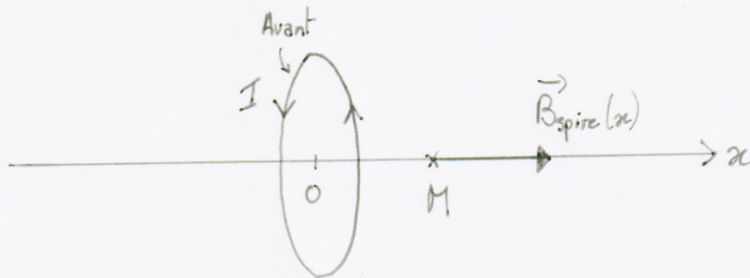


Physique : DM8

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

L'effet dynamo (Centrale 2016 – PC)

I.A



- Tout plan contenant OM est plan d'antisymétrie, donc $\vec{B}_{\text{spire}}(x)$ appartient à (Ox) .
- D'après la règle du tire-bouchon, le champ $\vec{B}$ est orienté suivant $+\vec{u}_x$ d'où :

$$\vec{B}_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \vec{u}_x \quad (1)$$

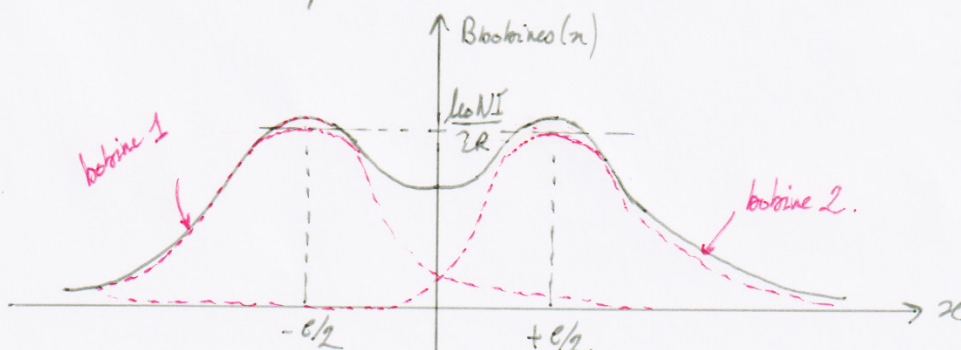
I.B) On utilise le théorème de superposition :

$$\vec{B}_{\text{bobines}}(x) = N \vec{B}_{\text{spires}}(x - c/2) + N \vec{B}_{\text{spires}}(x + c/2)$$

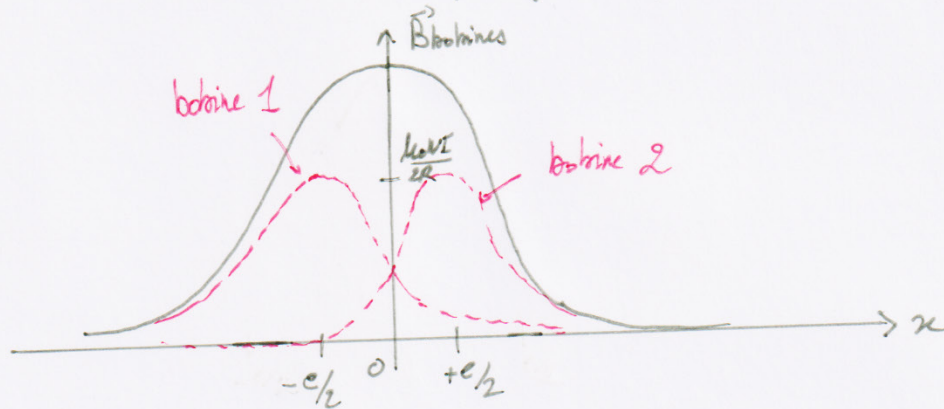
$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{bobines}}(x) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{x - c/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x + c/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x$$

(2)

I.C.1) Dans le cas où la séparation c entre les 2 bobines est supérieure à la distance critique $c_0 = R$, le champ magnétique total présente 2 maxima distincts autour de $x = -c/2$ et $x = +c/2$ ainsi qu'un minimum local en $x = 0$:



Dans l'autre cas, si $e < e_0$, le champ magnétique présente un maximum en $x = 0$.



d'avantage de $e = e_0$ c'est d'avoir un champ localement uniforme entre les 2 bobines.

I.C.2) • Le champ $B_{bobines}$ est la superposition de 2 champs créés par N spires d'où :

$$\begin{cases} \vec{B}_{bobine_1}(\mathcal{E}) = \vec{B}_{bobine_1}(0) + \mathcal{E} \vec{B}'_{bobine_1}(0) + \frac{\mathcal{E}^2}{2} \vec{B}''_{bobine_1}(0) + \frac{\mathcal{E}^3}{6} \vec{B}'''_{bobine_1}(0) + O(\mathcal{E}^4) \\ \vec{B}_{bobine_2}(\mathcal{E}) = \vec{B}_{bobine_2}(0) + \mathcal{E} \vec{B}'_{bobine_2}(0) + \frac{\mathcal{E}^2}{2} \vec{B}''_{bobine_2}(0) + \frac{\mathcal{E}^3}{6} \vec{B}'''_{bobine_2}(0) + O(\mathcal{E}^4) \end{cases}$$

or $B_{bobine} = N B_{spire}$ avec $\vec{B}_{spire}$ fonction paire $\Rightarrow \vec{B}_{bob_1}(0) = \vec{B}_{bob_2}(0)$

$\vec{B}'_{spire}$ — impaire $\Rightarrow \vec{B}'_{bob_1}(0) = -\vec{B}'_{bob_2}(0)$

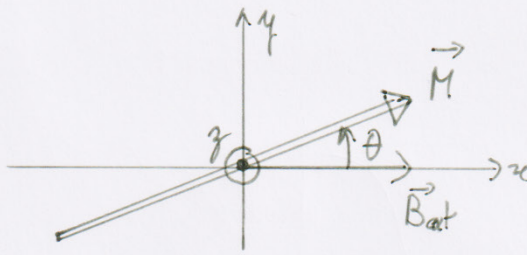
$\vec{B}''_{spire}$ — paire $\Rightarrow \vec{B}''_{bob_1}(0) = \vec{B}''_{bob_2}(0)$

$\vec{B}'''_{spire}$ — impaire $\Rightarrow \vec{B}'''_{bob_1}(0) = -\vec{B}'''_{bob_2}(0)$

• Pour B_{spire} on remarque la présence de deux points d'inflexion qui se situent en $x = \pm e_0/2$. D'où $\vec{B}''_{bob_1}(0) = \vec{B}''_{bob_2}(0)$ car $x = 0$ est situé à la distance $x = \pm e_0/2$ des 2 bobines d'où finalement :

$$\underline{\vec{B}_{bobines}(\mathcal{E}) = 2\vec{B}_{bob}(0) + O(\mathcal{E}^4)}$$

I.D)



$$\text{Soit } E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} = -MB \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} dE_p/d\theta = MB \sin \theta \\ d^2E_p/d\theta^2 = MB \cos \theta \end{cases}$$

d'où les positions d'équilibre $\theta = \{0, \pi\}$ avec $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$ si $\theta = 0$

$\Rightarrow$ la position stable de l'aiguille est la direction et le sens de $\vec{B}_{\text{ext}}$

I.E) On applique le TMC à l'aiguille d'où $J\ddot{\theta} = -MB \sin \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{d^2E_p}{J} = 0 \text{ pour de petites oscillations.}$$

$$\text{t.q. : } \omega_0^2 = \frac{MB}{J} \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB}}$$

$$\text{I.F) On a donc : } \begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB_0 + B_H}} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB_H - B_0}} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{B_H - B_0}{B_H + B_0} \text{ si } B_H > B_0.$$

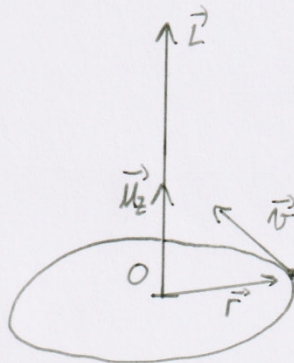
$$\Leftrightarrow B_H = \frac{1 + (T_1/T_2)^2}{1 - (T_1/T_2)^2} B_0 \text{ (0)}$$

Cette méthode permet de mesurer la composante souhaitée du champ magnétique terrestre sans connaître les caractéristiques J et MB de l'aiguille

II.A.1) D'après l'annexe, le noyau interne solide de la terre est composé essentiellement de fer et nickel. Ces deux éléments sont présents dans les aimants permanents donc le noyau pourrait constituer a priori un aimant permanent à l'origine de $\vec{B}_{terrestre}$. Cependant deux arguments s'y opposent :

- de premier est lié à la température au centre de la terre de 6000°C qui est supérieure à T_{curie} du fer et Nickel. Donc le noyau ne présente pas d'aimantation.
- de second est lié au changement d'orientation de $\vec{B}_{terrestre}$. Celui-ci se serait inversé une vingtaine de fois en 5 millions d'années. Il faudrait donc que le noyau interne se retourne physiquement de façon brutale...

II.A.2.a) Dans le modèle planétaire l'e⁻ autour du noyau est assimilable à une spire de courant :

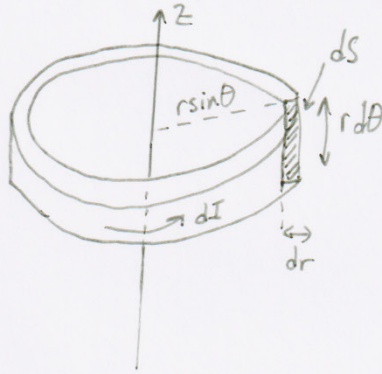
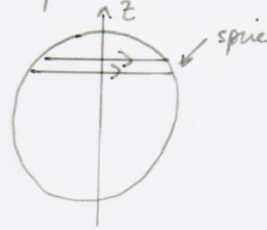


$$\begin{aligned} d\vec{b} &= I\vec{S} = -\frac{e}{T} \cdot 5\vec{\mu}_z \\ &= -\frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \vec{\mu}_z \\ &= -\frac{evr}{2} \end{aligned}$$

$$\text{or } \vec{L} = mvr\vec{\mu}_z \quad \text{d'où } d\vec{b} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

le facteur de proportionnalité est le rapport gyromagnétique γ t.e $\gamma = -\frac{e}{2m}$.

II.A.2b)

Considérons une spire élémentaire de rayon $r \sin \theta$:Les éléments de cette spire se meuvent à $\vec{v} = r \omega \sin \theta \vec{u}_\phi$ d'où :

$$\begin{cases} \vec{j} = \rho \vec{v} = \rho r \omega \sin \theta \vec{u}_\phi \\ \text{et} \\ dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho \omega r^2 \sin \theta dr d\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\vec{b} = \int_{\text{surface spire}} dI \vec{u}_z = \pi (r \sin \theta)^2 \cdot \rho \omega r^2 \sin \theta dr d\theta \vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } db &= \int_0^a \int_0^\pi \pi \rho \omega r^4 \sin^3 \theta d\theta dr \\ &= \pi \rho \omega \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$= \pi \rho \omega \frac{a^5}{5} (-1) \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta)$$

$$= \pi \rho \omega \frac{a^5}{5} (-1) \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \quad (\text{Il donnait cette primitive dans l'énoncé})$$

$$= \frac{4}{15} \pi \rho \omega a^5$$

$$\text{or } \rho = \frac{-eZ}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad \text{d'où } \vec{b} = - \frac{Ze \omega a^2}{5} \vec{u}_z$$

c) de source de la théorie de Blochett, c'est que l'inversion du champ magnétique serait liée à une inversion de rotation de l'objet céleste, ce qui est impossible

$$\text{II.B.1.a)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dans } R: \vec{F}_R = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ \text{Dans } R': \vec{F}_{R'} = q\vec{E}' \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

II.B.1.b). Dans R' , les particules sont immobiles d'où :

$$\vec{j}' = \rho_e \vec{v}_R \text{ ou } \vec{v}_R = \text{vitesse des électrons}$$

. Dans R : $\vec{j} = \rho_e(\vec{v}_R + \vec{v}) + \rho_a \vec{v} = (\rho_a + \rho_e)\vec{v} + \rho_e \vec{v}_R$

. Or le conducteur est neutre : $\rho_a + \rho_e = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \vec{j}' = \rho_e \vec{v}_R}$$

II.B.1.c) Dans R' : $\vec{j} = \sigma \vec{E}'$ d'où $\underline{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$

II.B.2.a) Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E}_{H0} = - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ donc $\vec{E}_{H0}$ est à l'origine d'un champ magnétique induit dépendant du temps $\vec{B}_1$.

II.B.2.b) Le courant créé par $\vec{B}_0$ est $\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_{H0}$ lui-même source de $\vec{B}_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{rot } \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_1 \quad (\text{on néglige les courants de déplacement}) \\ &= \mu_0 \sigma \vec{E}_{H0} \\ &= \mu_0 \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \text{ d'après l'énoncé.} \end{aligned}$$

En ordre de grandeur : $\frac{B_1}{L} = \mu_0 \sigma v B_0$

$$\Rightarrow \underline{B_1 = r_m B_0 \text{ où } r_m = \mu_0 \sigma L v}$$

II.B.2.c). Donc $r_m = \frac{vL}{\lambda}$ où $\lambda = 1/\mu_0 \sigma$. Ce coefficient est sans dimension et caractérise

l'efficacité du processus d'induction.

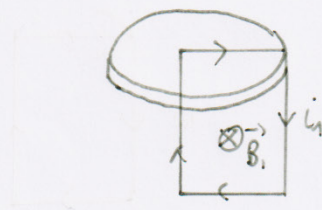
. On constate que $r_m \propto \sigma$, ce est caractéristique des phénomènes d'induction comme les courants de Foucault

II.B.3.a) le processus est itératif : $\vec{B}_2 = \gamma_{rm} \vec{B}_1$
 $\Rightarrow \vec{B}_2 = (\gamma_{rm})^2 \vec{B}_1$

II.B.3.b) d'où $\vec{B} = \sum_{i=0}^{\infty} (\gamma_{rm})^i \vec{B}_0$

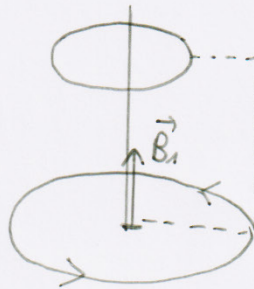
II.B.3.c) Un laser atteint le seuil d'oscillation lorsque l'intensité du champ électrique après un aller-retour est amplifiée. Ici il faut donc que : $\gamma_{rm} > 1$

II.C.1) Cas A :



le flux de $\vec{B}_1$ à travers le disque est nul
il ne peut y avoir d'effet dynamo.

Cas B :



Au cas A on rajoute un champ $\vec{B}_1$ dont le flux total à travers le disque est non nul
 $\Rightarrow$ le cas B est propice à un effet dynamo

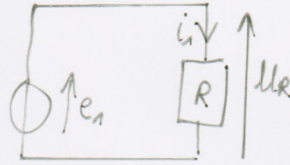
II.C.2) Soit $d \ll a \ll b \Rightarrow$

- les plans de la spire et du disque sont "quasi" confondus.
 $\Rightarrow$ plan de la spire est un plan de symétrie
 $\Rightarrow \vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_z$
- de plus chaque point P est "quasi" équidistant de la spire
 $\Rightarrow \vec{B}_1 = B_1(t)$

d'où $\vec{B}_1 = B_1(t) \vec{u}_z$

II.C.3.a) Soit $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = B_1 \cdot \pi a^2$.
 Or $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = M i_1$ } d'où $i_1 = \frac{B_1 \pi a^2}{M}$

Circuit équivalent :



$$\Rightarrow e_1 = R i_1$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega B_0 a^2}{2} = R \frac{B_1 \pi a^2}{M}$$

énoncé $\rightarrow$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{M \Omega B_0}{2 \pi R}$$

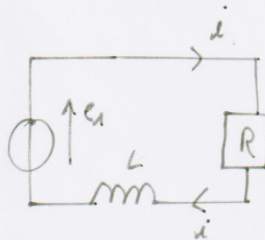
II.C.3.b) Or $B_1 = \overset{>1}{\gamma_{rm}} B_0$

$$\text{d'où } \frac{M \Omega}{2 \pi R} > 1$$

II.C.4) Soit $e = \frac{\Omega B a^2}{2}$ et $\phi = B \pi a^2 = M i \Rightarrow B = \frac{M i}{\pi a^2}$

$$\Rightarrow e = \frac{\Omega M}{2 \pi} i$$

II.C.5) Circuit équivalent :



$$\text{D'où : } e_1 = R i + L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (e_1 - R i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left(\frac{\Omega M}{2 \pi} - R \right) i$$

Pour que i croît il faut donc $\frac{\Omega M}{2 \pi} > R \Leftrightarrow \frac{M \Omega}{2 \pi R} > 1$ cf II.C.3.b

II.C.6) On n'a pas considéré le couplage entre le mouvement mécanique du disque et le courant électrique dans la dynamo.

II.C.7) D'après le TMC appliqué au disque : $J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - \Gamma_r$

Calculons Γ_r :

On suppose le couplage em parfait $\Gamma_r \Omega = e i$

$$\Rightarrow \Gamma_r = \frac{e i}{\Omega}$$

$$\text{D'où } \left\{ \begin{array}{l} J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - \frac{M i^2}{2\pi} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di}{dt} = \left(\frac{M \Omega}{2\pi} - R \right) i \end{array} \right. \text{ d'après II.C.5 } (2) \quad \text{II.6}$$

II.C.8) En régime stationnaire on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_m - \frac{M i^2}{2\pi} = 0 \\ \frac{M \Omega}{2\pi} = R \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 2\pi R / M \\ \text{et} \\ i = \pm \sqrt{\frac{2\pi \Gamma_m}{M}} \end{array} \right.$$

II.C.9) D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \times \Omega : J \Omega \frac{d\Omega}{dt} = \Omega \Gamma_m - \frac{\Omega M i^2}{2\pi} \\ (2) \times i : L i \frac{di}{dt} = \left(\frac{\Omega M}{2\pi} - R \right) i^2 \end{array} \right.$$

On somme les deux équations d'où : $J \Omega \frac{d\Omega}{dt} + L i \frac{di}{dt} = \Omega \Gamma_m - R i^2$

$$\text{d'où } \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{J\Omega^2}{2} + \frac{Li^2}{2}}_{\text{Énergie stockée mécanique et magnétique}} \right) = \underbrace{\Omega T_m}_{\text{Puissance motrice}} - \underbrace{Ri^2}_{\text{Pertes par effet Joule}}$$

II.C.10) En régime stationnaire : $\Omega T_m = Ri^2$

$\Rightarrow$ la puissance apportée par le couple moteur est entièrement dissipée par effet Joule.
Une source d'énergie extérieure est donc nécessaire pour que l'effet dynamo puisse exister.

II.C.11) Il existe 2 solutions de i : $i = \pm \sqrt{\frac{2\pi T_m}{R}}$. Ainsi à chaque expérience réalisée le système peut converger vers l'une ou l'autre solution en fonction des C.I.

• Ce modèle de dynamo reproduit donc la possibilité d'obtenir un champ magnétique de sens aléatoire en fonction des C.I.

II.D.1) L'annexe 2 rappelle que le sodium liquide est le meilleur conducteur aux températures utilisées. L'effet dynamo est proportionnel à σ d'où ce choix.

• le sodium liquide est un réducteur puissant qui peut s'enflammer au contact de l'air et exploser au contact de l'eau.

II.D.2) L'expérience VKS2 met en évidence des inversions aléatoires du champ et excursions très similaires au cas de Bénédict. Comme pour la terre le temps mis pour un retournement est très court devant la durée moyenne d'une phase de champ magnétique de polarité donnée.

II.D.3) Reynolds: $Re = \frac{\rho UL}{\eta}$

• Pour VKSL : $L = 0,6m$, $U = \frac{c}{2\Omega} = 30ms^{-1}$ ainsi :

$$Re = \frac{\rho_{\text{Na}} UL}{\eta_{\text{Na}}} = 3 \cdot 10^7 \text{ , de l'ordre de grandeur donné par le texte : } Re = \{10^6 \rightarrow 10^7\}.$$

II.D.4) Nombre de Reynolds magnétique : $R_m = \mu_0 UL$ qui correspond au r_m du II.B.2.c.

III.A) Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \text{ div } \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

En ord : $\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{\text{rot}} \vec{B}\| \sim B/L, \|\vec{\text{rot}} \vec{E}\| \sim E/L \\ \|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\| \sim B/T, \|\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \sim \frac{E}{c^2 T} \end{array} \right.$

Donc $\alpha = \frac{\|\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} \sim \frac{E/c^2 T}{B/L}$

ou $\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T}$ d'où $\alpha = \left(\frac{L}{cT} \right)^2$

On note $U = c/L$ une vitesse caractéristique de l'écoulement d'où :

$$\frac{\|\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} = \left(\frac{U}{c} \right)^2 \ll 1$$

d'où $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ dans l'approximation relativiste

II.B.1) d'équation de conservation de la charge: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$

$$\Leftrightarrow \text{div} (\sigma \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma \text{div } \vec{E} + \sigma \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

$$\text{or } \text{div } \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0 \Rightarrow \left[\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_e = -\sigma \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \right]$$

II.B.2) Si le conducteur est au repos $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_e = 0$

D'où $\rho_e(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, 0) e^{-t/\tau}$ où $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} = 1,48 \cdot 10^{-19} \text{ s}$

Pour VKS2, $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0,6 \text{ ms} \gg \tau$ d'où le système conducteur est neutre à tout instant.

III.B.3) En régime stationnaire, si le conducteur est en mouvement: $\rho_e = -\epsilon_0 \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{B})$

Un mouvement de fluide est donc nécessaire pour qu'il existe une densité de charge non nulle. D'où en ODB:

$$\rho_e = \frac{\epsilon_0 \omega B}{L} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ C.m}^{-3} \text{ avec } B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ T.}$$

Pour le sodium: $\rho_e = \frac{\rho_e}{V} = \frac{M_A \cdot e}{V_m} = \frac{M_A \cdot e}{M/\mu}$

masse volumique $\Rightarrow \rho_e = \frac{\mu_A N_A e}{M} = 3,77 \cdot 10^9 \text{ C.m}^{-3} \gg \rho_e(\text{VKS2})$

III.C) En régime stationnaire $\text{div } \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \text{div} (\sigma \vec{E} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B})) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{div } \vec{E} = -\text{div} (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\Leftrightarrow \text{div} (\text{grad } V) = \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\Leftrightarrow \Delta V = \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{B}) = -\rho_e / \epsilon_0$$

III.D) Soit $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$= \mu_0 \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

D'où $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \sigma \underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{E}}_{-\partial \vec{B} / \partial t} + \mu_0 \sigma \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$$-\vec{\Delta} \vec{B} + \underbrace{\text{grad}(\text{div} \vec{B})}_{=0}$$

d'où : $\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \sigma \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \underbrace{\lambda \vec{\Delta} \vec{B}}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})}_{\text{terme inductif}} \quad \text{où } \lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad \textcircled{\alpha}$$

• On peut nommer λ : coefficient de diffusion magnétique

III.E) $\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\alpha}$ donne : $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{\Delta} \vec{B}}_{= -\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B})}$

$$= -\vec{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{j} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

or $\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} - \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B})$

$$= \mu_0 j^2 - \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{j^2}{\sigma} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

On intègre sur V et on utilise le théorème de Green Ostrogradsky :

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_V \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) dV - \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \oint_{\Sigma} (\vec{j} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

le fluide est au repos à l'extérieur du volume V donc le flux de $\vec{j} \wedge \vec{B}$ est nul à travers Σ si on choisit assez grand.

$$D'où : \frac{d}{dt} \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_V \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) dV - \int_V \frac{1}{\sigma} \frac{B^2}{2} dV$$

Variation temporelle
de l'énergie magnétique

terme d'induction

Rechts effet Joule

↳ car présence d'un signe $\ominus$.

III.F) . lorsque $\text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$ l'équation devient : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \vec{B}$

Sous champ imposé aux limites, le champ magnétique va à 0 aux temps longs avec :

$$\tau = \frac{L^2}{\lambda} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ ans} \quad (L = 3000 \text{ km, rayon du noyau})$$

Cette durée caractéristique τ de diffusion de B est de l'ordre de grandeur de la durée des phases de polarité constante du champ géomagnétique.

III.G) On définit $R_m = \frac{\|\text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})\|}{\|\lambda \nabla^2 \vec{B}\|} \approx \frac{vB/L}{\lambda B/L^2}$

$$\Rightarrow R_m = \frac{vL}{\lambda} = \text{nombre de Reynolds magnétique}$$