

# Physique : DS2

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## Partie I – La température du mouton

**« S'il vous plait... dessine-moi un mouton ! »**



Le sujet s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11<sup>e</sup> et le 9<sup>e</sup> siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.

On appelle bélier le mâle adulte, brebis la femelle adulte, agneau le jeune mâle et agnelle la jeune femelle.

Comme tous les ruminants, leur système digestif complexe leur permet de transformer la cellulose de leur alimentation en acides gras volatils et en glucides simples. À la belle saison, ils se nourrissent dans les pâturages d'herbe broutée au ras du sol et on leur donne du foin en hiver.

Jusqu'à nos jours, le mouton est utilisé pour ses produits laitiers, sa viande, sa laine et son cuir, de façon artisanale ou semi-industrielle. Sa viande et son lait ont été les premières sources de protéines consommées par l'homme dans le passage de la chasse-cueillette à l'agriculture.

**La partie I étudie comment l'animal maintient sa température et son comportement social.**

### Données

- L'opérateur gradient d'une fonction  $A(M,t)$  en situation unidimensionnelle vaut en coordonnées cartésiennes  $\overrightarrow{\text{grad}}(A(z,t)) = \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} \vec{e}_z$  et en coordonnées sphériques  $\overrightarrow{\text{grad}}(A(r,t)) = \frac{\partial A(r,t)}{\partial r} \vec{e}_r$ .
- En coordonnées cartésiennes, l'opérateur divergence en situation unidimensionnelle vaut  $\text{div}(\overrightarrow{A(z)}) = \frac{dA(z)}{dz}$ .

.../...

**Document** (*vigiferm.org*, pour le bien-être de l’animal et de l’éleveur, consulté en 2018)

### Exposition à de basses températures

Les moutons sont naturellement adaptés pour supporter de très basses températures mais leur résistance au froid dépend de plusieurs facteurs : la race, l’âge, l’état du pelage...

Un mouton qui a une épaisse toison et qui est protégé de l’humidité pourra supporter des températures qui descendent en dessous de  $-15\text{ °C}$ , un mouton tondu doit être protégé du froid. [...] Lorsque le temps est humide, que les températures sont basses et qu’il y a du vent, la situation est critique pour les moutons. Le plus important est qu’ils ne soient pas mouillés jusqu’à la peau. La laine de certaines races, lorsqu’elle est épaisse, peut repousser l’humidité plusieurs jours. C’est le cas des races de montagne mais pour d’autres, à la laine très fine, le pelage est moins protecteur.

Les moutons qui ont froid se serrent les uns contre les autres.

Les agneaux nouveau-nés sont très sensibles aux basses températures, au vent et à l’humidité. Leur fine couche de laine et de graisse ne les protège que très peu. Les brebis prêtes à mettre bas doivent être isolées en bergerie et y rester au moins deux semaines après la naissance. Le taux de mortalité des agneaux qui viennent de naître atteint plus de 25 % dans certains élevages. Ils succombent le plus souvent dans les heures qui suivent leur naissance par hypothermie plutôt que par maladie.

### Exposition à de hautes températures

Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d’un coup de chaleur. Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondu, car la laine empêche la sueur de s’évaporer. C’est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

Cas de la brebis non tondu	Confort sans adaptation ou adaptation facile	Adaptation difficile	Adaptation très difficile	Inadaptation pouvant entraîner la mort
Température extérieure	de $-8\text{ °C}$ à $25\text{ °C}$	de $-15\text{ °C}$ à $-8\text{ °C}$ et de $25\text{ °C}$ à $35\text{ °C}$	de $-30\text{ °C}$ à $-15\text{ °C}$ et de $35\text{ °C}$ à $40\text{ °C}$	en dessous de $-30\text{ °C}$ et au-dessus de $40\text{ °C}$

La température d’un mouton en bonne santé se situe entre  $38,5$  et  $39,5\text{ °C}$ .

Sa longueur moyenne va de  $1\text{ m}$  à  $1,50\text{ m}$ .

La tonte a lieu 1 à 2 fois par an produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintient sa température de consigne  $\theta_{\text{eq}} = 39\text{ °C}$  et mieux comprendre les éléments du **document ci-dessus**.

## I.1 - Propriétés de la toison de laine

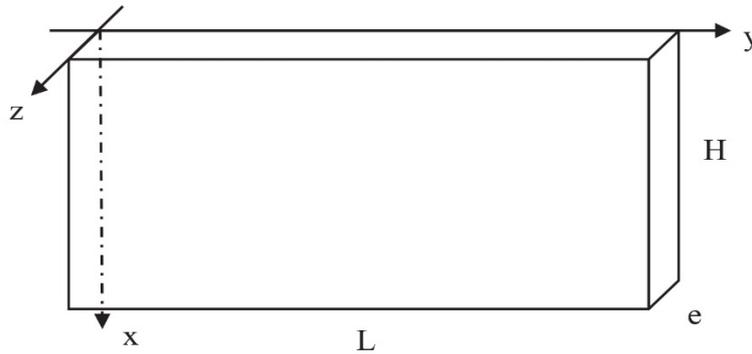
La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s’enflamme à  $600\text{ °C}$ ), isolant phonique, absorbeur d’humidité, facile à teindre et 100 % biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d’une vingtaine d’acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l’eau qui font que la fibre s’enroule en frisures. Ces dernières enferment une grande quantité d’air, ce qui limite la conduction. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur d’eau mais hydrophobe pour l’eau liquide. L’adsorption d’eau (désorption d’eau) s’accompagne d’une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de  $20\text{ }\mu\text{m}$  pour les moutons Mérinos à  $40\text{ }\mu\text{m}$  pour les races écossaises.

Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique  $\lambda_{\text{laine}}$  supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique  $c_{\text{laine}}$ . On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique  $\lambda_{\text{laine}} = 0,040\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

**Q1.** La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température :  $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$ .

Quelle est la dimension de la conductivité thermique  $\lambda$  ?

On considère un parallélépipède, de longueur  $L$ , de hauteur  $H$  et d'épaisseur  $e$  petite ( $e \ll \min(L, H)$ ), constitué d'un matériau homogène de conductivité  $\lambda$ , de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$  (**figure 1**). Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépend que de la variable  $z$  et du temps  $t$ .



**Figure 1** - Géométrie du conducteur thermique

**Q2.** Sur quelle direction est le vecteur densité  $\vec{j}_Q$  de courant thermique ? De quelles variables dépend-il ?

Les températures, sauf avis contraire, sont en  $^{\circ}\text{C}$ .

**Q3.** Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre  $z$  et  $z + dz$  et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la température  $T(z,t)$ .

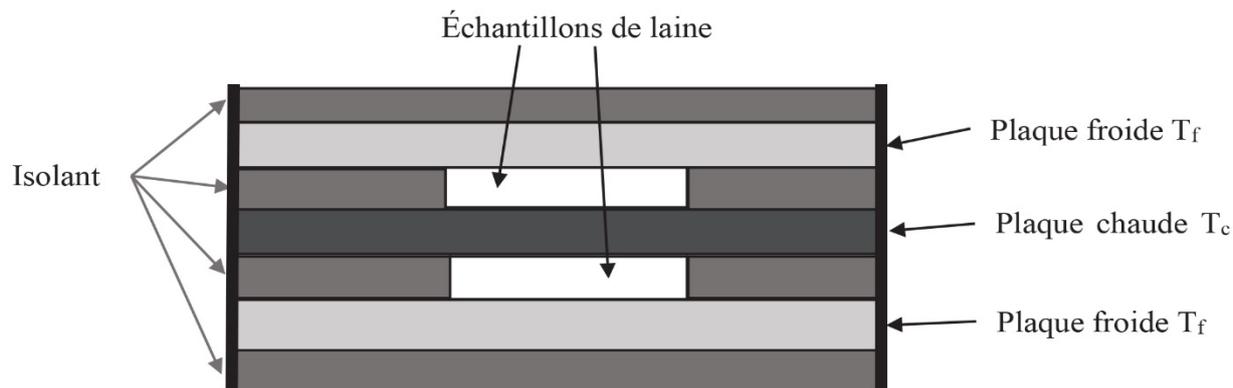
**Q4.** Que devient-elle en régime stationnaire ? Le vecteur  $\vec{j}_Q$  dépend-il de  $z$  ?

**Q5.** On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température  $T_{\text{entrée}}$  en  $z = 0$  et  $T_{\text{sortie}}$  en  $z = e$ . Que vaut la puissance thermique  $\varphi$  qui traverse le matériau en fonction de  $e$ ,  $\lambda$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $T_{\text{entrée}}$  et  $T_{\text{sortie}}$  ?

**Q6.** Définir puis exprimer la résistance thermique du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (**figure 2**, page 6). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique  $\varphi$ , engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures  $T_c$ ,  $T_f$  des plaques chaude et froides sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

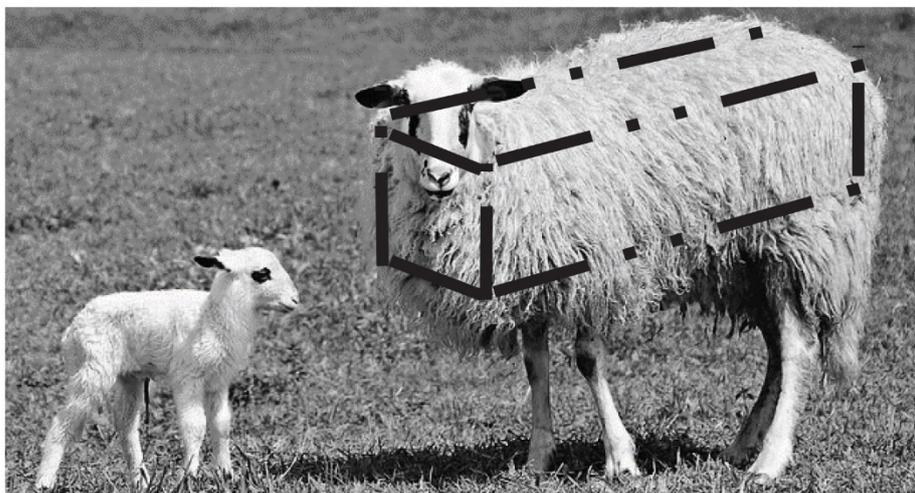
**Q7.** Exprimer l'expression de la conductivité  $\lambda_{\text{laine}}$  de l'échantillon en fonction de  $\varphi$ ,  $e$ ,  $S$ ,  $T_c$  et  $T_f$ .

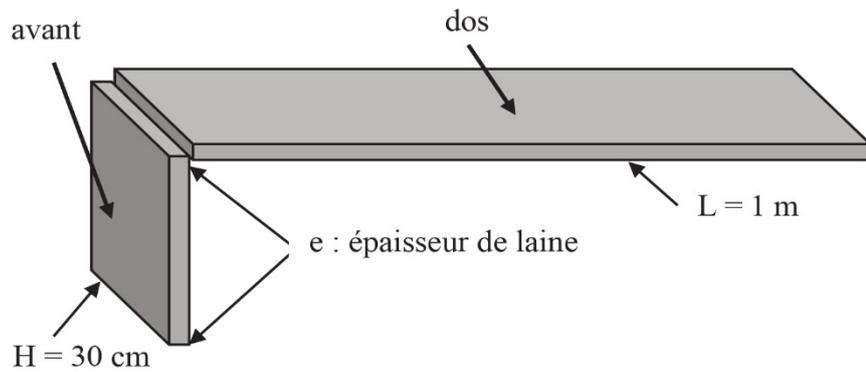


### I.2 - Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme  $\theta_{\text{eq}} = 39\text{ }^{\circ}\text{C}$ , de longueur  $L = 100\text{ cm}$  et de section carrée de côté  $H = 30\text{ cm}$ . Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de  $e = e_M = 10\text{ cm}$  de laine avant la tonte à  $e = e_m = 0,5\text{ cm}$  après la tonte. La situation est représentée en **figure 3** et en **figure 4** (page 7).

**Q8.** Exprimer la résistance  $R_{\text{diff}}$  de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de  $L$ ,  $H$ ,  $e$  et  $\lambda_{\text{laine}}$ . Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.





**Figure 4** - Modélisation de la toison  
Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

**Q9.** La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\vec{J}_Q = -h \cdot (T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \vec{n}$$

avec  $T_{\text{ext}}$  la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température  $T_{\text{air}}$  et le vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  orienté de la brebis vers l'extérieur.

On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à  $h = 4,0 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ .

En déduire en fonction de  $h$ ,  $L$  et  $H$  la résistance de conducto-convection  $R_{\text{cc}}$  à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire  $R_r$ . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance  $P_r$  due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$$

avec  $A$  l'aire de la surface extérieure de la brebis,  $T_{\text{ext}}$  la température de cette surface en contact avec l'air de température  $T_{\text{air}}$ . La constante  $K$  a pour valeur  $K = 5,0 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ .

**Q10.** Exprimer la résistance thermique de rayonnement  $R_r$  en fonction de  $K$ ,  $L$  et  $H$ .

**Q11.** Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis  $T_{\text{int}} = \theta_{\text{eq}} = 39 \text{ °C}$  et la température de l'air  $T_{\text{air}}$ . Évaluer numériquement les deux valeurs  $R_1$  et  $R_2$  des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à  $T_0 = 5 \text{ °C}$ . En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation.

La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires en toute situation :

$$\dot{m} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue :

$$\dot{m}' = 2\dot{m}$$

et que la température extérieure est supérieure à  $5,1 \text{ °C}$ .

L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut  $\Delta H^0_{\text{vap}} = 2\,500 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

**Q12.** En déduire la puissance  $p_{m0}$  apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de  $\dot{m}$ ,  $L$ ,  $R_1$ ,  $T_{\text{int}}$  et  $T_{\text{air}}$ , puis on en fera l'évaluation numérique pour  $T_{\text{air}} = T_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q13.** Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort  $T_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### I.3 - Déséquilibre thermique d'une brebis (situations de stress et de danger)

La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique) et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse).

Dans une situation où l'air environnemental est en dehors de la zone de confort, la brebis va se réchauffer ou se refroidir et éventuellement transpirer. On négligera la capacité thermique de la toison devant celle du corps de la brebis. On assimile la brebis à un volume d'eau de masse volumique  $\mu = 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et de capacité thermique massique  $c = 4\,200 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ . On admet que les variations de température sont suffisamment lentes pour utiliser les notions de résistances. On note  $p_m$  la puissance apportée par le métabolisme.

**Q14. a)** En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la brebis non tondue dans une situation (1) où la température  $T_{\text{air}}$  de l'environnement est différente de  $T_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ , montrer que l'équation différentielle relative à la température  $T(t)$  de la brebis s'écrit :

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1} (T(t) - T_{\text{air}}) = \frac{(T_1 - T_{\text{air}})}{\tau_1}.$$

On exprimera  $\tau_1$  en fonction de  $\mu$ ,  $c$ ,  $L$ ,  $H$ ,  $R_1$  et  $(T_1 - T_{\text{air}})$  en fonction de  $\theta_{\text{eq}}$ ,  $T_0$ ,  $R_1$  et  $(p_m - p_{m0})$ .

**b)** Exprimer la température  $T(t)$  en fonction de  $t$ ,  $T_1$ ,  $\tau_1$  et  $\theta_{\text{eq}}$  en supposant que la température initiale de la brebis est  $T(t=0) = \theta_{\text{eq}}$ .

**c)** Calculer  $\tau_1$ . Calculer  $T_1$  en  $^\circ\text{C}$  pour  $p_m = p_{m0}$  avec une température d'environnement égale à  $T_{\text{air}} = 17 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q15.** D'après les données du **document** (pages 2 et 3), la brebis non tondue reste dans sa zone d'adaptation pour une température extérieure variant de  $-8 \text{ }^\circ\text{C}$  à  $+15 \text{ }^\circ\text{C}$ . En déduire entre quelles limites peut varier la puissance apportée par le métabolisme de l'animal dans cette situation (1) sans qu'il y ait danger pour lui. On suppose donc que la brebis reste à sa température d'équilibre  $\theta_{\text{eq}} = 39 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q16.** En appliquant le premier principe à la brebis tondue dans une situation (2) où la température  $T_{\text{air}}$  de l'environnement est supérieure à  $T_0 = 278 \text{ K} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ , montrer que l'équation différentielle relative à la température  $T(t)$  de la brebis peut se mettre sous la forme

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2} (T(t) - T_{\text{air}}) = \frac{(T_2 - T_{\text{air}})}{\tau_2}$$

dans laquelle les notations  $T_2$  et  $\tau_2$  sont des constantes à déterminer.

Exprimer  $\tau_2/\tau_1$ . Commenter.

En supposant que la possibilité de variation de la puissance métabolique soit celle obtenue à la question **Q15**, jusqu'à quelle température extérieure la brebis tondue peut-elle s'adapter à la chaleur ?

## Partie II – Tunnel du Fréjus

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les nombres complexes sont soulignés. La notation  $\bar{z}$  désigne le nombre complexe conjugué de  $z$ . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple  $\vec{j}$  pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple  $\hat{e}_z$  tel que  $\|\hat{e}_z\| = 1$ . Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

### I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

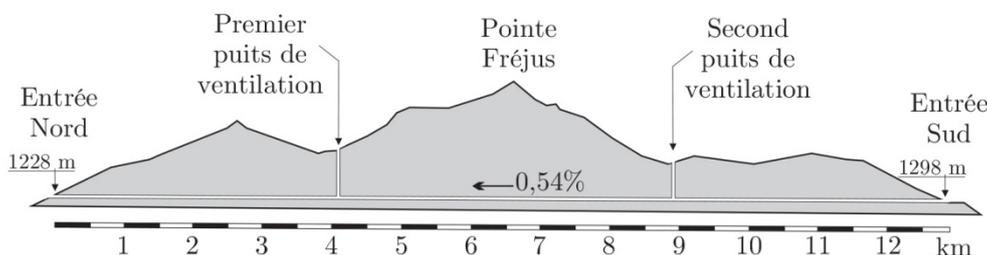


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ  $30^\circ\text{C}$ . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

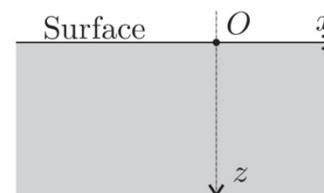


FIGURE 2 – Sol

#### I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique  $\kappa$ , de masse volumique  $\rho_s$  et de capacité thermique massique  $c_s$ . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure  $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$  avec  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ . (Voir figure 2).

❑ 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en  $z = 0$ . Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour  $T_0$  pour les évolutions annuelles de température.

❑ 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire  $dS$  pendant  $dt$ , est noté  $d\phi_Q$ . Rappeler la définition du vecteur  $\vec{j}_Q$ , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

❑ 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique  $\kappa$ .

❑ 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre  $z$  et  $z + dz$  de surface  $S$ . Quelle est l'énergie thermique  $\delta Q$  reçue par cette tranche entre  $t$  et  $t + dt$  ?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne  $dU$  en fonction de  $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$  et  $\mathcal{S}$  puis en fonction de  $\rho_s, c_s, \mathcal{S}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension  $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$  dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient  $D$  de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme  $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$  vérifiant la condition aux limites  $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ .

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de  $\underline{k}$  qu'on mettra sous la forme  $\underline{k} = k' + ik''$  avec  $k' > 0$ . Quelle est la signification physique de  $k'$  et  $k''$ . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle  $T(z,t)$ .

❑ 9 — Calculer la profondeur  $z_e$  à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de  $\theta_0$  de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne  $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\kappa = 3,00 \text{ SI}$ .

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur  $z_e$  ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

## I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de  $30^\circ \text{ C}$  relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est  $L_c = 45,0 \text{ km}$ . Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$  avec  $H = 10,0 \text{ km}$ . On prendra  $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ . La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface  $\mathcal{I}_{c/m}$  entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant  $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$  avec  $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ .

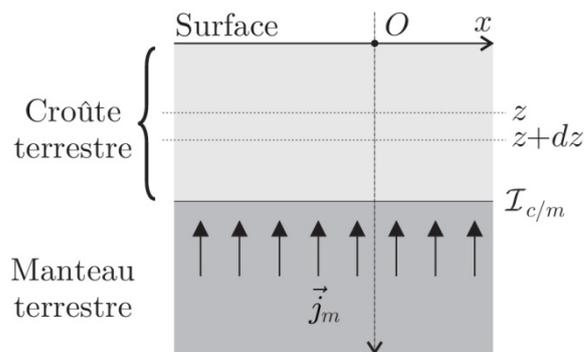


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface  $\mathcal{S}$ , comprise entre  $z$  et  $z + dz$ .

❑ 12 — En déduire la température  $T(z)$  en fonction de :  $H, L_c, \mathcal{P}, j_m, \kappa$  et  $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$  la température moyenne de surface en  $z = 0$ .

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total  $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$  au niveau de la surface en  $z = 0$ .

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à  $z$  et simplifier l'expression de  $T(z)$ . Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ( $z = 1,70 \text{ km}$ ) puis  $j_S$ .

## I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane  $z = 0$  possède une dépendance spatiale en  $x$  que l'on modélise par la relation  $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra  $\lambda = 10,0$  km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par  $T(x, z)$  en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution  $T(x, z)$  qui respecte la condition aux limites  $T(x, z = 0)$  et qui demeure finie lorsque  $z \rightarrow +\infty$ . Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation  $z = 0$ , en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer  $T(x, z)$  en considérant les sources internes d'énergie thermique.

□ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation  $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . La température de la surface  $T_s = T(x, z = h)$  sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par  $T_s = \theta_0 + \beta z$ . En effectuant un développement limité en  $z$  à l'ordre 1, exprimer la température  $T(x, z = 0)$  en fonction de  $h$ ,  $T(x, z = h)$  et  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ .

Déterminer  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$  en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface  $j_S$ . En déduire que que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $\delta$  en fonction des données du problème.