Physique : DM2 (optionnel)

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les marées

Données :

— distance Terre Lune : $d_L = 3,8.10^8\ m$

— distance Terre Soleil : $d_S = 1.5.10^{11}\ m$

— rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^6\ m$

— masse du Soleil : $m_S = 2.10^{30}\ kg$

— masse de la Terre : $m_T = 6.10^{24}\ kg$

— masse de la Lune : $m_L = 7,3.10^{22}\ kg$

— constante de gravitation universelle : $G = 6,7.10^{-11}\ kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

Lexique :

— pleine mer : hauteur maximale de la marée

— basse mer : hauteur minimale de la marée

— marnage : différence de hauteurs entre une pleine mer et une basse mer consécutives

— vive-eau : marée pendant laquelle le marnage est maximal

— phase de la pleine mer : heure à laquelle la pleine mer est atteinte

PREMIERE PARTIE
LE PHENOMENE DE MAREES

A / NOTIONS QUALITATIVES SUR LES MAREES

La carte reproduite dans la figure 1 représente l'évolution de la marée réelle dans la Manche. Les nombres indiqués sous certains ports sont la phase de la pleine mer et le marnage par vive-eau. On trouve deux types de courbes :

— *Les lignes cotidales (avec une indication en heures) représentent les points dans le même «état de marée» (pleine mer) à un instant donné (les valeurs données correspondent à la date de la pleine mer par rapport à une référence arbitraire).*

— *Les lignes iso-marnage (avec une indication en mètres) représentent les points avec un même marnage (le marnage est la différence de hauteur entre la pleine mer et la basse mer).*

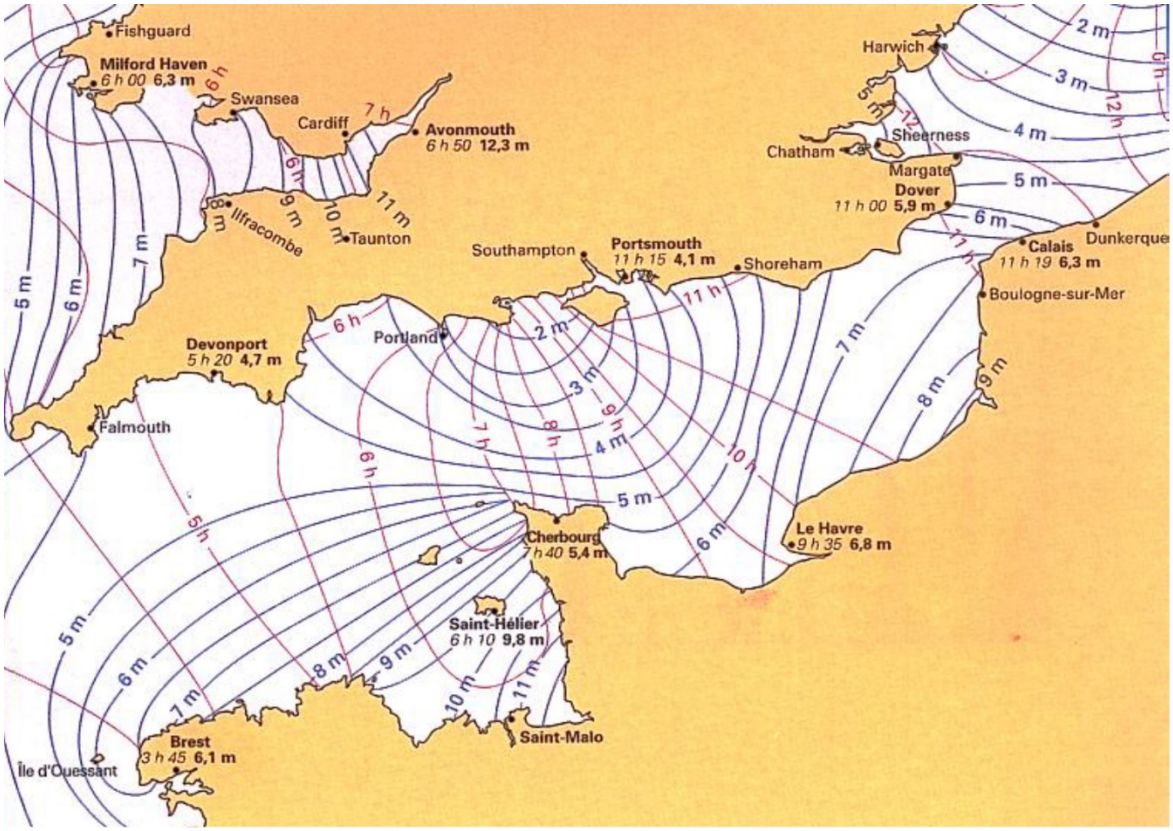

FIGURE 1

A1. A quels endroits de la carte les marées sont-elles les plus importantes ? Est-ce dû à une particularité géographique ? On attend une réponse brève.

A2. On peut envisager l'évolution spatiale et temporelle de la hauteur d'eau due aux marées comme résultant de la propagation d'une *onde de marée*. Dans quel sens se déplace cette onde de marée dans la Manche ? Une explication basée sur la rotation propre de la Terre est-elle satisfaisante ? Justifier.

A3. Donner (sans explication) un ordre de grandeur de la périodicité des marées océaniques. Donner un ordre de grandeur de la vitesse de déplacement de l'onde de marée dans la Manche (à titre de point de repère, la distance entre Saint-Malo et Brest est de l'ordre de 200km). En déduire un ordre de grandeur de la longueur d'onde associée.

A4. Dans la Manche la marée est déviée vers les côtes françaises, ce qui a pour conséquence des marnages plus importants que sur les côtes anglaises. Interpréter cette déviation (un schéma clair est attendu).

A5. A l'ouest de la ville de Saint-Malo, on distingue sur la carte l'estuaire de la Rance où est implantée une usine marémotrice. Justifier ce choix d'implantation ; pourquoi ne pas avoir fait de même sur l'estuaire de la Seine, au niveau du Havre (Normandie, Seine-Maritime) ?

Les 3/2 ne feront pas les questions B2 et B3 qui portent sur une partie du programme qu'on n'a pas encore fait.

B / CHAMP DE MAREE

Les marées sont dues aux champs de gravitation au niveau de la Terre des différents astres du système solaire, principalement la Lune et le Soleil. On considérera que les astres ont une distribution de masse à symétrie sphérique.

B1. Donner sans justification l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{g_A}(M)$ créé par l'astre A, de masse m_A et de centre O, en un point M en dehors de l'astre. On pourra noter $r = OM$ la distance entre O et M et $\overrightarrow{e_r}$ un vecteur unitaire dirigé de O vers M.

On cherche maintenant à établir cette expression.

B2. Montrer par des considérations de symétrie que $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(r)\overrightarrow{e_r}$.

B3. Enoncer le théorème de Gauss dans le cadre de l'électromagnétisme, puis le transposer au cas de la gravitation. Utiliser ce résultat pour retrouver l'expression donnée au B1. Préciser quelle est la simplification dans l'expression du champ de gravitation en dehors de l'astre apportée par la symétrie sphérique de la distribution de masses.

L'influence d'un astre sur les marées découle d'une petite différence entre la force de gravitation qu'il exerce et la force d'inertie dont il est responsable dans le référentiel géocentrique . On établit ici l'expression du champ de marée en prenant le Soleil comme exemple (dans les trois questions qui suivent, on ne considère que les forces de gravitation dues au soleil), mais le résultat est valable pour n'importe quel astre. Dans toute la suite, on considérera le référentiel héliocentrique (R_h) comme galiléen.

B4. Décrire le mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique et en déduire l'expression de la force d'inertie d'entrainement sur un point matériel M de masse m dans le référentiel géocentrique. On notera $\overrightarrow{a}_{T/R_h}$ l'accélération de T (centre de la Terre) dans le référentiel héliocentrique.

B5. Etablir que $\overrightarrow{a}_{T/R_h} = \overrightarrow{g_S}(T)$, où $\overrightarrow{g_S}(T)$ est le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la terre T. La Terre sera supposée avoir une distribution de masse à symétrie sphérique, ce qui fait que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est assimilable au produit de la masse de la terre par le champ de gravitation du Soleil en son centre.

B6. En déduire que la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entrainement dans le référentiel géocentrique dues au Soleil sur un point matériel M de masse m s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{C_S}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{C_S}(M) = -Gm_S\left(\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)$$

où S désigne le centre du Soleil, m_S sa masse, et G la constante de gravitation universelle.
$\overrightarrow{C_S}(M)$ est appelé *champ de marée* du Soleil au point M.

Les marées sont essentiellement dues à l'influence de la Lune, celle du Soleil se traduisant par une plus ou moins grande amplitude (marées de vives eaux et de mortes eaux). Dans la suite on ne considère que l'influence de la Lune. Le résultat de la question B6 est transposable à n'importe quel astre, l'expression du champ de marée dû à la Lune est donc (L désignant le centre de la Lune) :

$$\overrightarrow{C_L}(M) = -Gm_L\left(\frac{\overrightarrow{LM}}{LM^3} - \frac{\overrightarrow{LT}}{LT^3}\right)$$

Sur le schéma de la figure 2 on indique quelques points particuliers à la surface de la Terre, relativement à la position de la Lune.

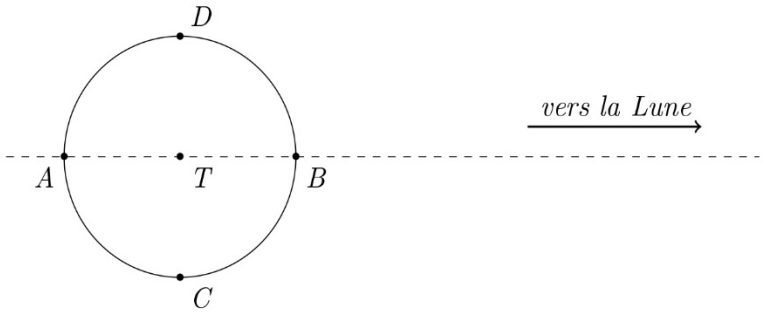

FIGURE 2

B7. Reprendre le dessin précédent et représenter en A, B, C et D la force gravitationnelle et la force d'inertie dues à la lune, ainsi que leur résultante (proportionnelle au champ de marée).

B8. Indiquer les points (parmis A, B, C et D) de marée haute et de marée basse. Dans quel plan sont situés tous les points de marée basse ?

B9. En utilisant la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique.

B10. Donner un ordre de grandeur de la période de rotation propre de la Terre. Conclure sur la périodicité (approximative) des marées.

On cherche à simplifier l'expression du champ de marée, en tenant compte du fait que, pour un point M à la surface de la terre, $TM << TL$ et en effectuant un développement limité au premier ordre en $\frac{TM}{TL}$. On posera $TM = r$ et $TL = d_L$, et on repérera la position de M, dans le plan contenant L, T et M, en coordonnées polaires (voir la figure 3).

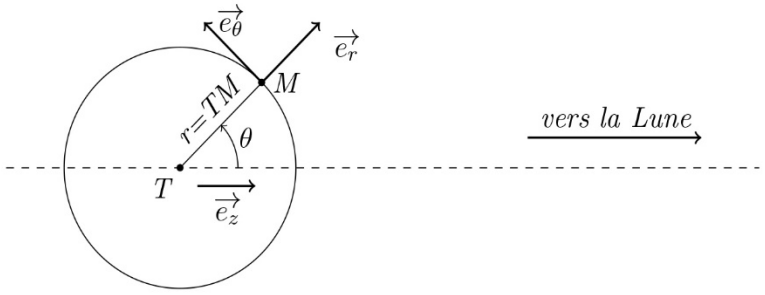

FIGURE 3

B11. Montrer que $\overrightarrow{LM} = -d_L\overrightarrow{e_z} + r\overrightarrow{e_r}$. En déduire que, au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$, on a $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{{d_L}^3}\left(1 + \frac{3r\cos(\theta)}{d_L}\right)$.

B12. En déduire que, toujours au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$:

$$\overrightarrow{C_L}(M) = \frac{Gm_L r}{{d_L}^3}\left(3\cos(\theta)\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_r}\right)$$

En projetant $\overrightarrow{e_z}$ sur la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, on obtient finalement :

$$\overrightarrow{C_L}(M) = \frac{G m_L r}{{d_L}^3}\left(\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)\overrightarrow{e_r} - 3\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

B13. Montrer que le l'influence de la Lune sur les marées est de l'ordre de 2 fois plus importante que celle du soleil.

B14. Préciser les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour les marées de vives eaux (amplitude maximale, les effets de la Lune et du Soleil s'ajoutent) et pour les marées de mortes eaux (amplitude minimale, les effets de la Lune et du Soleil se compensent partiellement). Attention à bien indiquer deux configurations distinctes pour chaque cas. Indiquer le lien avec les phases de la Lune et donner un ordre de grandeur de la périodicité de l'alternance vives-eaux / mortes-eaux.

C / AMPLITUDE DES MAREES OCEANIQUES

On considère dans cette partie un modèle simple : la Terre est entièrement recouverte d'eau. On obtient ainsi des résultats pertinents pour l'amplitude des marées en haute mer, mais qui n'expliquent pas les phénomènes observés près des côtes. On se place dans le cadre d'un modèle quasi-statique où la forme des océans à un instant donné obéit à la loi de l'hydrostatique (p désigne la pression et $\overrightarrow{f_v}$ la résultante des forces volumiques) :

$$\overrightarrow{grad}(p) = \overrightarrow{f_v}$$

Dans toute cette partie on ne considère que l'influence de la Lune (et pas celle du Soleil). Le marnage*, que l'on notera Δh, est la différence de hauteur d'eau entre la marée haute et la marée basse en un endroit donné.*

C1. On commence par une approche dimensionnelle : on considère que, outre le facteur $\frac{m_L}{{d_L}^3}$ mis en évidence précédemment, la masse de la Terre m_T et son rayon R_T interviennent sur le marnage et on pose :

$$\Delta h = \frac{m_L}{{d_L}^3} {m_T}^\alpha {R_T}^\beta$$

Déterminer les coefficients α et β pour que Δh ait bien les dimensions d'une longueur et calculer numériquement la valeur de Δh qui en résulte.

C2. Que traduit la loi de l'hydrostatique ? Quelle est la dimension de ses termes ? Le terme $\overrightarrow{f_v}$ traduit ici l'attraction gravitationnelle due à la Terre, celle due à la Lune ainsi que la force d'inertie d'entrainement dans le référentiel géocentrique due à la Lune. Donner l'expression de $\overrightarrow{f_v}$ en utilisant, pour ce qui est des effets dus à la Lune, le résultat donné dans la partie B. On notera μ la masse volumique de l'eau.

On pose $\overrightarrow{f_v} = -\overrightarrow{grad}(V_T + V_L)$, où V_T est l'énergie potentielle volumique associée à l'attraction gravitationnelle de la Terre et V_L l'énergie potentielle volumique associée aux effets dus à la Lune. On donne l'expression du gradient d'une fonction scalaire f en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

C3. Etablir l'expression de V_T, en expliquant bien le choix de la constante.

On donne $V_L = -\mu G \frac{m_L}{{d_L}^3} \frac{r^2}{2} \left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$. *La pression atmosphérique est considérée uniforme à la surface de l'eau, et on néglige les phénomènes de tension superficielle.*

C4. Montrer que dans ces conditions la surface de l'eau vérifie $V_T + V_L = cste_1$, et en déduire que, toujours à la surface de l'eau, $\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{{d_L}^3} \frac{r^2}{2} \left(3\cos^2(\theta) - 1\right) = cste_2$

On détermine (en écrivant que, l'eau étant considérée comme incompressible, le volume des océans est le même avec et sans déformation) que la constante introduite précédemment vaut $\frac{m_T}{R_T}$.

C5. La déformation h étant petite par rapport à R_T, on pose $r = R_T + h$ avec $\frac{h}{R_T} << 1$. En effectuant les développements limités au premier ordre en $\frac{h}{R_T}$ adéquats, montrer que :

$$h\left(\frac{m_T}{{R_T}^2} - \frac{m_L R_T}{{d_L}^3}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)\right) \simeq \frac{m_L {R_T}^2}{2{d_L}^3}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$$

Vérifier numériquement que $\frac{m_L R_T}{{d_L}^3} << \frac{m_T}{{R_T}^2}$ et simplifier l'expression en conséquence. On utilisera cette expression dans les deux questions suivantes.

Pour simplifier, on considère que la Lune reste dans le plan équatorial.

C6. Où le marnage Δh est-il le plus important ? Que peut-on dire du marnage aux pôles ?

C7. Etablir l'expression du marnage à l'Equateur et faire l'application numérique.