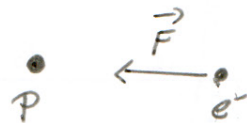


## Physique : DM1

## Partie A : De l'atome d'H aux galaxies (Centrale PC - 2018)

Q1) Soit  $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$



Q2) Or  $d\epsilon_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow \epsilon_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$  avec  $\lim_{r \rightarrow \infty} \epsilon_p = 0$

Q3) Soit  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \text{cste}$$

$\Rightarrow \vec{v}$  et  $\vec{OM} \in$  au même plan qui est toujours orthogonal à  $\vec{L}$

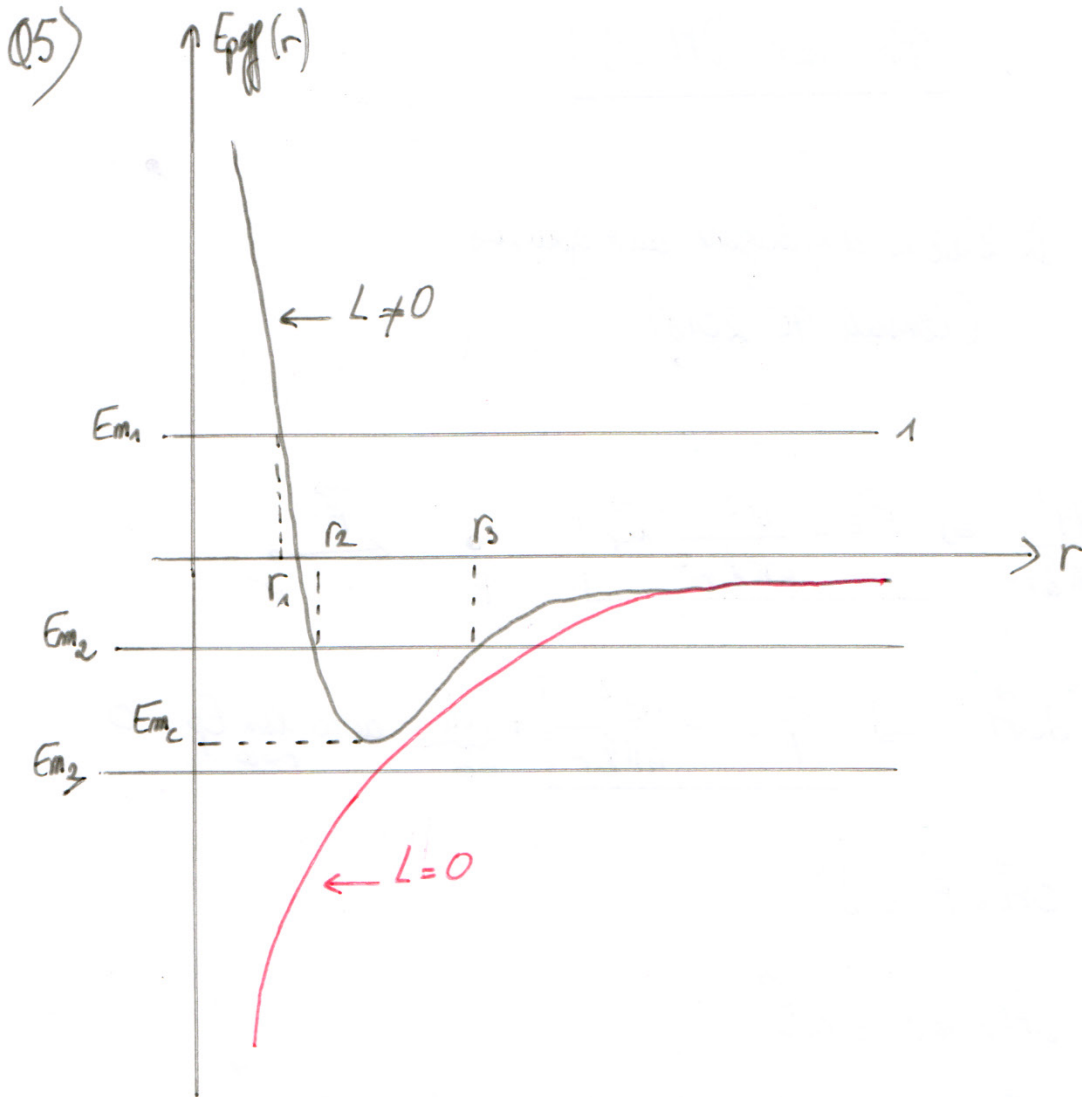
$\Rightarrow$  Le mouvement est plan

Q4) Soit  $E_m = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

or  $\|\vec{L}\| = m_e r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}\|}{m_e r^2} = \frac{L}{m_e r^2}$

d'où  $E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{r^2}{2} \frac{L^2}{m_e r^4}$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \epsilon_{p, \text{eff}}(r)$  où  $\epsilon_{p, \text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$



1<sup>er</sup> cas :  $L \neq 0$

- Si  $E_m = E_{m1}$ ,  $r > r_1$  : état libre (hyperbole)
- Si  $E_m = E_{m2}$ ,  $r_2 \leq r \leq r_3$  : état lié (ellipse)
- Si  $E_m = 0$ , parabole.
- Si  $E_m = E_{m3}$ , états impossibles.

2<sup>ème</sup> cas :  $L = 0$

- Si  $E_m > 0$  : états impossibles
- Si  $E_m < 0$  : états libres

Q6) Pour avoir une trajectoire circulaire :  $L \neq 0$

$$E_m = E_{m3} = E_{\text{eff}, \text{min}}$$

$$\text{Soit } \frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{2m_e} \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

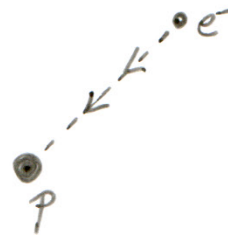
$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{m_e r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2} \quad (1)$$

$$\text{Et } E_m = \frac{1}{2} m_e \frac{L^2}{m_e^2 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{car } \dot{r} = 0$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \quad \Rightarrow E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 L^2} \quad (2)$$

Q7) Si  $L=0 \Rightarrow \vec{OP}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  
 $\Rightarrow$  trajectoire rectiligne



Q8) Soit:  $L = mvr = n\hbar$

$$(1) \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2}$$

$$\Rightarrow r = n^2 a_0 \quad \text{où } a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 52,9 \text{ pm}$$

$$(9) (2) \Rightarrow E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 (n\hbar)^2}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{E_0}{n^2} \quad \text{où } E_0 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,6 \text{ eV}$$

$$Q10) \text{ Soit } \begin{cases} \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T & (\text{On tient compte des 3 degrés de liberté de translation}) \\ E_i = -E_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2}{3} \frac{|E_0|}{k_B} \approx \underline{10^5 \text{ K}}$$

$$Q11) \text{ Soit } |E_m - E_0| = E_0 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$$

$$\text{Pour } \begin{cases} m=2 \text{ on a } |E_2 - E_1| = 10,2 \text{ eV} & \text{cas (1)} \\ m \rightarrow \infty \text{ on a } |E_m - E_1| = 13,6 \text{ eV} & \text{cas (2)} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} \lambda_1 = hc \cdot \frac{1}{|E_2 - E_1|} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda_2 = hc \cdot \frac{1}{|E_m - E_1|} = 9,13 \cdot 10^{-8} \text{ m} \end{cases}$$

## Partie B : Millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

① Oscillateur simple

$$1^{\circ}) \text{ PFD: } m \frac{d^2 \hat{u}_x}{dt^2} = -\alpha \dot{\hat{u}}_x - mg \hat{u}_x - k(l-b) \hat{u}_x$$

$$\text{Sur } \hat{u}_x: m \ddot{u}_x = -\alpha \dot{u}_x - mg - k(x-b) \text{ car } l=OB=x(t).$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m}(x-b) = -g.$$

$$\text{Notons } \tilde{x} = x_{eq} \text{ d'où } \frac{k}{m}(\tilde{x}-b) = -g \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m}(x-\tilde{x}) = 0$$

$$\text{Si } X = x - \tilde{x} \text{ alors: } \underline{\ddot{X} + 2\gamma \omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0} \quad (1)$$

$$\text{où } \begin{cases} \omega_0^2 = k/m \\ 2\gamma \omega_0 = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2m\sqrt{k/m}} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \end{cases}$$

- $\omega_0$  est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement
- $\gamma$  est le facteur d'amortissement, il croît proportionnellement à  $\alpha$ .

2<sup>o</sup>) 1<sup>er</sup> cas  $\gamma = 0$ 

$$\text{Dans ce cas (1) s'écrit } \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \Rightarrow X = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Or } \begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{X = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

2<sup>ème</sup> cas:  $0 < \gamma < 1$ 

$$\text{Dans ce cas le polynôme caractéristique s'écrit: } r^2 + 2\gamma \omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{t.q. } \Delta = 4\gamma^2 \omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\gamma^2 - 1) < 0$$

$$\text{Les solutions sont du type: } X = [A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)] e^{-\gamma \omega_0 t} \text{ où } \omega_a = \omega_0 \sqrt{1-\gamma^2}$$



$$\text{Or } \begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = -\gamma \omega_0 A + B \omega_a \end{cases}$$

$$\text{car } \dot{X} = -\gamma \omega_0 [A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)] e^{-\gamma \omega_0 t} + \omega_a [-A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t)] e^{-\gamma \omega_0 t}$$

$$\text{Donc } V_0 = -\gamma \omega_0 X_0 + B \omega_a$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{V_0 + \gamma \omega_0 X_0}{\omega_a}$$

$$\text{Donc } X(t) = (X_0 \cos(\omega_a t) + \frac{1}{\omega_a} (V_0 + \gamma \omega_0 X_0) \sin(\omega_a t)) e^{-\gamma \omega_0 t}$$

On observe des pseudo-oscillations.

- d'ajout d'une force due au vent revient à changer  $\alpha$  en  $\alpha - \beta$  car  $\vec{F}_v = +\beta \dot{x} \vec{u}_x$   
 $\Rightarrow \gamma = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$

- Si  $\beta > \alpha$ , l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.

$$3^{\circ}). \text{ 1) s'écrit avec l'ajout de cette force } \vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{X} + 2\gamma \omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{X} + 2\gamma \omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 \left[ X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \right] = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

$$\text{or } Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{Y} + 2\gamma \omega_0 \dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

- On pose  $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$  et  $\underline{F}_1 = F_{1m} e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \underline{Y} (-\omega^2 + 2\gamma \omega_0 (i\omega) + \omega_0^2) = -\frac{F_1}{m} = -\underline{\underline{\epsilon}}$$

$$\text{D'où } \underline{Y} = \frac{-\underline{\underline{\epsilon}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(2\gamma \omega_0 \omega)} = \frac{-\underline{\underline{\epsilon}}/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\left(\frac{2\gamma \omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\text{Donc } \underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$$

4°) Une résonance se produit si  $|\underline{H}|$  présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur.

$$\text{Soit } |\underline{H}| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\gamma^2}}$$

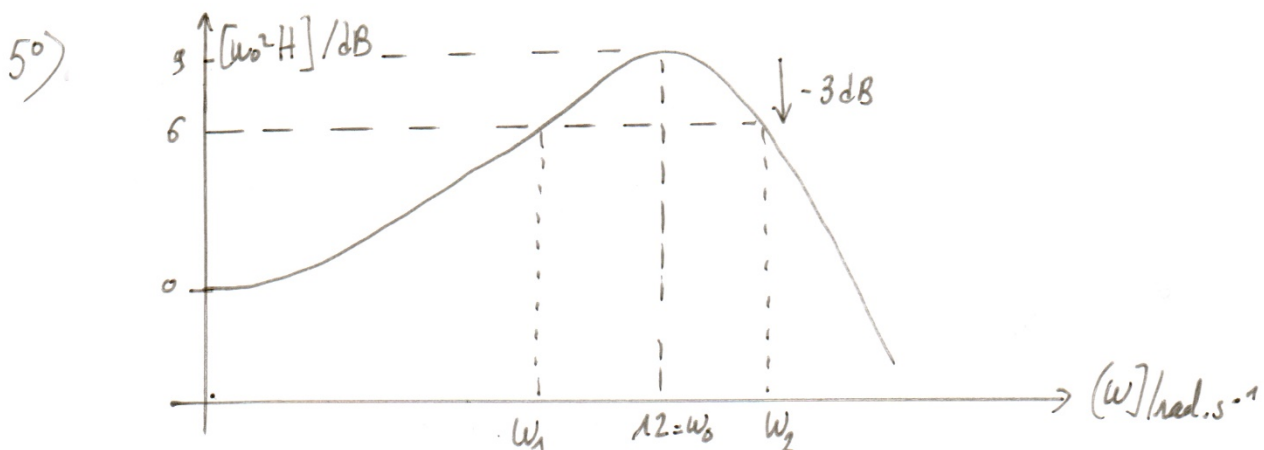
$$\begin{aligned} \text{t.q. } \frac{dH}{d\Omega} = 0 &\Leftrightarrow -4\Omega(1 - \Omega^2) + 8\Omega\gamma^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \text{ (cas non intéressant car minimum)} \\ (1 - \Omega^2) = 2\gamma^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \Omega^2 = 1 - 2\gamma^2 \rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\gamma^2}$$

$$\text{A la résonance : } |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^4 + (1 - 2\gamma^2) \cdot 4\gamma^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\gamma^2 - \underbrace{4\gamma^4}_{\ll 4\gamma^2}}}$$

$$\text{Vu que } \gamma^2 \ll 1 \Rightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1}{2\omega_0^2\gamma}$$



• Pour  $\zeta^2 \ll 1$  on a  $\omega_r = \omega_0 \approx 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

• Or on sait que la bande passante est l.q :  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 2\zeta$

$$\text{Avec } \Delta\omega = 14,2 - 9,5 = 4,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} = \frac{4,7}{2 \times 12} = \underline{\underline{0,2}}$$

6°) Il est important de connaître les fréquences de résonance d'une structure pour éviter qu'elle ne soit excitée à leur voisinage. Exciter sur une résonance un pont ou une tour peuvent être dévastateurs : pont de Tacoma à Washington

7°) On peut fixer sur la structure des accéléromètres.