

# Physique : DM1

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## Partie A: De l'atome d'hydrogène aux galaxies

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 21$  cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies. Après avoir étudié l'origine physique de cette transition, nous verrons l'intérêt d'observer des galaxies dans cette fenêtre de rayonnement.

Ce sujet comprend une annexe située en fin de texte et regroupant des extraits de documents, un formulaire et des données numériques.

### I La raie HI à 21 cm

Un atome d'hydrogène protoné (isotope  $^1\text{H}$  dont le noyau est un proton) dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 21$  cm, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Pour interpréter exactement l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste).

Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie HI à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

#### I.A – Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par  $r$  la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sera noté  $\vec{L}$ .

- Q 1.** Rappeler l'expression de la force électrostatique  $\vec{F}$  s'exerçant sur l'électron.  
**Q 2.** En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_P$  de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand  $r \rightarrow \infty$ .  
**Q 3.** Montrer que le mouvement de l'électron est plan.  
**Q 4.** Déterminer l'énergie mécanique  $E$  de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2}m_e \dot{r}^2 + E_{P_{\text{eff}}}(r)$$

où  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  est une fonction de  $r$  à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital  $L$  de l'électron.

- Q 5.** Donner l'allure de la représentation graphique de  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$ . Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique  $E$  et du moment cinétique  $L$ .  
**Q 6.** À quelles conditions (sur  $L$  et  $E$ ) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon  $r$  de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique  $E$  de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de  $L$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .  
**Q 7.** Dessiner une trajectoire de l'électron si  $L = 0$ .

#### I.B – Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon  $r$  et son moment cinétique orbital  $L$  est quantifié par

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où  $n$  est un nombre entier strictement positif et  $h$  la constante de Planck.

- Q 8.** Montrer que les orbites sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon  $a_0$  de la première orbite de Bohr.  
**Q 9.** En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.  
**Q 10.** À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.

**Q 11.** L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de  $\lambda = 21$  cm. Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

## Partie B : Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ .

À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .



### I. — Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse  $m$  dont le centre d'inertie  $G$  est repéré par la position  $x$  dans le référentiel galiléen  $(O, \hat{u}_x)$  – voir figure 1. L'origine  $O$  se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité  $\alpha$ , exerçant sur  $m$  une force de frottement  $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$ , avec  $\alpha > 0$ . À tout instant  $t$ , on assimile la distance  $OG$  à la longueur  $\ell(t)$  du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g \hat{u}_x$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

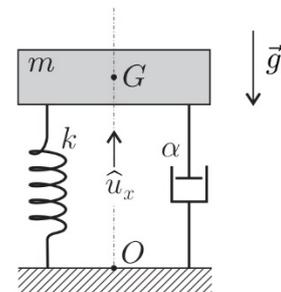


FIG. 1 – Oscillateur

▣ **1** — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle  $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$  dans laquelle on a introduit la fonction  $X(t) = x(t) - \tilde{x}$  où  $\tilde{x}$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $g$ ,  $\omega_0$  et  $\ell_0$ . On précisera les expressions et significations de  $\omega_0$  et  $\xi$ .

▣ **2** — Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles  $X(0) = X_0 \neq 0$  et  $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$ . Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de  $\omega_0$ ,  $\xi$ ,  $X_0$ ,  $V_0$  et  $t$ ) pour les cas  $\xi = 0$  et  $0 < \xi < 1$  et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit  $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$ , avec  $\beta > 0$ . Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage)  $F(t)$  de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

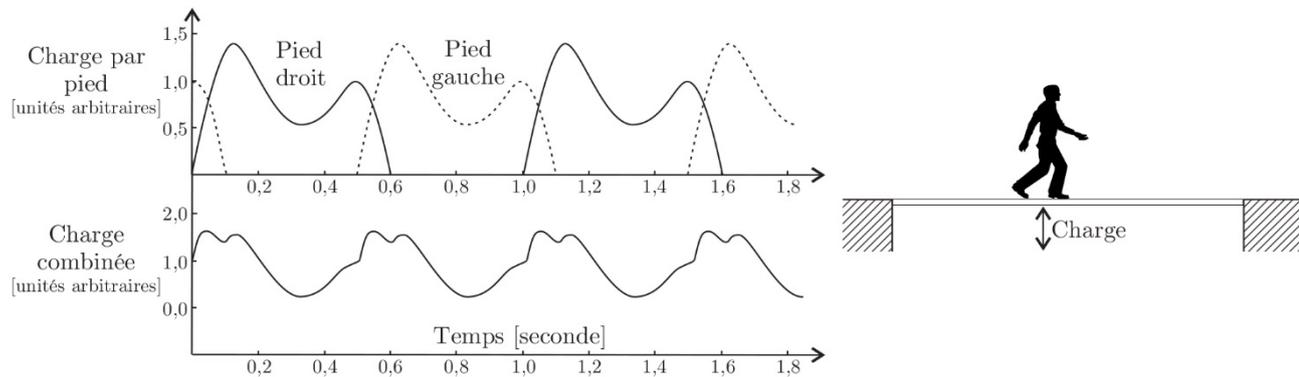


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique  $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$ .

Le vecteur  $\vec{F}_0$  correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence  $f$  correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que  $\vec{F}_1 = 0,4 \vec{F}_0$ . Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme  $-\hat{u}_x$ .

On note  $F_0 = \|\vec{F}_0\|$  le module de la force statique,  $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  la réponse en déplacement de l'oscillateur et  $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$  sa représentation complexe.

□ **3** — Que devient l'équation de l'oscillateur en  $Y$  sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement  $\underline{Y}$  sur la représentation complexe de l'excitation  $\underline{E} = \frac{1}{m} \vec{F}_1$ . On exprimera  $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$  en fonction de  $\xi$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

□ **4** — Sous quelle condition portant sur  $\xi$ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation  $\omega_r$  obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance  $|\underline{H}|(\omega_r)$  dans la limite  $\xi^2 \ll 1$ .

□ **5** — En se plaçant dans l'hypothèse  $\xi^2 \ll 1$  et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de  $\xi$  ainsi que la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

□ **6** — Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

□ **7** — Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

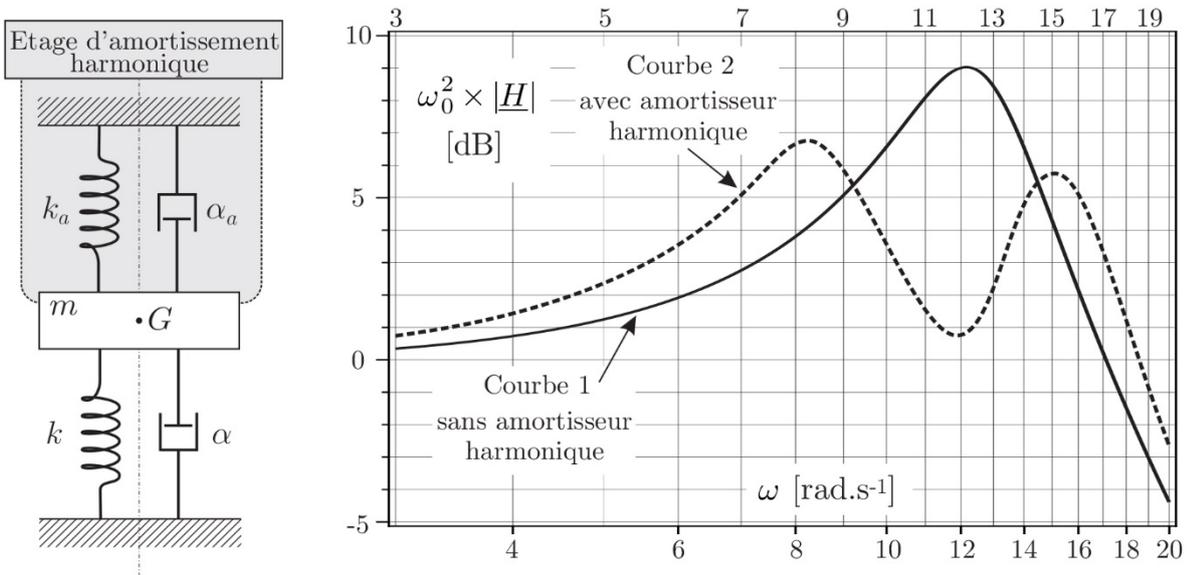


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.