

Corrigé proposé par C. Bone-Rambaud et H. Moulleron.

PROBLEME 1 : Puiser dans la mer Rouge pour sauver la mer Morte

Partie I –Modèle dynamique de l'évaporation de l'eau de la mer Morte

Q1. Chaque année, le niveau de la Mer Morte baisse de $h = 1\text{ m}$ sur une surface totale $S = 637\text{ km}^2$, donc le volume perdu annuellement est de : $D_{V\text{pertes}} = h \cdot S = 637 \cdot 10^6\text{ m}^3/\text{an}$

Q2. Bilan volumique d'eau **reçue** à la surface de la Mer Morte : $-D_{V\text{pertes}} = D_{V\text{Jour}} + h_p \cdot S - h_{\text{évap}} \cdot S$
D'où : $h_{\text{évap}} = \frac{D_{V\text{pertes}} + D_{V\text{Jour}}}{S} + h_p = h + h_p + \frac{D_{V\text{Jour}}}{S} = 1,85\text{ m}$

Q3. Même raisonnement avec $D_{V\text{Jour}} = 0$, alors : $-D_{V\text{pertes}} = -h' \cdot S = h_p \cdot S - h_{\text{évap}} \cdot S$
Soit une baisse annuelle d'une hauteur : $h' = h_{\text{évap}} - h_p = 1,79\text{ m}$
L'assèchement du Jourdain multiplierait presque les pertes par deux pour la Mer Morte.

Q4. Masse qui s'évapore à travers dS pendant dt : $d^2m_{\text{évap}} = \vec{j}_L \cdot \vec{dS} dt = j_L dS dt$

Q5. La masse de vapeur d'eau qui arrive sur dS pendant dt correspond à 1/6 des molécules d'eau contenues dans la colonne cylindrique représentée Figure 4 (celles qui se déplacent dans la direction Oz, vers le bas). En effet, la hauteur $u^* dt$ est la distance parcourue par chaque molécule d'eau vapeur pendant dt , avec les hypothèses considérées. On en déduit : $d^2m_{\text{gain}} = m^* \frac{n_V}{6} dS u^* dt$

Q6. La densité volumique de courant de masse d'eau vapeur qui se liquéfie à l'interface est : $j_G = \frac{d^2m_{\text{gain}}}{dS dt}$ soit $j_G = m^* \frac{n_V}{6} u^* = \frac{1}{6} \mu u^*$ où μ est la masse volumique de l'eau vapeur.

Q7. A l'équilibre, les flux d'eau qui s'évapore et d'eau qui se liquéfie se compensent, donc $j_L = j_G$ avec pour un gaz parfait à la pression P_S :

$$\mu = \frac{P_S M}{RT}. \text{ Alors : } j_G = \frac{1}{6} \frac{P_S M}{RT} u^* = \frac{1}{6} \frac{P_S M}{RT} \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \frac{P_S}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}} = \frac{P_S}{2u^*}$$

En remplaçant dans l'égalité $j_L = j_G$ on trouve : $j_L = \frac{P_S}{2} \sqrt{\frac{M}{3RT}}$ (cqfd).

Q8. P_{S_0} est la pression de vapeur saturante à $T = T_0$: $P_{S_0} = P_S(T_0)$

Q9. En supposant $\sqrt{T} \approx C^{te}$ sur l'intervalle considéré (*sinon il manque la valeur de L_V pour conclure*), si T augmente, P_S augmente d'après la figure 5, donc j_L **augmente** avec T .

Q10. Densité volumique de courant de masse globale : $j_T = j_L - j_G = \frac{P_S}{2u^*} - \frac{P_V}{2u^*}$

On retrouve bien $j_T = 0$ lorsque la vapeur d'eau est à la pression de vapeur saturante.

Q11. Pour accélérer l'évaporation d'un liquide, il faut **augmenter** j_T donc soit **augmenter** T (pour augmenter j_L) soit **diminuer** p_v (pour diminuer j_G), par exemple avec un courant d'air qui assèche l'atmosphère. Un air chaud et sec accélère l'évaporation des liquides (eau ici).

Partie II – Analyse de l'écoulement dans le pipeline

Q12. Bilan de quantité de mouvement sur le système ouvert (S^*) (en gris sur Figure 6), dans le référentiel d'étude galiléen, en notant :

(S_1) le fluide qui entre dans (S^*) pendant dt , de quantité de mouvement $d\vec{p}_1$

(S_2) le fluide qui sort de (S^*) pendant dt , de quantité de mouvement $d\vec{p}_2$

On définit alors un système (S) fermé tel que :

A la date t : (S)(t) = (S_1) \cup (S^*)

A la date $t + dt$: (S)($t + dt$) = (S^*) \cup (S_2)

Variation de quantité de mouvement pour (S) pendant dt : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}^*}{dt} + \frac{d\vec{p}_2 - d\vec{p}_1}{dt}$

En régime stationnaire, $\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \vec{0}$, et comme la vitesse dans le pipeline ne dépend que de r par hypothèse, $d\vec{p}_2 = d\vec{p}_1$. On trouve alors $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{p} = C^{te}}$.

Q13. Les forces appliquées sur (S) sont les forces pressantes en amont et en aval et la résultante des forces de viscosité sur la paroi cylindrique de rayon r : $\boxed{\vec{F}_{ext} = \left((P_1 - P_2) \pi r^2 + \eta \frac{\partial v}{\partial r} 2\pi l r \right) \vec{u}_x}$

Q14. Théorème de la résultante dynamique à (S) : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ or (par Q12) $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$

Il vient d'après Q13 : $\eta \frac{\partial v}{\partial r} 2\pi l r = -(P_1 - P_2) \pi r^2$ soit $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta l} r$

On calcule la primitive vérifiant la condition aux limites d'adhérence à la paroi $v(R) = 0$:

$$\boxed{\vec{v}(M) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2) \vec{u}_x \text{ pour } 0 \leq r \leq R} \quad (\text{cqfd}).$$

Q15. Par définition, le débit volumique est le flux de la vitesse : $D_V = \iint_{Section} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}$

Soit : $D_V = \iint_{Section} \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2) \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} \iint_{Section} (R^2 - r^2) dS$

On trouve : $D_V = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr$ donc $\boxed{D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (P_1 - P_2)}$ qui est bien la loi de Hagen-Poiseuille.

Q16. Par analogie avec la loi d'Ohm en électrocinétique on définit : $\boxed{R_{hyd} = \frac{(P_1 - P_2)}{D_V} = \frac{8\eta l}{\pi R^4}}$

La résistance hydraulique varie en $\frac{1}{R^4}$ tandis que la résistance électrique est en $\frac{1}{R^2}$.

Q17. Par définition de la vitesse débitante : $D_V = \pi R^2 V$ donc $\boxed{V = \frac{D_V}{\pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta l} R^2}$

Elle est égale à la moitié de la vitesse maximale (obtenue en $r = 0$).

Q18. A.N. : $\boxed{R_{hyd} = \frac{8\eta l}{\pi R^4} = 111 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}}$; avec $P_1 - P_2 \cong \rho_{air} gh \cong 1,2,9,8,423 \text{ Pa} \cong 5000 \text{ Pa}$

alors $\boxed{D_V = \frac{(P_1 - P_2)}{R_{hyd}} = 45 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}$ et $\boxed{V = \frac{D_V}{\pi R^2} = 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

Q19. Le nombre de Reynolds : $\boxed{Re = \frac{\rho V d}{\eta} = 19 \cdot 10^6 \cong 2 \cdot 10^7}$ (*erreur d'énoncé : d et pas l dans Re*)

Il est très élevé, donc l'écoulement est peu visqueux (plutôt turbulent). La loi de Poiseuille n'est donc pas rigoureusement valable.

Partie III – Bilan énergétique

Q20. Démonstration du premier principe industriel : voir cours.

Q21. Sous ces hypothèses, $q = 0$; $w_u = 0$; $\Delta e_c = \frac{1}{2} \Delta v^2$; $\Delta e_p = g \Delta z$ et l'enthalpie massique s'écrit :
 $h = u + \frac{pV}{m} = u + \frac{p}{\rho}$ donc pour un fluide incompressible (*oubli de l'énoncé*) $\Delta h = \Delta u + \frac{\Delta p}{\rho}$. Avec $\Delta u = 0$ il reste : $\Delta p + \frac{1}{2} \rho \Delta v^2 + \rho g \Delta z = 0$ (cqfd)

Q22. P_{tot} est la somme du terme p de pression statique (associée à l'énergie potentielle des forces pressantes), du terme $\frac{1}{2} \rho v^2$ de pression cinétique (associé à l'énergie cinétique) et du terme $\rho g z$ de pression hydrostatique (associé à l'énergie potentielle de pesanteur).

Si $\Delta P_{tot} \neq 0$ alors l'une des hypothèses précédentes n'est plus valable. Le plus souvent, la viscosité du fluide n'est plus négligeable, ou l'écoulement devient compressible ou turbulent.

Q23. Si on ne tient compte que de la pression hydrostatique : $\Delta P_{tot} = \rho g \Delta z = 4,56 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
 On trouve une valeur très élevée, proche de 45 bar : la relation de Bernoulli n'est pas valable.

Q24. Rugosité relative : $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{1,0 \text{ mm}}{3,0 \text{ m}} = 3,33 \cdot 10^{-4}$ donc d'après la Figure 9 : $f = 0,015$

Q25. Par définition de f : $V = \left(\frac{2d|\Delta P_{tot}|}{\rho f l} \right)^{1/2} = 2,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ même ordre de grandeur que Q18, mais deux fois plus faible. On en déduit le débit par : $D_V = \pi R^2 V = 20,4 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (toujours un facteur deux).

Q26. On reprend le bilan volumique fait en Q2 : $h'' = h_{\text{évap}} - h_p - \frac{D_V \text{ Jour} + D_V}{S} = 0$
 Dans ce modèle, le niveau de la Mer Morte resterait stable.

Q27. Si on ne tient compte que de la pression hydrostatique à la traversée de la turbine
 $P_{tot}(E) - P_{tot}(S) = \rho g (Z_E - Z_S) = \rho g \Delta Z_{tur} = \frac{P_u}{D_V} + K \frac{\rho V^2}{2}$ avec P_u la puissance délivrée.

Q28. Avec la définition de f , si on note l_{AE} et l_{SB} les longueurs respectives de conduite entre A et E et entre S et B ($l_{AE} + l_{SB} = l$), il vient : $P_{tot}(A) - P_{tot}(E) = \frac{\rho V^2 l_{AE} f}{2d}$ et $P_{tot}(S) - P_{tot}(B) = \frac{\rho V^2 l_{SB} f}{2d}$

Q29. Entre A et B : $\Delta P_{tot} = \rho g (Z_{rou} - Z_{mor}) = P_{tot}(A) - P_{tot}(B)$
 Soit : $\rho g (Z_{rou} - Z_{mor}) = P_{tot}(A) - P_{tot}(E) + P_{tot}(E) - P_{tot}(S) + P_{tot}(S) - P_{tot}(B)$
 $\rho g (Z_{rou} - Z_{mor}) = \frac{\rho V^2 (l_{AE} + l_{SB}) f}{2d} + \frac{P_u}{D_V} + K \frac{\rho V^2}{2}$ d'où : $P_u = \rho D_V \left(g (Z_{rou} - Z_{mor}) - \frac{D_V^2}{2S^2} \left(K + \frac{fl}{d} \right) \right)$

Q30. D_{Vmax} donne la puissance maximale telle que : $\frac{dP_u}{dD_V} (D_{Vmax}) = 0 \Leftrightarrow D_{Vmax} = S \sqrt{\frac{2g(Z_{rou} - Z_{mor})}{3 \left(K + \frac{fl}{d} \right)}}$

A.N. : $D_{Vmax} = 9,94 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ alors $P_u = P_{umax} = 30,2 \text{ MW}$

Q31. Idem Q26 : $h_{max} = h_{\text{évap}} - h_p - \frac{D_V \text{ Jour} + D_{Vmax}}{S} = 0,503 \text{ m}$

La Mer Morte perd alors 50 cm par an... compromis entre la situation actuelle et le pipeline seul.

PROBLEME 2 : Le four à micro-ondes

Q32. $d_x = 373\text{mm}, d_y = 370\text{mm}, d_z = 233\text{mm}$

Q33. $f = 2450\text{ MHz}$ or $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2450 \cdot 10^6} = 0.122\text{m} = 12.2\text{ cm}$ avec $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta f}{f} \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda \frac{\Delta f}{f} = c \frac{\Delta f}{f^2} =$
 $3 \cdot 10^8 \frac{50 \cdot 10^6}{(2450 \cdot 10^6)^2} = 2 \cdot 10^{-3}\text{m} = 0.2\text{cm}$

Bilan : $\lambda = 12.2 \pm 0.2\text{ cm}$

Q34. Ordre de grandeur de l'indice du verre $n_v = 1,5$.

Q35. $n_{vide} = 1$

Q36. $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SH_1) + (H_1I_2) + (I_2M) - (SI_1) - (I_1H_2) - (H_2M)$

Avec H_1 projeté orthogonal de I_1 sur le rayon 2 et H_2 projeté orthogonal de I_2 sur le rayon 1

D'après Malus, H_1 et I_1 sont sur la même surface d'onde donc $(SH_1) = (SI_1)$

De même pour H_2 et I_2 donc $(H_2M) = (I_2M)$

$\delta(M) = (H_1I_2) - (I_1H_2) = H_1I_2 - I_1H_2$ en prenant $n_{air} = 1$

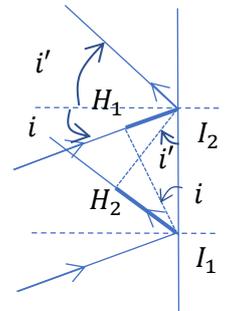
Dans le triangle $I_1H_1I_2$, $\sin(i) = \frac{H_1I_2}{a}$ (attention à l'orientation des angles)

Dans le triangle $I_2H_2I_1$, $\sin(i') = -\frac{I_1H_2}{a}$ (attention à l'orientation des angles)

Bilan $\delta(M) = a(\sin(i) + \sin(i'))$

D'après la formule de Fresnel, $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)\right)\right)$ pour avoir des

interférences constructives, il faut que $\delta(M) = \gamma\lambda$ avec $\gamma \in \mathbb{Z}$ donc $a(\sin(i) + \sin(i')) = \gamma\lambda$



Q37. Sur le document 3, il y a 5 motifs sur 10mm donc $a = 2\text{mm}$

$\max\left(\frac{a}{\lambda}(\sin(i) + \sin(i'))\right) = \frac{2a}{\lambda} = \frac{2 \times 2 \cdot 10^{-3}}{12,2 \cdot 10^{-2}} = 0,03 = \gamma_{max}$ comme $\gamma \in \mathbb{Z}$ donc $\gamma = 0$

On obtient $\sin(i) + \sin(i') = 0$ donc $i = -i'$, la grille se comporte comme un miroir.

Q38. Si on s'intéresse aux ondes électromagnétiques dans le visible on a $\lambda_{ODG} = 500\text{nm}$ donc $\frac{2a}{\lambda} =$

$\frac{2 \times 2 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}} = 8000 = \gamma_{max}$ donc il y a une infinité d'angle i' possible, les rayons ne seront pas forcément réfléchis.

Q39. $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; $\text{div}(\vec{B}) = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Q40. En l'absence de charges et de courants, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

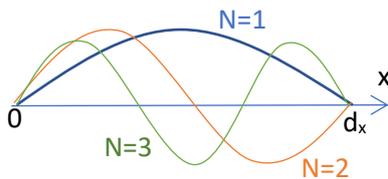
On obtient l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Q41. C'est une onde plane, stationnaire, monochromatique et polarisée rectilignement selon \vec{e}_z

Q42. Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} : $\begin{cases} \vec{E}(0^+, t) = \vec{0} \\ \vec{E}(d_x^-, t) = \vec{0} \end{cases}$ car $\vec{E} = 0$ dans le metal (conducteur parfait) $\Rightarrow \begin{cases} E_0 \cos(\omega t) \cos(\varphi) = 0 \\ E_0 \cos(\omega t) \cos(k \cdot d_x - \varphi) = 0 \end{cases}$

Ceci est vrai pour tout temps et $E_0 \neq 0$ donc $\begin{cases} \cos(\varphi) = 0 \\ \cos(k \cdot d_x - \varphi) = 0 \end{cases}$. On prend $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ k \cdot d_x - \varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi \end{cases} p \in \mathbb{Z}$

Donc $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ k \cdot d_x = n\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ k = \frac{n\pi}{d_x} \end{cases}$ avec $n \in \mathbb{N}$ puisque $k > 0$



Q43.

Analogie avec mécanique (corde vibrante) et acoustique (ondes sonores)

Q44. Il y a 4 ventres selon $x \rightarrow m = 4$

Il y a 3 ventres selon $y \rightarrow p = 3$

Pour que $(m=4, p=3)$ soit un mode propre possible il faut que $q^2 = 4d_z^2 \left(\frac{m^2}{4d_x^2} + \frac{p^2}{4d_y^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$ or $\frac{1}{\lambda^2} = 67.2m^{-2} > \frac{m^2}{4d_x^2} + \frac{p^2}{4d_y^2} = 45.1m^{-2} \Rightarrow q^2 < 0$ donc il n'y a pas de valeurs de q possible ce n'est pas un mode propre possible.

Q45. La figure n'est pas symétrique, donc on hésite entre plusieurs modes possibles. De plus, on n'a qu'une information en 2D, il manque l'information sur z et donc la valeur de q .

Q46. Dans le cadre de l'ARQS, on néglige le temps de propagation du signal par rapport à sa période temporelle T , cela revient à négliger les courants de déplacement $\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant les courants \vec{j} dans l'équation de Maxwell Ampère.

Q47. $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \text{Re}(E_0 \exp(i(\omega t + k'x) + k''x) \vec{e}_z) = E_0 \exp(k''x) \text{Re}(\exp(i(\omega t + k'x))) \vec{e}_z$

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(k''x) \cos(\omega t + k'x) \vec{e}_z$$

Comme l'onde se propage selon $-\vec{e}_x$ alors $\exp(k''x) \rightarrow 0$ il y a bien atténuation de l'onde.

Q48. $\underline{k}^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \mu_0 \gamma \omega \Rightarrow \underline{k} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = (1-j) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} = \frac{1}{\delta} (1-j)$ donc $\boxed{k' = k'' = \frac{1}{\delta}}$

$$AN : \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 38 \cdot 10^6 \times 2\pi \times 2450 \cdot 10^6}} = \boxed{1.65 \cdot 10^{-6} m}$$

$$Q49. \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \boxed{\frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{2k''x} \cos(\omega t + k'x) [k' \cos(\omega t + k'x) + k'' \sin(\omega t + k'x)] (-\vec{e}_x)}$$

$$\boxed{\langle \vec{R} \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{2k''x} \vec{e}_x} \text{ car } \langle \cos^2(\omega t + k'x) \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \cos(\omega t + k'x) \sin(\omega t + k'x) \rangle = 0$$

On retrouve bien la propagation selon $-\vec{e}_x$

Q50. Le facteur d'atténuation correspond au terme $e^{2k''x} = e^{\frac{2x}{\delta}}$ donc à l'extérieur du four pour $x = -2 \cdot 10^3 m$, le facteur d'atténuation vaut $\approx e^{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}}} = e^{-2 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-869}$. La puissance surfacique à l'extérieur vaudra donc $\frac{P_{max}}{Surface \text{ du four}} \times 3 \cdot 10^{-869} \ll 10 W \cdot m^{-2}$. Les normes sanitaires sont respectées.