

Physique : DM4

Partie A : De la cuisson des œufs (Centrale PSI – 2016)

II.A - chauffage de l'eau

II.A.1)

L'eau n'étant pas en contact avec les œufs, et la transformation étant adiabatique, on suppose que la puissance délivrée par la résistance ne sert qu'à chauffer le cuiseur, sans perte. Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système fermé en évolution adiabatique formé du cuiseur et de l'eau s'écrit sur la durée Δt_1 :

$$(m_e + m_0)c(T_{\text{eb}} - T_0) = \mathcal{P}\Delta t_1$$

soit

$$\Delta t_1 = \frac{(m_e + m_0)c(T_{\text{eb}} - T_0)}{\mathcal{P}}$$

II.A.2)

D'après la relation précédente, pour $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$, $\Delta t_1 = 150 \text{ s}$, $T_0 = 20 \text{ °C}$, $m_0 = 125 \text{ g}$

$$m_e = \frac{\Delta t_1 \mathcal{P}}{c(T_{\text{eb}} - T_0)} - m_0 = 32 \text{ g}$$

II.B - Détermination de la durée de cuisson Δt_2

II.B.1) mécanisme de cuisson des œufs

La raison de l'existence de la pique n'est malheureusement pas à chercher dans l'énoncé, qui omet de citer dans la description de l'œuf la présence d'une poche d'air : sous l'effet de la chaleur lors de la cuisson, elle tend à se dilater à volume constant, la coquille étant indéformable, ce qui entraîne une augmentation de pression qui peut conduire à la rupture de la coquille. La pique sert à percer la coquille au niveau de la poche à air, pour permettre à celle-ci de se vider au fur et à mesure de l'augmentation de température.

Pour une illustration :

<http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-eierpieker-karambolage>
et aussi (avec la présentation d'un autre dispositif)

<http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-toqueur-oeuf-061912-000>

En l'absence d'indication de la présence d'une poche d'air, l'énoncé pourrait laisser supposer qu'il s'agit d'un problème de vaporisation de l'eau contenue dans l'œuf, mais comme la cuisson à lieu à 100 °C , la pression de la vapeur formée est de 1 bar, et ne peut donc pas causer la rupture de la coquille.

II.B.2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

a) Bien que l'énoncé ne l'indique pas, on se place dans le cadre d'un modèle unidimensionnel où la température ne dépend que de la coordonnée radiale r en coordonnées sphériques, ce qui est cohérent avec le modèle de l'œuf sphérique soumis à des contraintes extérieures à symétrie sphérique. Les isothermes sont alors les sphères concentriques de centre O .

On considère la couche sphérique de centre O de rayon r , d'épaisseur dr , de volume $dV = 4\pi r^2 dr$, de température uniforme $T(r, t)$. Sa capacité thermique vaut $dC = \mu dV c$, donc sa variation d'énergie interne (ou d'enthalpie, puisqu'il s'agit d'une phase condensée) pour une variation élémentaire de température a pour expression

$$d^2E = dC dT = 4\pi r^2 \mu c dT dr$$

Dans le cadre de la conduction pure, sans terme de source, la couche est soumise aux seuls flux thermiques conductifs traversant les sphères de rayons r et $r + dr$ la limitant.

Le flux thermique traversant l'isotherme de rayon r dans le sens des r croissants a pour expression

$$\phi(r, t) = \iint_{r'=r} \vec{j}_{\text{th}}(r', t) \cdot d\vec{S} = j_{\text{th}, r}(r, t) S_{\text{sphère}} = 4\pi r^2 j_{\text{th}, r}(r, t)$$

où $j_{\text{th}, r}$ est la composante radiale du flux thermique.

Le bilan thermique s'écrit sur une durée élémentaire dt , pour la transformation (supposée isochore si on ne perce pas la coquille ou isobare si on la perce, mais cela ne fait pas de différence puisqu'il s'agit d'une phase condensée)

$$d^2E = \delta^2Q = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)) dt = -\frac{\partial \phi}{\partial r} dr dt = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{\text{th}, r})}{\partial r} dr dt$$

soit après simplification des éléments différentiels

$$4\pi r^2 \mu c dT dr = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{\text{th}, r})}{\partial r} dr dt ; \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{\text{th}, r})}{\partial r}$$

En exprimant la loi de Fourier en symétrie sphérique (l'expression n'est pas donnée, même si elle n'est pas au programme, mais comme l'établissement de l'équation de la chaleur unidimensionnelle l'est, on peut supposer que les étudiants doivent la connaître pour toute géométrie unidimensionnelle)

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(r, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r ; j_{\text{th}, r} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

et en la reportant dans le bilan thermique, on obtient pour λ uniforme l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques avec symétrie sphérique

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

b) On exprime alors $r = r_2 \rho$ et $t = \theta \tau$, où r_2 et θ sont des constantes

$$\frac{\mu c}{\theta} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{r_2^2 \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) ; \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda \theta} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

L'équation donnée dans l'énoncé est obtenue si la constante multiplicative $\frac{\mu c r_2^2}{\lambda \theta}$ vaut 1, soit

$$\theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}$$

L'expression précédente est l'expression usuelle du temps caractéristique de diffusion sur une distance r_2 , qui représente ici la taille caractéristique de l'œuf. En particulier τ est proportionnel à r_2^2 , ce qui traduit la perte d'efficacité des phénomènes diffusifs lorsque la taille du système augmente.

II.B.3) résolution de l'équation de la chaleur

a) En reportant la solution proposée dans l'équation de la chaleur, on obtient,

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial (fg)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial (fg)}{\partial \tau} ; \frac{g}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = f \frac{dg}{d\tau}$$

puis en divisant par le produit fg supposé non nul

$$\frac{1}{\rho^2 f} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = -A^2$$

Les deux termes sont égaux à une constante car le premier ne dépend que de la variable ρ tandis que le second ne dépend que de la variable τ (principe de séparation des variables). La justification de l'écriture de la constante sous la forme $-A^2$, est donnée plus bas.

On obtient alors les deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dg}{d\tau} + A^2 g = 0 ; \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) + A^2 f = 0$$

L'équation en $g(\tau)$ du premier ordre à coefficients constants admet à une constante multiplicative arbitraire près la solution générale

$$g(\tau) = e^{-A^2 \tau}$$

La conduction pure est un phénomène stable, donc la solution ne peut diverger dans le temps, ce qui justifie le signe $-$ qui assure le caractère non divergent de l'évolution temporelle ($A^2 > 0$ puisque A est réel).

b) Le changement de variable $f = F/\rho$ conduit aux relations

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{F'\rho - F}{\rho^2} ; \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \frac{d(F'\rho - F)}{d\rho} = \rho F''$$

en reportant cette expression dans l'équation différentielle vérifiée par f , on obtient

$$\frac{F''}{\rho} + A^2 \frac{F}{\rho} = 0 : \frac{d^2 F}{d\rho^2} + A^2 F = 0$$

équation de l'oscillateur harmonique (A est réel), de solution générale

$$F(\rho) = \alpha \cos(A\rho) + \beta \sin(A\rho)$$

soit

$$f(\rho) = \alpha \frac{\cos(A\rho)}{\rho} + \beta \frac{\sin(A\rho)}{\rho}$$

Comme la solution ne peut pas physiquement diverger lorsque ρ tend vers 0, car alors la température divergerait, la constante α doit être nulle. La solution physiquement acceptable pour f s'écrit donc

$$f(\rho) = \beta \frac{\sin(A\rho)}{\rho}$$

avec une limite $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = \beta A$ définie en $\rho = 0$.

c) L'équation de la chaleur est linéaire, donc on peut considérer une combinaison linéaire de solutions $f(\rho)g(\tau)$ de la forme précédente (à l'exception de la constante T_{eb} qui est simplement introduite pour satisfaire les conditions aux limites étudiées plus loin). En indiquant les solutions correspondant aux différentes valeurs possibles de A_i , dénombrables car il y a quantification des modes propres à cause des conditions aux limites), on peut écrire

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \sum_i \beta_i \frac{\sin(A_i \rho)}{\rho} \exp(-A_i^2 \tau)$$

La solution générale doit vérifier :

- des conditions aux limites en $\rho = 1$ ($r = r_2$) traduisant pour toute valeur de τ la continuité de la température et du flux thermique à la surface de l'œuf ;
- une condition initiale en $\tau = 0$ traduisant le profil de température initial de l'œuf.

II.B.4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

a) Le flux entrant par convection dans l'œuf est donné par la loi de Newton

$$\phi = \iint_{\rho=1} \vec{j}_{\text{th}} \cdot dS(-\vec{e}_r) = h(T_{\text{eb}} - T(\rho = 1, \tau))4\pi r_2^2$$

où la loi de Newton donnée par l'énoncé tient compte de la continuité de la température à la surface de l'œuf.

Par continuité du flux, le flux entrant s'exprime également comme le flux conductif immédiatement sous la surface de l'œuf ($\rho = 1^-$), exprimé en utilisant la loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$:

$$\phi = \iint_{\rho=1} \vec{j}_{\text{th}} \cdot dS(-\vec{e}_r) = 4\pi r_2^2 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_2} = 4\pi r_2 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1}$$

la dernière relation découlant du changement de variable $r = r_2 \rho$.

L'égalité des deux expressions précédentes du flux, qui traduit sa continuité conduit à la relation

$$h(T_{\text{eb}} - T(\rho = 1, \tau))4\pi r_2^2 = 4\pi r_2 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} : \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \frac{hr_2}{\lambda} (T_{\text{eb}} - T(\rho = 1, \tau))$$

On reporte l'expression donnée dans le cas de l'approximation de Fourier

$$\beta \left(\frac{A\rho \cos(A\rho) - \sin(A\rho)}{\rho^2} \right)_{\rho=1} \exp(-A^2 \tau) = \frac{hr_2}{\lambda} \left(\frac{-\beta \sin(A\rho)}{\rho} \right)_{\rho=1} \exp(-A^2 \tau)$$

soit après simplification par $\beta \exp(-A^2 \tau)$

$$A \cos(A) - \sin(A) = -\frac{hr_2}{\lambda} \sin(A) ; A = \left(1 - \frac{hr_2}{\lambda} \right) \tan(A)$$

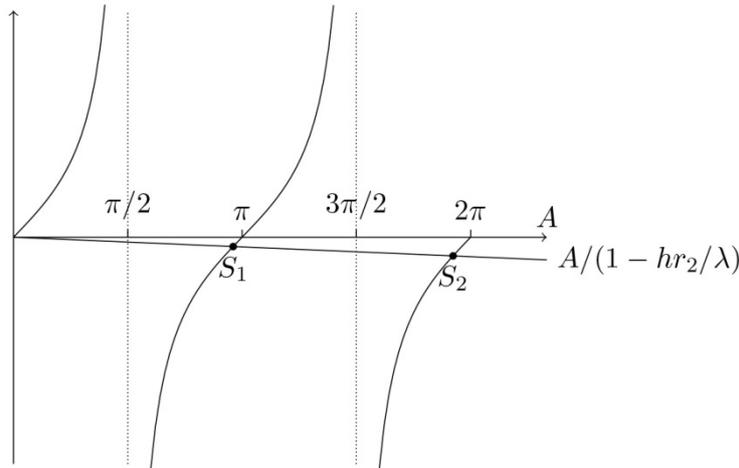
ce qui correspond à l'équation donnée par l'énoncé.

b) L'application numérique pour un œuf moyen ($r_2 = 2,5 \text{ cm}$, $\lambda = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $h = 1200 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$) donne

$$\frac{hr_2}{\lambda} = 50$$

soit l'équation $\tan A = -A/49$. Comme chaque branche de la fonction \tan varie entre $\pm\infty$, l'équation possède une solution par intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, en plus de la solution exclue $A = 0$, qui conduit à un profil uniforme et constant. La première solution est située dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$, et vérifie approximativement $\tan A = -A/49 \ll 1$, soit de manière approchée $\tan A \approx 0$, qui admet dans cet intervalle la solution $A = \pi$.

Remarque : Pour éviter des calculs stériles, l'énoncé aurait pu suggérer une recherche graphique des solutions par la superposition des tracés de la fonction tangente et de la droite $A/(1 - hr_2/\lambda)$ qui montre que lorsque hr_2/λ augmente les solutions se rapprochent de $k\pi$ où k est un entier.



recherche graphique des solutions (S_1 et S_2)
de l'équation $\tan A = A/(1 - hr_2/\lambda)$

Les candidats possédant une calculatrice avec fonction solve pouvaient directement trouver $A = 3,079 \text{ rad}$, soit une erreur de $0,063 \text{ rad}$.

Sinon il faut effectuer un calcul approché en posant $A = \pi - \epsilon$, avec $\epsilon \ll 1$, soit $\tan A \approx -\epsilon$ et $A/49 \approx -\pi/49$, d'où la valeur approchée de l'erreur

$$\epsilon = \frac{\pi}{49} = 0,064 \text{ rad}$$

proche de la valeur précédente.

c) On prend la valeur approchée $A = \pi$, soit

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \beta \frac{\sin(\pi\rho)}{\rho} \exp(-\pi^2\tau)$$

qui conduit à la valeur de la température à la surface de l'œuf ($\rho = 1$, donc $\sin(\pi\rho) = 0$)

$$T(\rho = 1, \tau) = T_{\text{eb}}$$

La température de surface de l'œuf est égale à la température de la vapeur d'eau hors couche limite, ce qui correspond au cas limite $h \rightarrow \infty$ (transfert convectif non nul pour $T(\rho = 1) = T_{\text{eb}}$)

d) au centre de l'œuf ($0 = r = r_2\rho$), en utilisant la relation $\lim_{x \rightarrow 0}(\sin x/x) = 1$ (non fournie par l'énoncé)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \beta\pi \exp(-\pi^2\tau) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} = T_{\text{eb}} + \pi\beta \exp(-\pi^2\tau)$$

soit à l'instant initial

$$\begin{aligned} T(0, 0) &= T_{\text{eb}} + \pi\beta = T_0 \\ \beta &= -\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{\pi} \end{aligned}$$

D'où le profil approché de température

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} - (T_{\text{eb}} - T_0) \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} \exp(-\pi^2\tau)$$

II.B.5) Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un œuf dur

a) On utilise l'expression précédente, pour déterminer la valeur de τ pour laquelle la température au centre ($\rho = 0$) atteint T_c

$$\begin{aligned} T_c = T(0, \tau) &= T_{\text{eb}} - (T_{\text{eb}} - T_0) \exp(-\pi^2\tau) \\ \tau &= \frac{1}{\pi^2} \ln \left(\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right) \end{aligned}$$

soit, comme $t = \theta\tau$

$$\Delta t_2 = \frac{\theta}{\pi^2} \ln \left(\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right) ; \quad \theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}$$

b) Pour $r_2 = 2,5 \text{ cm}$, $\mu = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $c = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\lambda = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $T_{\text{eb}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ et $T_c = 80 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\theta = 4,35 \times 10^3 \text{ s} ; \quad \Delta t_2 = 612 \text{ s} \approx 10 \text{ min}$$

C'est l'ordre de grandeur du temps de cuisson d'un œuf dur.

Remarque : on peut vérifier qualitativement que la forme approchée du profil de température est utilisable à l'instant Δt_2 , du fait de l'amortissement temporel de plus en plus rapide des modes propres. À l'instant Δt_2 , $e^{-\pi^2\tau} \approx 0,25$, alors que pour le terme suivant du développement, $A_2 \approx 2\pi$ et $e^{-4\pi^2\tau} \approx 4 \times 10^{-3}$.

II.C - Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

II.C.1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur

L'énergie nécessaire à la cuisson d'un œuf dur correspond à l'élévation de température du profil initial $T(r, 0) = T_0$ au profil déterminé dans la partie précédente, avec $T_c < T(r, \Delta t_2) < T_{\text{eb}}$. La variation d'énergie associée a pour expression

$$\mathcal{E}_d = \iiint_{0 \leq r \leq r_2} \mu c (T(r, \Delta t_2) - T(r, 0)) dV$$

Pour en estimer des bornes inférieure et supérieure, on considère des profils de température uniformes :

a) **borne inférieure** $T(r, \Delta t_2) \geq T_c$, donc

$$\mathcal{E}_d \geq \frac{4\pi r_2^3}{3} \mu c (T_c - T_0) = 16,4 \text{ kJ}$$

b) **borne supérieure** de même $T(r, \Delta t_2) \leq T_{\text{eb}}$, donc

$$\mathcal{E}_d \leq \frac{4\pi r_2^3}{3} \mu c (T_{\text{eb}} - T_0) = 21,9 \text{ kJ}$$

c) La moyenne des deux valeurs précédentes vaut

$$\mathcal{E} = 19,2 \text{ kJ}$$

proche de la valeur donnée plus loin dans l'énoncé.

II.C.2)

Pour le système fermé associé au système ouvert considéré, pendant dt et en régime permanent

$$dH = D_m dt (h_s - h_e) = D_m dt \Delta h = D_m \ell_v dt$$

car la variation d'enthalpie massique Δh correspond à la vaporisation isobare de l'eau initialement à T_{eb} après la période de chauffe.

L'eau ne reçoit pas de travail dans le cuiseur. Les transferts thermiques *reçus* par l'eau sont :

- le transfert reçu de la résistance chauffante $\mathcal{P} dt$;
- les transferts thermiques associés aux pertes $-\mathcal{P}_f$, où $\mathcal{P}_f > 0$ est implicitement compté vers l'extérieur, comme le montre l'équation proposée par l'énoncé ;
- les transferts thermiques avec les œufs $-n \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt$.

Le premier principe s'écrit alors

$$D_m \ell_v dt = \left(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) dt$$

soit la relation

$$D_m \ell_v = \left(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)$$

II.C.3)

En supposant les grandeurs \mathcal{P} et \mathcal{P}_f constante dans le temps la relation intégrée par rapport au temps entre $t = 0$ et Δt_2 s'écrit

$$\ell_v \int_0^{\Delta t_2} D_m dt = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n (\mathcal{E}(\Delta t_2) - \mathcal{E}(0))$$

Or Δt_2 représente le temps de cuisson de l'œuf dans le mode de cuisson choisi, et $\int_0^{\Delta t_2} D_m dt$ représente la masse de vapeur ayant quitté le cuiseur pendant le temps de cuisson, donc la masse d'eau m_0 vaporisée durant la cuisson, ce qui permet d'écrire le bilan précédent sous la forme

$$m_0 \ell_v = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n \mathcal{E}_X ; m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n \mathcal{E}_X}{\ell_v}$$

Le paradoxe apparent soulevé dans l'introduction du problème est contenu dans ce bilan : plus il y a d'œufs, plus le transfert thermique entre la vapeur et les œufs donc la liquéfaction d'une partie de cette vapeur sont importants, ce qui se traduit par un débit de vapeur plus faible en sortie du cuiseur. Le temps de cuisson étant inchangé, la masse d'eau nécessaire est plus faible.

II.C.4)

La masse d'eau à introduire est nécessairement positive, d'où

$$\mathcal{P} = \frac{m_0 \ell_v + n \mathcal{E}_d}{\Delta t_2} + \mathcal{P}_f > \frac{n \mathcal{E}_d}{\Delta t_2} + \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\min}$$

Pour $n = 7$, $\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}$, $\Delta t_2 = 10 \text{ min}$ et $\mathcal{P}_f \approx 0$

$$\mathcal{P}_{\min} = 222 \text{ W}$$

qui est effectivement inférieur à la puissance du cuiseur.

II.C.5)

La relation $m_0(n)$ est la relation précédente

$$m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2}{\ell_v} - \frac{\mathcal{E}_X}{\ell_v} n$$

Il s'agit d'une relation affine, ce qui est confirmé par le graphique. Elle est caractérisée par :

- une pente $-\mathcal{E}_X/\ell_v$, qui dépend du type de cuisson par l'intermédiaire de \mathcal{E}_X . \mathcal{E}_X augmente quand on passe de la cuisson coque à la cuisson dur, ce qui correspond à une pente de plus en plus importante, caractéristique que l'on retrouve dans les graphiques.

Pour les œufs cuits dur, la pente vaut $-5,94 \text{ g}$, soit

$$\mathcal{E}'_d = 13,4 \text{ kJ}$$

valeur légèrement inférieure à celle donnée dans l'énoncé ($\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}$) pour des œufs de rayon $r_2 = 2,5 \text{ cm}$. L'énergie nécessaire à la cuisson est proportionnelle à la masse, donc au volume de l'œuf, et dans le modèle sphérique au cube de son rayon. Par conséquent

$$\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d} = \left(\frac{r'_2}{r_2}\right)^3 ; r'_2 = \left(\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d}\right)^{1/3} r_2 = 2,2 \text{ cm}$$

- d'ordonnée à l'origine $\frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2}{\ell_v}$ fonction du mode de cuisson via Δt_2 . Ce temps, donc l'ordonnée à l'origine augmente lorsqu'on passe d'une cuisson coque à une cuisson dur, ce qui apparaît également sur le graphique. Pour les œufs cuits dur, on trouve 126 g . En négligeant les pertes ($\mathcal{P}_f \approx 0$, $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$) on obtient pour les œufs cuits dur

$$\Delta t'_2 = 814 \text{ s} = 13,5 \text{ min}$$

Le temps est donc sensiblement plus élevé que la valeur théorique. Ceci n'est pas dû à la taille de l'œuf utilisé pour le calibrage, puisque celui-ci est plus petit que celui donné en référence dans l'énoncé, donc cuit plus rapidement. Une partie de l'eau reste sous forme liquide sur les parois du cuiseur et des œufs en fin de cuisson, donc la masse d'eau nécessaire est supérieure à celle calculée avec l'expression précédente, mais cela ne suffit certainement pas à expliquer l'écart.

Partie B - Vidange d'une citerne (E3A - PSI - 2016)

(D1) Bernoulli : Écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène.

(D2) Si $\rho_m = \text{cte}$ alors $\rho_A V_A S_A = \rho_B V_B S_B \Leftrightarrow \underline{V_A S_A = V_B S_B}$

(D3) . Si $S_A \gg S_B$ alors $V_A \ll V_B$
 . Or $P_B = P_A \Rightarrow \frac{1}{2} \rho (V_B^2 - V_A^2) = -\rho g (z_B - z_A) \Rightarrow \frac{1}{2} \rho V_B^2 = \rho g h$

$$\text{Donc } \underline{V_B = \sqrt{2gh}}$$

(D4) Par définition $V_A = -\frac{dh}{dt} = \frac{S_B}{S_A} V_B \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{S_B}{S_A} \sqrt{2gh}$

$$\Leftrightarrow \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^T \sqrt{2g} \frac{S_B}{S_A} (-dt)$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{H} = -T \sqrt{2g} \frac{S_B}{S_A}$$

$$\Leftrightarrow \underline{T = \frac{S_A}{S_B} \sqrt{\frac{2H}{g}}} = 4 \text{ s} \approx \underline{\underline{7 \text{ min } 3 \text{ s}}}$$

(E1) D'après (D3) et la relation donnée : $\frac{1}{2} \rho V_B^2 = \rho g h - \frac{1}{2} k_c \rho V_B^2$

$$\Leftrightarrow \frac{V_B^2}{2} [1 + k_c] = gh \Leftrightarrow \underline{V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1+k_c}}}$$

(E2) Par analogie de (1) on remplace g par $\frac{g}{1+k_c} \Rightarrow \underline{T' = \sqrt{1+k_c} T} = 56 \text{ s} = \underline{\underline{9 \text{ min } 26 \text{ s}}}$

(F1) On est en régime stationnaire : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \Sigma \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{p_{c1} \pi r^2}_{F_{p,c1}} - \underbrace{p_{c2} \pi r^2}_{F_{p,c2}} - \underbrace{\rho g (z_2 - z_1) \pi r^2}_{\text{Poids}} + \underbrace{\eta \frac{dV}{dr} 2\pi r l}_{\text{cisaillement}} = 0$$

$$\text{D'où : } \frac{dV}{dr} = \frac{r}{2} [\rho c_2 - \rho c_1 + \rho g (z_2 - z_1)] \times \frac{1}{\eta l}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{dr} = -\alpha [\tilde{p}_{c1} - \tilde{p}_{c2}] r \quad \text{où } \alpha = \frac{1}{2\eta l} \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{p}_{c1} = p_{c1} + \rho g z_1 \\ \tilde{p}_{c2} = p_{c2} + \rho g z_2 \end{array} \right| \textcircled{2}$$

de fluide s'écoule vers le haut, ce qui est possible si $p_{c2} - p_{c1} < 0$. Le coefficient α est positif
 alors $\frac{dV}{dr} > 0$: la vitesse décroît lorsqu'on va vers l'extérieur du cylindre
 \Rightarrow le signe de α est cohérent

$$\textcircled{F2} \quad \textcircled{2} \text{ s'intègre en } V(r) = \frac{\alpha r^2}{2} (\tilde{p}_{c2} - \tilde{p}_{c1}) + \text{cte}$$

$$\alpha V(a) = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{\alpha}{2} (\tilde{p}_{c2} - \tilde{p}_{c1}) [r^2 - a^2]$$

$$\Rightarrow V(r) = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad \text{où } V_{\max} = \frac{\alpha a^2}{2} (\tilde{p}_{c1} - \tilde{p}_{c2}) \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{F3} \quad \text{Donc } Q_v = \iint_S V(r) dS = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} V_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) r dr d\theta$$

$$= V_{\max} \times 2\pi \times \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right] = \frac{\pi a^2}{2} V_{\max}$$

$$\Leftrightarrow Q_v = \frac{\alpha \pi a^4}{4} (\tilde{p}_{c1} - \tilde{p}_{c2})$$

$$\textcircled{F4} \quad \text{La vitesse moyenne ou débitante est t.q. } Q_v = V_{\text{moy}} \cdot \pi a^2$$

$$\Rightarrow V_{\text{moy}} = \frac{\alpha a^2}{4} (\tilde{p}_{c1} - \tilde{p}_{c2})$$

$$\textcircled{F5} \quad \text{Soit } \Delta p_r = \tilde{p}_{c1} - \tilde{p}_{c2} = \frac{\rho}{2} e V_{\text{moy}}^2 \frac{l}{d} \Leftrightarrow \frac{\rho}{2} e V_{\text{moy}}^2 \frac{l}{d} = \frac{4 V_{\text{moy}}}{\alpha a^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 8 \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{1}{\alpha a^2 e V_{\text{moy}}} \quad \text{à } \alpha = \frac{1}{2\eta l} \Rightarrow \lambda = 16 \cdot \frac{d\eta}{\rho a^2 V_{\text{moy}}}$$

$$\text{à } d = 2a \Rightarrow \lambda = 32 \cdot \frac{\eta}{\rho a V_{\text{moy}}}$$

(F6) Re est défini par: $Re = \rho \frac{V_{moy} d}{\eta} = \rho V_{moy} a \times \frac{2}{\eta}$

d'où $\lambda = 64/Re$

(F7) A.N: $Re = 27.10^3$

(F8) On a donc $Re > 2000 \Rightarrow$ le régime est turbulent: l'hypothèse d'écoulement laminaire est fautive.

(G1) Soit $K_{total} = K_c + K_{e1} + K_{e2} + K_d + K_{pompe}$

$$\Leftrightarrow K_{total} = 0,55 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[0,131 + 1,847 \times \left(\frac{0,036}{0,1} \right)^{7/2} \right] + 6$$

$\Leftrightarrow K_{total} = 9,64$

(G2) Soit $\Delta p_{s,total} = K \cdot \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 = 0,82 \text{ bar}$

(G3) Soit $\Delta p_r = \frac{\lambda}{4} \rho V_{moy}^2 \frac{l}{a} = 0,58 \text{ bar}$

(G4) La section est la même dans tout le circuit d'où $Q_v = V_{moy} \cdot S_B = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

(G5) On a: $P_e = \frac{P_{me}}{r} = \frac{Q_v}{r} \left[\frac{1}{2} (V_E^2 - V_A^2) \rho + \rho g (z_E - z_A) + (P_E - P_A) + \Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot} \right]$

$$\Leftrightarrow P_e = \frac{Q_v}{r} \left[\frac{1}{2} \rho V_E^2 + \rho g (z_E - z_A) + \Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot} \right]$$

$= 860 \text{ kW}$