Physique : DS3

Sujet Mines-Ponts 2010 – Filière PC

(I) La lutte au sol

Q1) Particule fluide : élément de fluide, de nature mésoscopique noté $d\tau$

. Echelle typique : $1\ \mu m^3$.

. Intérêt : région de fluide où l'on peut moyenner le champ des vitesses.

Système fermé/ouvert : fermé $\Rightarrow$ pas d'échange de matière avec l'extérieur.

ouvert $\Rightarrow$ permet les —— " —— ", le système ouvert est délimité par une surface de contrôle.

Représentations : Euler $\Rightarrow$ associé généralement au Σouvert, car on étudie une zone précise de l'espace

Lagrange $\Rightarrow$ ———— " Σfermé, car on suit la particule au cours du temps.

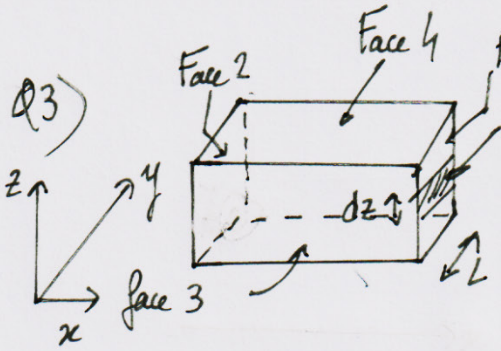
Bernoulli : Il faut que l'écoulement soit parfait, incompressible d'un fluide homogène. On peut rajouter les hypothèses stationnaire et irrotationnel suivant les situations

Q2) Par définition : $D_V = \frac{\delta V}{\delta t} \Rightarrow \delta V = D_V t.$

$\Rightarrow h_0 L^2 = D_V t.$

$\Rightarrow \boxed{h_0 = \frac{D_V t}{L^2}} = \frac{6{,}6.10^{-3} \times 89}{0{,}95^2} = \underline{65\,cm}$

Q3)



On s'intéresse aux 4 faces de la cuve et on suppose que ces 4 faces sont au contact de l'air

Ainsi $\vec{F_1} = \vec{F}_{eau \to face} + \vec{F}_{air \to face}$

$\Leftrightarrow \vec{F_1} = \int_0^{h_0} \left[p_0 + \rho g (h_0 - z)\right] dz\, L\, \vec{u_x} - \int_0^{h_0} p_0\, L\, dz\, \vec{u_x}$

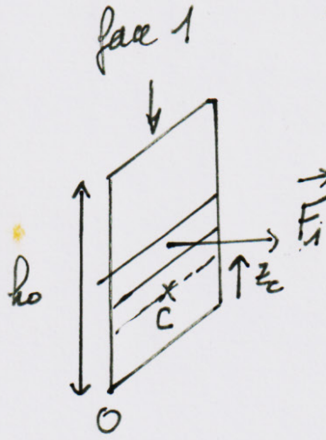
D'où $\vec{F_1} = \int_0^{h_0} \rho g (h_0 - z)\, dz\, L\, \vec{u_x} \rightarrow \boxed{\vec{F_1} = +\frac{1}{2} g\rho\, h_0^2\, L\, \vec{u_x}}$

les 4 forces sur chaque face ont même norme mais

$\boxed{\vec{F_1} = +F\vec{u_x}\,,\ \vec{F_2} = -F\vec{u_x}\,,\ \vec{F_3} = -F\vec{u_y}\,,\ \vec{F_4} = +F\vec{u_y}}$

Q4) Par identification :

$-z_C F = \int_0^{h_0} d\mathcal{M}_{Oz} \Leftrightarrow -z_C F = \int_0^{h_0} -\rho g z (h_0 - z)\, dz\, L.$



$\Leftrightarrow -z_c \frac{1}{2} \rho g h_0^2 L = L \rho g \left[\frac{h_0^3}{3} - \frac{h_0^3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow z_c \frac{h_0^2}{2} = \frac{1}{6} h_0^3$

$\Leftrightarrow \boxed{z_c = \frac{1}{3} h_0}$

Q5) • Relation de statique des fluides en RNG :

$$\overrightarrow{grad}\, p = \rho(\vec{g} - \vec{a_e})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho a. \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

D'où $p(x,z) = -\rho(ax + gz) + cst.$

• A la surface $p = p_0$ d'où $z = -\dfrac{a}{g}x + C$

• Or le point milieu doit garder une altitude constante t.q $z = h_0$ et $x = \dfrac{L}{2}$

$$\Rightarrow \frac{h_0}{2} = -\frac{a}{g}\frac{L}{2} + C \Rightarrow C = h_0 + \frac{aL}{2g}.$$

$$\Rightarrow \underline{z = \frac{a}{g}\left(\frac{L}{2} - x\right) + h_0}$$

• d'amplitude maximale est obtenue en $x = 0$ d'où :

$$z_{max} = \frac{aL}{2g} + h_0$$

d'ou la variation : $\boxed{\Delta z_{max} = \dfrac{aL}{2g}} = \underline{\underline{4{,}18\,cm}}$

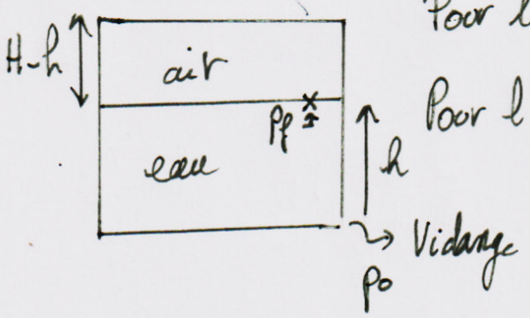
• Sur l'ensemble du réservoir $\vec{F}' = \underbrace{\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}}_{=\vec{0}} + \vec{P} + \vec{f_{ie}}.$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}' = \rho_0 h_0 L^2\left[\vec{g} + a\vec{u}_x\right]}$$ où $\vec{g} = -g\vec{u_z}.$

6) $\begin{cases} \text{A } T_0 = 288\text{K}, p = p_0 \\ \text{A } T_i = 313\text{K}, p = p_i \end{cases}$ d'où $\boxed{p_i = \dfrac{p_0}{T_0} T_i}$ car n et V constants

$$\Rightarrow \underline{\underline{p_i = 1{,}1 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}$$

Quand le réservoir se vide, l'air subit une détente isotherme. On considère la pression uniforme dans ce même volume



Pour l'eau : $p_f - p_0 = -\rho g h$.

Pour l'air : $\begin{cases} p_f = \dfrac{nRT_f}{V_f} = \dfrac{cste}{H-h} \\ p_i = \dfrac{nRT_i}{V_i} = \dfrac{cste}{H-h_0} \end{cases}$

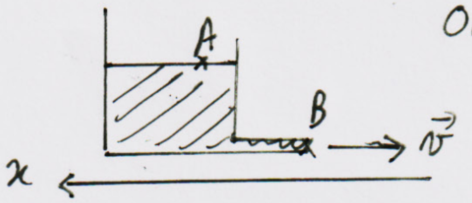
D'où $p_i \cdot \dfrac{H-h_0}{H-h} - p_0 = -\rho g h \Leftrightarrow \boxed{p_i(H-h_0) + p_0(H-h) = -\rho g h (H-h)}$

On reconnaît une équation polynomiale d'ordre 2 qui admet pour solution acceptable : $\underline{\underline{h = 64 \text{ cm}}}$

$$\Rightarrow \underline{V_{vidangé} = (h_0 - h)L^2} = \underline{\underline{7{,}2 L}}$$

Et $\underline{\underline{p_f = p_0 - \rho g h}} = \underline{0{,}95 \text{ bar}}$ Il y a une dépression qui peut-être gênante pour enlever le bouchon.

7) Le fluide est incompressible $\Rightarrow D_v = cste$ d'où $v s = cste$.



Or $s = cste \Rightarrow \boxed{v = cste}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(x,t) = -v\, \vec{e_x}}$$

8) D'après Euler : $\displaystyle\int_A^B \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\wedge \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}_{=\vec{0}}\right]\cdot \vec{dl} = \int_A^B \left(-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,p}{\rho} + \vec{g}\right)\cdot\vec{dl}$

que l'on intègre sur une ligne de courant entre la surface et l'orifice

$$\Rightarrow l\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = 0 + gh_0 \quad \text{car} \begin{cases} p_A = p_B \\ v_A = 0 \\ v_B = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{l\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = k^2 \text{ où } k = \sqrt{gh_0}}$$

9) Si $v = cste \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2}\,k = \sqrt{2gh_0}}$

On pose $\begin{cases} u = v + v_0 \\ w = \dfrac{1}{v+v_0} \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{dw}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dt}$

$$= -\frac{1}{(v+v_0)^2}\frac{dv}{dt}$$

Or $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_0^2 - v^2}{2l}$ $\Rightarrow \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{v^2 - v_0^2}{(v+v_0)^2}\dfrac{1}{2l}$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{v - v_0}{v+v_0}\frac{1}{2l}$$

$$= \frac{v+v_0 - 2v_0}{v+v_0}\frac{1}{2l}$$

$$\Rightarrow 2l\frac{dw}{dt} = 1 - \frac{2v_0}{u}.$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{2v_0 w - 1} = -\frac{dt}{2l}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln[2wv_0 - 1]}{2v_0} = -\frac{t}{2l} + C$$

on note C la constante d'intégration. $C = \ln A$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{2Wv_0-1}{A}\right] = -t\frac{v_0}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow 2Wv_0 - 1 = Ae^{-tv_0/\ell}$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{1}{2v_0}\left(1 + Ae^{-tv_0/\ell}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v+v_0} = \frac{1}{2v_0}\left(1 + Ae^{-tv_0/\ell}\right)$$

$$\Leftrightarrow v+v_0 = \frac{2v_0}{1+Ae^{-tv_0/\ell}}$$ or à $t=0, v=0$ d'où $\underline{\underline{A=1}}$

$$\Leftrightarrow v = 2v_0\left[\frac{1-\frac{1}{2}\left(1+e^{-tv_0/\ell}\right)}{1+e^{-tv_0/\ell}}\right]$$

$$\Leftrightarrow v = 2v_0\,\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-tv_0/\ell}}{1+e^{-tv_0/\ell}}$$

$$\Leftrightarrow v = v_0\,\frac{1-e^{-tv_0/\ell}}{1+e^{-tv_0/\ell}}$$

On pose $\tau = \dfrac{\ell}{\sqrt{2k}} = \dfrac{\ell}{v_0}$ $\Rightarrow \boxed{v = v_0\,\dfrac{1-e^{-t/\tau}}{1+e^{+t/\tau}}}$

10) A.N : . $\tau = \frac{\ell}{v_0} = \underline{0{,}22\,s}$

. On veut $\left|\frac{v(t_0) - v_0}{v_0}\right| = 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{1 - e^{-t_0/\tau}}{1 + e^{-t_0/\tau}} - 1 = -\frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow -2e^{-t_0/\tau} = -\frac{1}{100}\left(1 + e^{-t_0/\tau}\right)$

$\Leftrightarrow -200\,e^{-t_0/\tau} = -1 - e^{-t_0/\tau}$

$\Leftrightarrow 199\,e^{-t_0/\tau} = 1$

$\Leftrightarrow t_0 = \tau \ln 199 = \underline{\underline{1{,}19\,s}}$

11) On suppose que la durée de vidange est très grande devant t_0 donc on considère $v \simeq v_0$ durant toute la vidange.

$\Rightarrow v_0 s\, t_v = h_0 L^2 \Leftrightarrow t_v = \frac{h_0 L^2}{v_0 s}$

$\Leftrightarrow t_v = \frac{h_0 L^2 \times 4}{v_0 \pi \delta^2} = \underline{\underline{523\,s}}$

Rque : On vérifie que $t_v \gg t_0$.

12) On effectue un bilan d'énergie mécanique en régime stationnaire

$$D_m \left[\frac{v^2}{2} + gz\right]_e^s = P_{ext \to \Sigma g} + P_{int \to \Sigma g} + \underset{\substack{\uparrow \\ P_{motopompe}}}{\mathcal{P}}$$

. On suppose l'écoulement parfait incompressible : $P_{int \to \Sigma g} = 0$

. Et $P_{ext \to \Sigma g} = P_1 + P_2 = F_1 v_1 - F_2 v_2 = p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2$

$= p_1 \frac{d\tau_1}{dt} - p_2 \frac{d\tau_2}{dt} = p_1 D_{v1} - p_2 D_{v2} = p_e D_{ve} - p_s D_{vs}$

D'où $\rho D_v \left[\frac{v^2}{2} + gz\right]_e^s = p_e D_{ve} - p_s D_{vs} + \mathcal{P}$

$$\Leftrightarrow \boxed{P = \rho D_v \left[\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho} \right]}$$

13) Système : {pompe + lance} d'où : $\begin{cases} p_s = p_0 \\ p_e = p_0 + \rho g h_0 \\ v_s = 4D_v / \pi d_2^2 \\ v_e = 4D_v / \pi d_1^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{P = \rho D_v \left[D_v^2 \times 8 \left[\left(\frac{1}{\pi d_2^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\pi d_1^2}\right)^2 \right] + gZ + gh_0 \right]}$$

Equation du 3ème degré que l'on résout numériquement.

$$\underline{D_{v\,max} = 3{,}0\,L\,s^{-1}}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \frac{4 D_{v\,max}}{\pi d_2^2} = \underline{\underline{19{,}6\,m\,s^{-1}}}$$

14) Calculons la force $\vec{F}_e$ exercée par l'eau sur l'embout conique de la lance :

$$-\vec{F_e} + \vec{F}_{pression} = D_m(\vec{v_s} - \vec{v_e})$$

Or $\vec{F}_{pression} = \left[p_e \frac{\pi d_1^2}{4} - p_0 \frac{\pi d_2^2}{4} \right] \vec{u}_x$ où $p_e = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_s^2 - v_e^2)$ car conduite horizontale.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_e} = -D_m(\vec{v_s} - \vec{v_e}) + \left[\frac{p_0 \pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) + \frac{\rho}{2}(v_s^2 - v_e^2) \right] \vec{u}_x}$$

<u>A.N</u> : $\begin{cases} D_v = 3{,}0\,L\,s^{-1} \\ v_s = 19{,}6\,m\,s^{-1} \\ v_e = v_s \cdot S_s/S_e = 3{,}75\,m\,s^{-1} \end{cases}$ $\Rightarrow \underline{F_e = 167\,N}$

15) Il s'agit d'un tir parabolique t.q : $\vec{a} = \vec{g}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}' = -g \\ \ddot{x}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}' = -gt + v_S \sin\alpha \\ \dot{x}' = v_S \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' = -\frac{1}{2}gt^2 + v_S \sin\alpha\, t + z_0' \\ x' = v_S \cos\alpha\, t + \underbrace{x_0'}_{=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z' = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x'}{v_S\cos\alpha}\right)^2 + \cancel{v_S}.\sin\alpha.\frac{x'}{\cancel{v_S}\cos\alpha} + z_0'$$

$$\Rightarrow z' = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x'}{v_S\cos\alpha}\right)^2 + x'\tan\alpha + z_0'$$

or $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \Rightarrow \boxed{z' = -\frac{1}{2}g\frac{x'^2}{v_S^2}(1+\tan^2\alpha) + x'\tan\alpha + z_0'}$

16) La portée est obtenue pour $z' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}g\frac{(1+\tan^2\alpha)}{v_S^2}x'^2 + x'\tan\alpha + z_0' = 0$ (1)

La portée est maximale soi $\frac{dz'}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}g/v_S^2\, x'^2\, 2\tan\alpha\, d(\tan\alpha) + x'd(\tan\alpha) = 0$ (2)

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\cancel{2}}g/v_S^2\, x'^2\, \cancel{2}\tan\alpha + x' = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{v_S^2}{g x'_{max}}}$$

D'où (1) : $-\frac{1}{2}g\left[1 + v_S^4/g^2x'^2_{max}\right]/v_S^2 \times x'^2_{max} + x'_{max}\frac{v_S^2}{g x'_{max}} + z_0' = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{x'^2_{max}}{2}g/v_S^2 - \frac{1}{2}g\frac{v_S^2}{g^2} + \frac{v_S^2}{g} + z_0' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}g\frac{x'^2_{max}}{v_S^2} + z_0' + \frac{v_S^2}{2g} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x'_{max} = \sqrt{\frac{2v_S^2}{g}\left(z_0' + \frac{v_S^2}{2g}\right)}} = \underline{\underline{40 m}}$$

17) . Pour remplir les 2 soutes il faut vérifier en supposant $D_V = cste$.

$$V s_a t_R = V_{soute} \quad \text{(récope par soute)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_R = \frac{V_{soute}}{V s_a}} = \underline{24\,s}$$

. D'où $\boxed{d_R = V t_R} = \underline{800\,m}$

18) . On suppose l'écoulement permanent, incompressible, homogène et parfait, ainsi on peut appliquer Bernoulli entre l'entrée et la sortie de l'auget.

$$\frac{P_e}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \times 0 = \frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g z_a \quad \text{où} \begin{cases} P_e = P_s = P_0 \\ g z_a \text{ négligé} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_s = V}$$

. Or $D_V = cste$ car incompressible $\Rightarrow \boxed{s_{auget} = cste}$

. Bilan de qté de mouvement : $\underbrace{\vec{F}'}_{\text{auget} \to \text{fluide}} = D_m (\vec{V_s} - \vec{V_e})$.

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{F_a}}_{\text{fluide} \to \text{auget}} = -D\left[\vec{V} - (-\vec{V})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_a} = -2 D_m V \vec{u_x} = -2\rho s_a V^2 \vec{u_x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|F_a| = 17\,kN}$$

Calcul de la puissance : $P_a = \vec{F_a} \cdot \vec{V} = -F_a V$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_a = -2\rho s_a V^3} = \underline{-570\,kW}$$

Le pilote devra compenser cette puissance résistive par une puissance motrice conséquente

19) les coefficients C_x et C_z sont sans dimension.

20) La force $\vec{F}$ est une force lié à la différence de pression entre intrados et extrados.

21) Si $P_{moteur} \nearrow$ alors, $v_{aile/fluide} \nearrow$ et la différence de pression est accentuée $\Rightarrow$ $\boxed{F \text{ augmente}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{l'avion monte}}$

22) Soit $pV = nR_{gp}T$

$= \frac{m}{M} R_{gp} T \Leftrightarrow P = \frac{m}{V} \frac{R_{gp} T}{M}$

d'où $\boxed{\rho_0 = \frac{P_0 M_a}{R_{gp} T_0}} = \underline{\underline{1{,}22 \, kg.m^{-3}}}$

23) On se place à l'équilibre : $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$ pour une aile :

Sur Oz : $C_z \frac{1}{2} \rho_0 S_a V_\infty^2 = \frac{m}{2} g$ car vol horizontal

on suppose le poids réparti sur chaque aile.

$\Rightarrow C_z = \frac{mg}{\rho_0 S_a V_\infty^2}$

or $P_{max} = \frac{1}{2} C_x \rho_0 S_a V_\infty^3 \Rightarrow C_x = \frac{2 P_{max}}{\rho_0 S_a V_\infty^3}$

Donc $\boxed{f = \frac{C_z}{C_x} = \frac{m g V_\infty}{2 P_{max}}} = \frac{19848 \times 9{,}8 \times 365/3{,}6}{2 \times 1{,}78 \cdot 10^6}$ ← 1 aile = 1 moteur.

$\Leftrightarrow \underline{\underline{f = 5{,}5}}$

24) Pour une transformation isentropique $pV^{\gamma} = cste$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{\rho^{\gamma}} = cste$$

d'où $\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$

Or $V_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \sim \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$

$$\Rightarrow \boxed{V_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}}$$

25) • Prenons pour L la longueur de l'aile t.q. $L = \frac{S}{H} = \frac{100{,}5}{28{,}63}$

$= 3{,}5 m$

D'où $N_R = \frac{VL}{\nu} = 2{,}3.10^7$

or N_R (énoncé) $= 1{,}5.10^7 \Rightarrow \underline{V_{croisière} = 240 km/h}$

• Pour $N_m = 0{,}155 \Rightarrow V = 53 ms^{-1} = 190 km/h$.

$$\Rightarrow L = \frac{\nu N_R}{V} = \underline{4{,}4 m}$$

Cette longueur plus longue que la longueur choisie prouve que l'aile ne se résume pas à sa corde mais à <u>la présence d'un extrado et d'un intrado</u> $\Rightarrow L = \frac{l_{intra} + l_{extra}}{2} = 4.4 m$

La finesse maximale est obtenue par la pente maximale de la droite tangente à la courbe et passant par l'origine.

$\Rightarrow C_z = f_{max} \cdot C_x$

$\rightarrow f_{max} = \dfrac{1{,}2}{0{,}007} \simeq \underline{\underline{170}}$

À la question 23 on a vu que $f = \dfrac{mg V_\infty}{2 P_{max}}$ en vol horizontal. Plus f est élevée, plus la puissance nécessaire au vol horizontal sera faible pour une masse m donnée.

26). La durée d'un aller-retour est $\Delta t = \dfrac{1500}{120/3{,}6} + \dfrac{2 \times 11000}{320/3{,}6} + 90$

$= 383\,s.$

D'où en 1h, le bombardier peut faire $N = \dfrac{\Delta t_{tot}}{\Delta t} = \dfrac{3600}{473} = \underline{\underline{9{,}4}}$

$\Rightarrow$ $\underline{N = 9{,}4 \text{ aller/retour}}$

- Si on compte 9,4 aller/retour alors $M = 9{,}4 \times \underbrace{6137}_{V_{soutes}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{M = 58 \cdot 10^3\ kg}}$ (si 9 : $M = 55 \cdot 10^3\ kg$)

27) Un avion volant trop haut risque de manquer la cible. Il ne peut voler trop bas pour des raisons de sécurité évidente. L'intervalle 30-50 m est le meilleur compromis.