-4} \text{ rad}$   
 $= 20'' \text{ d'arc}$

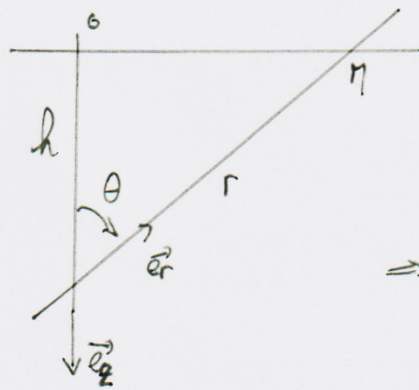
$\Rightarrow$  Cette valeur reste mesurable au moyen d'un dispositif de précision

Q28) On calcule le champ de gravitation avec les m<sup>^</sup> hypothèses qu'en Q2 :

$$\Rightarrow \vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{g}_B = -\frac{4G(\mu_m + \mu_p)R^3}{3r^2} \vec{e}_r$$

Q29)



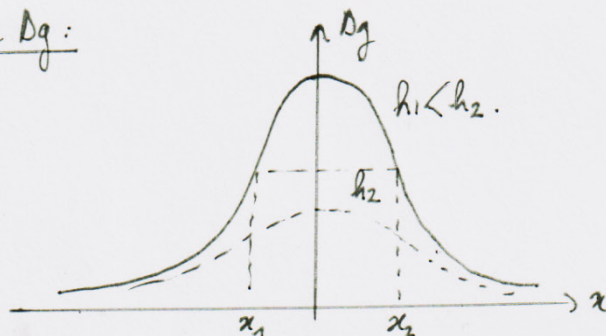
$$\text{Soit : } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = -\cos\theta \\ = -\frac{h}{r}$$

$$\Rightarrow g_{0z} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)R^3 h}{3r^3} \\ \text{ou } r = (h+x)^{1/2}$$

Q30) . Champ créé par une boule de  $\Delta\mu$  :  $g'_z = \frac{4G\Delta\mu R^3 h}{3r^3}$

. Anomalie gravimétrique :  $\Delta g = g_z - g_0 = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)R^3 h}{3r^3} - \frac{4G\mu_m R^3 h}{3r^3}$   
 $= g'_z$

Q31) Si :  $r = (h+x)^{1/2}$  alors  $\Delta g = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3 h}{3(h^2+x^2)^{3/2}}$

Q32) Allure de  $\Delta g$  :

.  $\Delta g_{\max} = \Delta g(0) = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}$

. Et  $\frac{\Delta g_{\max}}{2} = \Delta g(x_{1,2})$  ou  $(x_{1,2}^2 + h^2)^{3/2} = 2h^3 \Leftrightarrow x_{1,2}^2 = 2^{2/3}h^2 - h^2$   
 $\Leftrightarrow x_{1,2} = h(2^{2/3} - 1)^{1/2}$   
 $\Rightarrow \Delta x = 2h(2^{2/3} - 1)^{1/2}$

Q33) On a vu que  $\Delta x = kh$  où  $k = 2(2^{2/3} - 1)^{1/2}$  et  $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}$   
 $= 1,53.$

Q34) Sur la courbe proposée  $\left\{ \begin{array}{l} D_{01} = 120 \text{ m.} \Rightarrow h = 78 \text{ m} \\ \Delta g_{\text{max}} = 0,28 \text{ mgal} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2} \\ \Rightarrow R = \left( \frac{3h^2 \Delta g_{\text{max}}}{4\pi G \rho} \right)^{1/3} = \underline{\underline{39 \text{ m}}} < h \end{array} \right.$

Q35) Pour rendre indétectable de l'or il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Placer l'or au centre de la cavité.} \\ m_{\text{or}} = m_{\text{manquante de roche.}} \end{array} \right.$

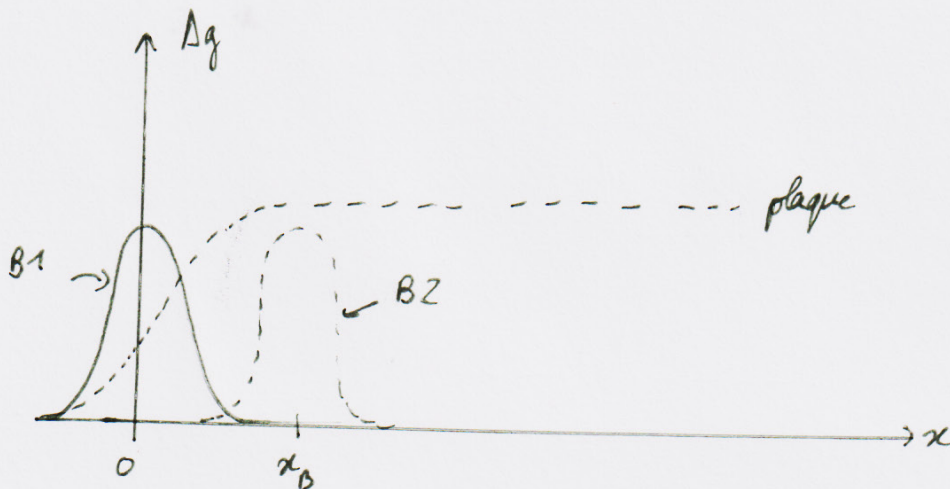
Q36) Calculons:  $\mu_{\text{roche}} = \frac{M_r}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

d'où  $m_{\text{manquant}} = \mu_{\text{roche}} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \underline{\underline{23,1 \text{ tonnes}}}$

ou  $\mu_{\text{roche}} \approx \mu_{\text{grès}} \Rightarrow \underline{\underline{m_{\text{or}} \approx 10 \text{ tonnes}}}$

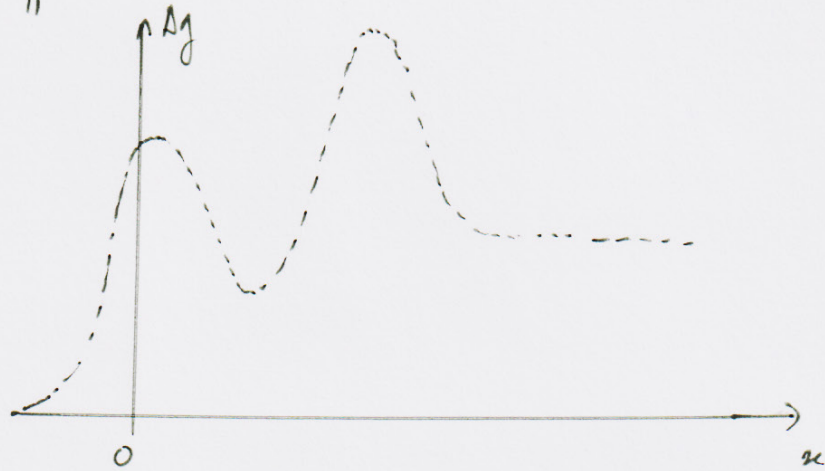
Q37) Il semblerait qu'il faille tenir compte de:

- 2 cavités sphériques.
- 1 plaque horizontale semi-infinie due au calcaire.





la superposition des effets donne :



Q38) Résultat connu :  $R = \frac{L}{A\sigma}$

Q39) On veut éviter l'accumulation de charges au niveau des électrodes

Q40) On suppose que le courant se répartit uniformément sur une demi-sphère

$$\Rightarrow \underline{\vec{j} = j(r)\vec{e}_r}$$

Or  $I = \iint_{S_{1/2}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \underline{\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r}$

Q41) Soit  $\begin{cases} \vec{E} = -\text{grad} V \\ \vec{E} = \vec{j}/\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \vec{e}_r \\ V = \frac{I}{2\pi\sigma r} + \text{cte} \end{cases}$

Q42) Pour 2 électrodes :  $V(P) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$  car les courants sont opposés.

d'équipotentielle  $V_0$  vérifie :  $\underline{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} = \frac{2\pi\sigma V_0}{I}}$

Q43)  $\begin{cases} \text{En M: } V_M = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right] \\ \text{En N: } V_N = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right] \end{cases}$  d'où  $\Delta V = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right]$   
 or  $\rho = \frac{2\pi\sigma \Delta V}{I\varphi}$  d'où  $\underline{\rho = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{BM}}$

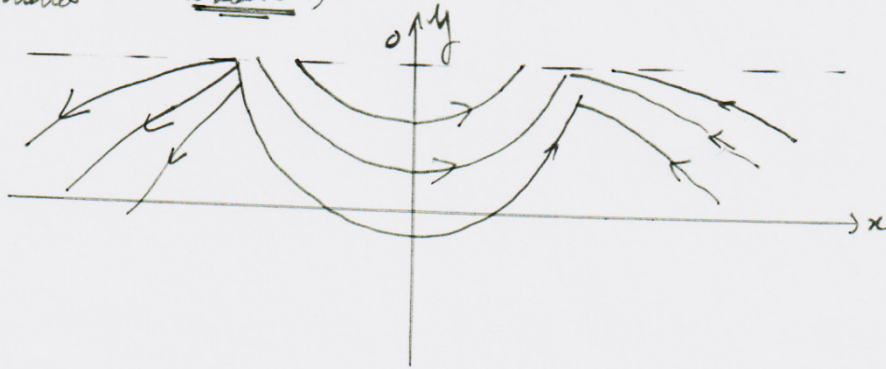
Q44) Dans le cas de Wenner :  $f = \frac{1}{l} + \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} - \frac{1}{2l} = \frac{1}{l} = f$

Q45) Ici :  $3l = 10\text{m}$  d'où  $f = 0,3\text{m}^{-1} \Rightarrow \Delta V = \frac{\rho I f}{2\pi} = 2,4\text{V}$

Or dans le cas de Wenner  $\begin{cases} \rho_a(M) = -e/2 \\ \rho_a(N) = +e/2 \end{cases}$  avec :  $\begin{cases} V(M) = 1,2\text{V} \\ V(N) = -1,2\text{V} \end{cases} \Rightarrow \Delta V = 2,4\text{V}$

Les résultats sont bien en accord car  $\Delta V_{\text{théo}} = \Delta V_{\text{exp}}$

Q46) Les lignes de courant sont identiques aux lignes de champ de  $\vec{E}$  donc  $\perp$  aux équipotentielles d'où l'allure :



Q47) Si  $AB \ll h$ , la présence de la couche profonde est peu sensible donc  $\rho_{\text{app}} \rightarrow \rho_1$ .  
Si  $AB \gg h$ , le courant traverse une distance plus importante dans le milieu 2 que le milieu 1 d'où  $\rho_{\text{app}} \rightarrow \rho_2$

Q48) Sur la figure 18 on lit :  $\rho_1 = 400\Omega \cdot \text{m}$  et  $\rho_2 = 40\Omega \cdot \text{m}$ .  $\Rightarrow \rho_2/\rho_1 = 0,1$ .

Sur l'abaque figure 19 on lit pour  $\rho_2/\rho_1 = 0,1$  la valeur correspondant à  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,2$  par exemple qui donne  $\frac{AB}{2h_1} \approx 3,5$

Sur la figure 18 :  $\rho_2 = 80\Omega \cdot \text{m}$  s'obtient pour  $\frac{AB}{2} = 15\text{m}$ .  $\rightarrow h_1 = \frac{15}{3,5}$   
D'où  $h_1 = 4,2\text{m}$