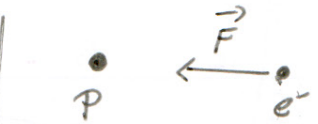
Physique : DM2

Partie A : De l'atome d'H aux galaxies (Centrale PC – 2018)

Q1) Soit $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$



Q2) On a $dE_p = -\vec{F}.\vec{dOM} \Rightarrow E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \underbrace{cste}_{=0}$, avec $\lim_{r\to\infty} E_p = 0$

Q3) Soit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cste}$

$\Rightarrow \vec{v}$ et $\vec{OM} \in$ au même plan qui est toujours orthogonal à $\vec{L}$

$\Rightarrow$ Le mouvement est plan

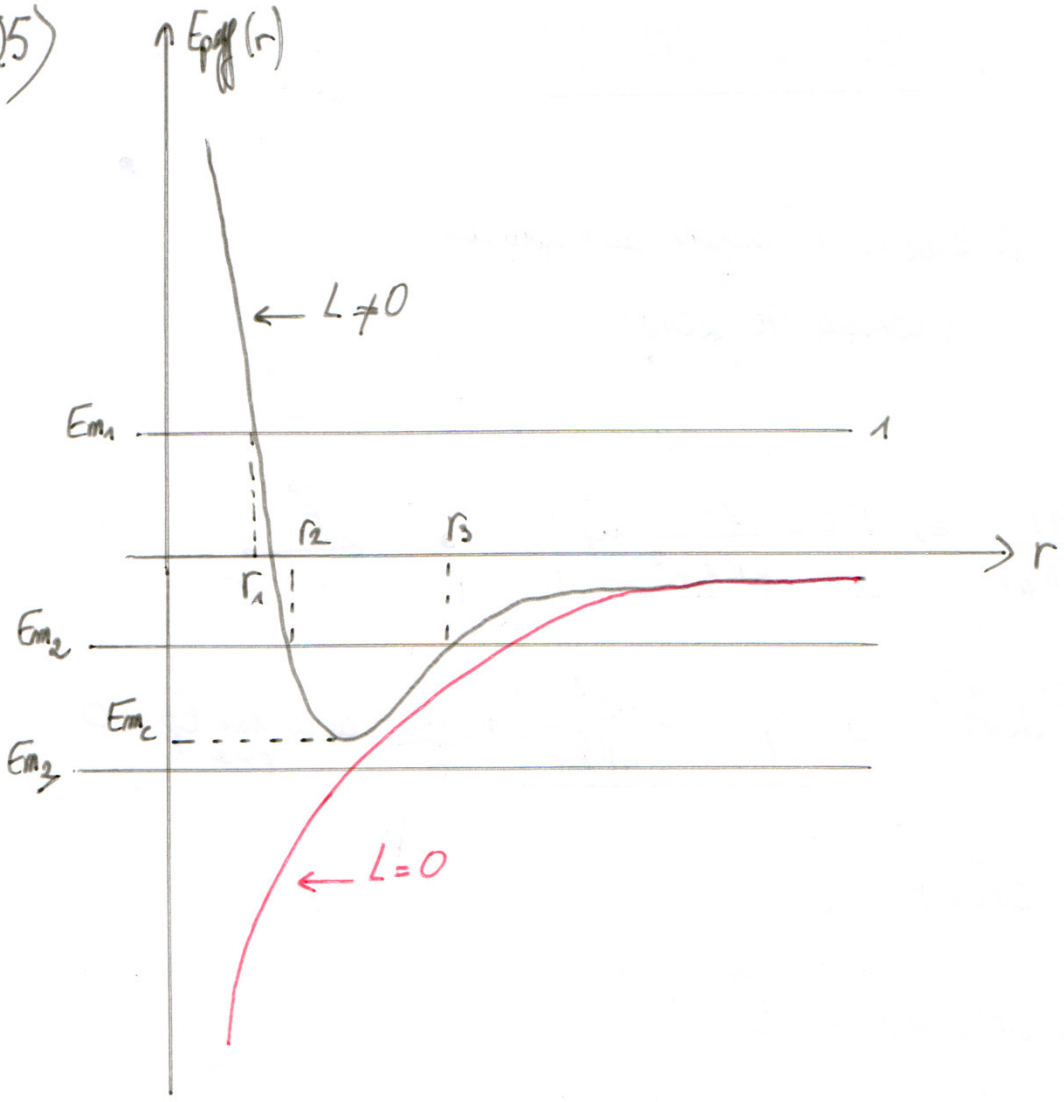
Q4) Soit $E_m = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}m_e\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $\|\vec{L}\| = m_e r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}\|}{m_e r^2} = \frac{L}{m_e r^2}$

d'où $E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{r^2}{2}\cdot\frac{L^2}{m_e r^4}$

$\rightarrow E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ où $E_{peff}(r) = \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Q5)



1er cas : $L \neq 0$

- Si $E_m = E_{m1}$, $r \geq r_1$: état libre (hyperbole)
- Si $E_m = E_{m2}$, $r_2 \leq r \leq r_3$: état lié (ellipse)
- Si $E_m = 0$, parabole.
- Si $E_m = E_{m3}$, états impossibles.

2ème cas : $L = 0$

- Si $E_m > 0$: états impossibles
- Si $E_m < 0$: états libres

Q6) Pour avoir une trajectoire circulaire : $L \neq 0$

$E_m = E_{mc} = E_{pf,min}$

• Soit $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{L^2}{2m_e} \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$

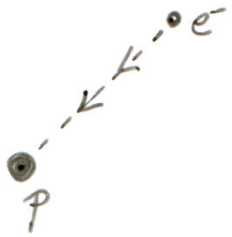
$\Leftrightarrow \frac{L^2}{m_e r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{m_e e^2}$ (1)

• Et $E_m = \frac{1}{2} m_e \frac{L^2}{m_e^2 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ car $\dot{r} = 0$

$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \Rightarrow E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}$ (2)

Q7) Si $L = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ colinéaires
$\Rightarrow$ trajectoire rectiligne



Q8) Soit : $L = mvr = n\hbar$

(1) $\Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2}$

$\Rightarrow r = n^2 a_0$ où $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e \cdot e^2} = 52{,}9$ pm

Q9) (2) $\Rightarrow E_m = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 (n\hbar)^2}$

$\Rightarrow E_m = \frac{E_0}{n^2}$ où $E_0 = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -13{,}6\,eV$

Q10) Soit $\begin{cases} \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \text{(On tient compte des 3 degrés de liberté de translation)} \\ E_i = -E_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2}{3} \frac{|E_0|}{k_B} \simeq 10^5 K}$$

Q11) Soit $|E_m - E_0| = E_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Pour $\begin{cases} n = 2 \text{ on a } |E_2 - E_1| = 10,2 eV \quad \text{cas ①} \\ n \to \infty \text{ on a } |E_m - E_1| = 13,6 eV \quad \text{cas ②} \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} \lambda_1 = hc \cdot \frac{1}{|E_2 - E_1|} = 1,22.10^{-7} m \\ \lambda_2 = hc \cdot \frac{1}{|E_m - E_1|} = 9,13.10^{-8} m \end{cases}$

Partie B : Les marées (E3A – PC – 2015)

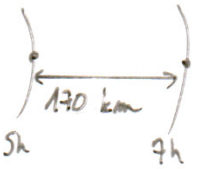
A.1) . Les marées importantes sont dans les baies "normandes" et celles du Pays de Galles :
- Saint-Malo (~ 10-11m)
- Saint-Hélier (9,8m)
- Mont Saint Michel (~ 10m)
- Avonmouth (12,3m)

A.2) . L'onde de marée arrive de l'ouest et est amplifiée dans ces baies.

. Si on tient compte du mouvement de rotation de la terre uniquement, l'onde de marée resterait au place dans le référentiel terrestre : il faut donc chercher une autre explication

A.3) . Il y a à peu près 2 marées par jour $\Rightarrow$ $T \simeq 12\,h$

. Entre Saint-Malo et Brest $d = 200\,km$. On prend deux points différents sur les cotidales

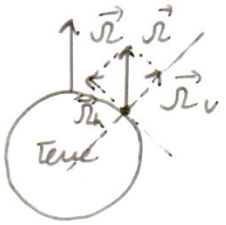


$\Rightarrow v = \dfrac{170.10^3}{2\times 60\times 60} \simeq 24\,m/s$ ou $85\,km/h$

Par définition : $d = vT = 1{,}04\,10^6\,m = 1{,}0.10^3\,km = 1\,$

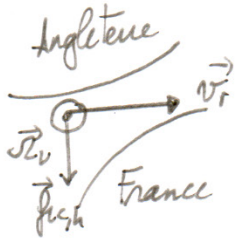
A.4) Dans l'hémisphère nord la force de Coriolis dévie les masses d'eau en courant vers la droite. En effet,

$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$



où $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_h + \vec{\Omega}_v$

Dans le plan terrestre $\vec{f}_{ic,h} = -2m\vec{\Omega}_v\wedge\vec{v}_r$

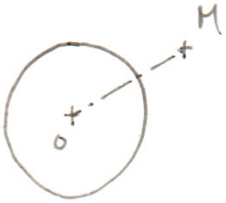


Ainsi la force de Coriolis est dirigée vers les côtes françaises d'où un marnage plus important en France.

A.5) des marées de Saint-Malo sont de 11m alors que celle de l'estuaire du Havre sont de 7m. La récupération d'énergie marémotrice sera plus efficace à "La Rance".

B.1) Pour un astre de masse m_A : $\vec{g}_A = -\frac{Gm_A}{r^2}\vec{e}_r$

B.2)



. Tout plan contenant (OM) est plan de symétrie : $\vec{g}_A(M) = g_A\vec{e}_r$

. Invariance par rotation autour de (OM) : $g_A(M) = g_A(r)$

$\Rightarrow \vec{g}_A(M) = g_A(r)\vec{e}_r$

B.3) Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}_A(M).d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oiint \vec{g}_A(M).d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$

En l'appliquant à l'extérieur de l'astre en un point M t.q $OM = r$ on obtient :

$g_A(M).4\pi r^2 = -4\pi G m_{int}$

$\Leftrightarrow \vec{g}_A(M) = -\frac{Gm_A}{r^2}\vec{e}_r$

B.4) Le référentiel géocentrique est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique d'où :

$$\begin{cases} \vec{f}_{ic} = \vec{0} \\ \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(T)\big|_{R_h} = -m\vec{a}_{T/R_h} \end{cases}$$

B.5) PFD appliqué en T dans R_h :

$$m_T \vec{a}_{T/R_h} = m_T \cdot \vec{g}_S(T)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{T/R_h} = \vec{g}_S(T)}$$

B.6) Soit un pt M dans $R_{géo}$ t.q : $\vec{F} = m\vec{g}_S(M) + \vec{f}_{ie}$

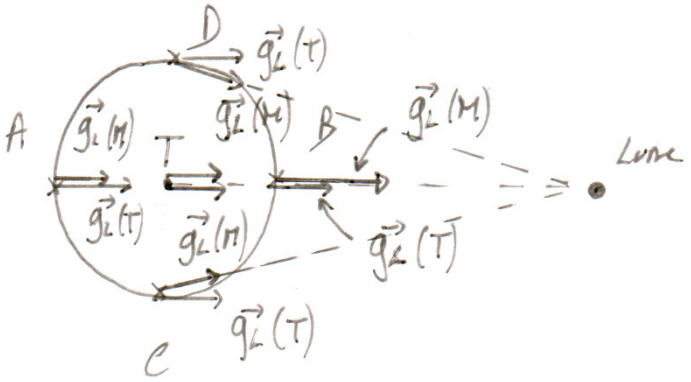
$$= m\vec{g}_S(M) - m\vec{g}_S(T)$$

$$= m\left[\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)\right]$$

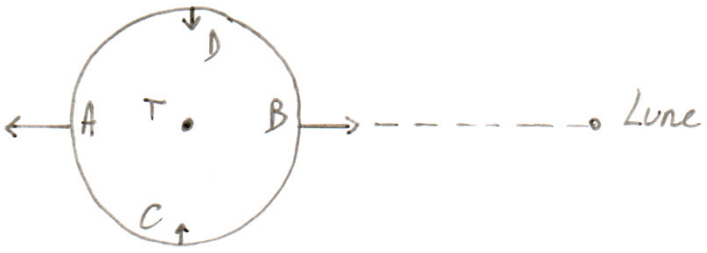
$$= m\left[-\frac{GM_S}{SM^2}\vec{u}_{SM} - \left(-\frac{GM_S}{ST^2}\vec{u}_{ST}\right)\right]$$

Donc $\boxed{\vec{F} = m\vec{G}_S(M) \text{ où } \vec{G}_S(M) = GM_S\left(\frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3}\right)}$

B.7)



D'où les résultantes :



$\begin{cases} \text{En A et B : marées hautes} \\ \text{En C et D : —— basses} \end{cases}$ $\Rightarrow$ des points de marée basse sont dans un plan perpendiculaire à l'axe TL.

B.9) 3ème Loi de Kepler : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}$

$$\Rightarrow \underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{d_L^3}{GM_T}} = 27 \text{ jours}}$$

B.10) Par connaissance : $T_{propre} = 1\text{jour} \Rightarrow T_{Lune} \gg T_{terre}$

On peut ainsi considérer que la lune bouge pas dans un premier temps $\Rightarrow T_{marée} = \frac{T_{terre}}{2} = 12\text{h}$.

Sinon composition des vecteurs "rotation" : $\Omega_{Lune/Rg} = \Omega_{Lune/R_T} + \Omega_{R_T/Rg}$

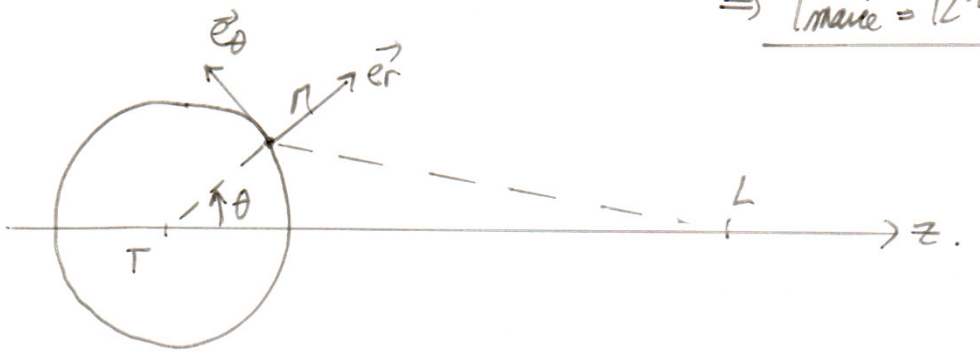
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_{Lune}} = \frac{2\pi}{T_a} + \frac{2\pi}{T_T}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{T_a} = \frac{1}{T_{lune}} - \frac{1}{T_{terre}}}$$

$$\Rightarrow T_a = 25\text{h}$$

$$\Rightarrow \underline{T_{marée} = 12\text{h}30}$$

B.11)



Soit $\underline{\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TM} = -d_L\vec{e_z} + r\vec{e_r}}$

Calculons LM^2 : $LM^2 = \overrightarrow{LM}.\overrightarrow{LM} = d_L^2 + r^2 - 2 r d_L \vec{e}_z.\vec{e}_r$

$= d_L^2 + r^2 - 2 r d_L \cos\theta$.

Donc $\frac{1}{LM^3} = \left(d_L^2 + r^2 - 2 r d_L \cos\theta\right)^{-3/2}$

$= d_L^{-3}\left(1 + \cancel{\left(\frac{r}{d_L}\right)^2} - 2\frac{r}{d_L}\cos\theta\right)^{-3/2}$ car $\left(\frac{r}{d_L}\right)^2 \ll \frac{r}{d_L}$

$\Rightarrow \frac{1}{LM^3} \overset{D.L}{=} \frac{1}{d_L^3}\left(1 + 3\frac{r}{d_L}\cos\theta\right)$

B.12) Or $\vec{C}_L(M) = -Gm_L\left(\frac{\overrightarrow{LM}}{LM^3} - \frac{\overrightarrow{LT}}{LT^3}\right)$

$= -Gm_L\left(\frac{-d_L\vec{e}_z + r\vec{e}_r}{d_L^3}\left(1 + \frac{3r}{d_L}\cos\theta\right) - \frac{-d_L\vec{e}_z}{d_L^3}\right)$

$= -Gm_L\left(\frac{r}{d_L^3}\vec{e}_r\left(1 + \underbrace{\frac{3r}{\cancel{d_L}}\cos\theta}_{\text{ordre 2}}\right) - \frac{d_L}{d_L^3}\vec{e}_z\left(\frac{3r}{d_L}\cos\theta\right)\right)$

$= -Gm_L\left[\frac{r}{d_L^3}\vec{e}_r - \frac{3r}{d_L^3}\cos\theta\vec{e}_z\right]$

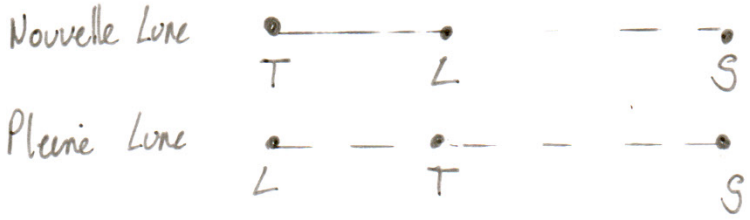
$\Rightarrow \vec{C}_L(M) = \frac{Gm_L r}{d_L^3}\left[3\cos\theta\vec{e}_z - \vec{e}_r\right]$

B.13) Il faut comparer le terme en $\frac{Gm_L}{d_L^3}$

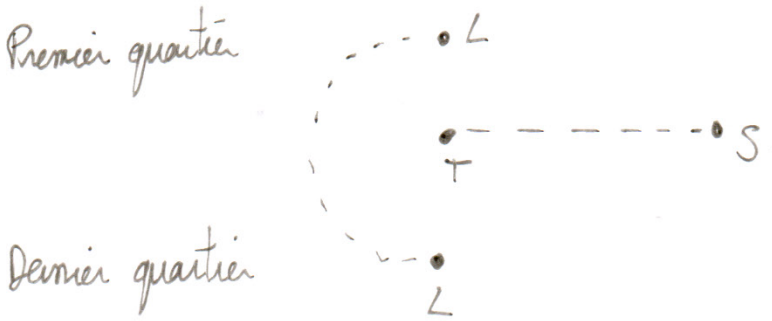
$\Rightarrow \frac{\text{terme Lune}}{\text{terme soleil}} = \frac{m_L}{m_S}\cdot\left(\frac{d_S}{d_L}\right)^3 = 2{,}2$

L'effet de la lune est 2 fois plus important que celui du soleil.

B.14) . Vives eaux :



. Mortes eaux



. Si on s'intéresse seulement à $T_{Lune} = 27\,j \Rightarrow T_{vives\,eaux} = T_{mortes\,eaux}$
$= 13{,}5$ jours.

Sinon $Ta' = \dfrac{T_{rotation/T} - T_{Lune}}{T_{rotation/T}.\,T_{Lune}} = 29{,}2$ jours

$\Rightarrow \underline{T_{ve} = T_{me} \simeq 14{,}6 \text{ jours}}$

C.1) Enoncé : $\Delta h = \dfrac{m_L}{d^3}\, m_T^{\alpha}.\, R_T^{\beta}$

$\Rightarrow L = M L^{-3} \mu^{\alpha} L^{\beta}$ d'où $\begin{cases} 1 = \beta - 3 \\ 0 = 1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

d'où $\underline{\Delta h = \dfrac{m_L}{d^3}\, m_T^{-1} R_T^4 = 0{,}4\,m}$

C.2) . La loi de l'hydrostatique traduit l'équilibre d'une particule de fluide.

. Soit $\overrightarrow{grad}\, p = \rho \vec{g}$

$Pa.m^{-1}$ $N.m^{-3}$

La particule de fluide est soumise à son poids et aux forces de marées :

$$\vec{f_v}.d\mathcal{C} = -\frac{G m_T . dm}{r^2}\vec{e_r} + dm\,\vec{C_L}(T)$$

$$\Rightarrow \vec{f_v} = -\frac{\mu G m_T}{r^2}\vec{e_r} + \mu\,\vec{C_L}(T)$$

$$\Rightarrow \vec{f_v} = -\mu G\left[\frac{m_T}{r^2}\vec{e_r} + \frac{m_L r}{d_L^3}\left[(3\cos^2\theta - 1)\vec{e_r} - 3\sin\theta\cos\theta\,\vec{e_\theta}\right]\right]$$

C.3) Soit $\vec{f_v} = -\overrightarrow{grad}(V_T + V_L)$ d'où : $-\mu G\frac{m_T}{r^2} = -\frac{\partial V_T}{\partial r} \Rightarrow V_T = -\mu G\frac{m_T}{r} + cste$

Or par convention $\lim_{r\to\infty} V_T = 0 \Rightarrow V_T = -\frac{\mu G m_T}{r}$

C.4) • Soit $\overrightarrow{grad}\,p = -\overrightarrow{grad}(V_T + V_L) \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}(p + V_T + V_L) = 0$

$$\Rightarrow p + V_T + V_L = cste$$

A la surface de l'eau $p = cste \Rightarrow V_T + V_L = cste_1$

• Or $\vec{f_v} = -\overrightarrow{grad}(V_T + V_L)$ d'où $V_T + V_L = -\mu G\frac{m_T}{r} - \mu G\frac{m_L r^2}{2d_L^3}(3\cos^2\theta - 1) = cste\,1$

On divise par $-\mu G$: $\frac{m_T}{r} + \frac{m_L r^2}{2d_L^3}(3\cos^2\theta - 1) = cste_1/(-\mu G) = cste\,2 = m_T/R_T$ (énoncé)

C.5) Soit $r = R_T + h$ d'où : $\frac{m_T}{R_T} = \frac{m_T}{R_T + h} + \frac{m_L}{d_L^3}\frac{(R_T+h)^2}{2}(3\cos^2\theta - 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{m_T}{R_T} = \frac{m_T}{R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right) + \frac{m_L}{2d_L^3}\left(R_T^2 + 2hR_T\right)(3\cos^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow h\left(\frac{m_T}{R_T^2} - \frac{m_L}{d_L^3}R_T(3\cos^2\theta - 1)\right) = \frac{m_L}{2d_L^3}R_T^2(3\cos^2\theta - 1)$$

A.N : $\frac{m_T/R_T^2}{m_L R_T/d_L^3} = 1{,}7.10^7$ d'où $m_T/R_T^2 \gg m_L R_T/d_L^3$

$$\Rightarrow h\,m_T/R_T^2 = \frac{m_L}{2d_L^3}R_T^2(3\cos^2\theta - 1)$$

C.6) Le marnage est maximal pour $\theta = 0$ ou π càd <u>à l'équateur</u>. Par contre aux pôles le marnage <u>est "négatif"</u> et moitié moindre.

C.7) A l'équateur : $h_E = \frac{m_L R_T^4}{m_T d_L^3} \sim \underline{0{,}4\,m}$. C'est faible il faut tenir compte des reliefs géographiques.