

Physique : DS4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Les Trois parties sont indépendantes

PARTIE I

DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE

Ce sujet comporte quatre parties totalement indépendantes qui explorent les propriétés physiques d'objets de forme torique. Un tore est le volume généré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}_z) ou d'une flèche dans le cas général (\vec{p}).

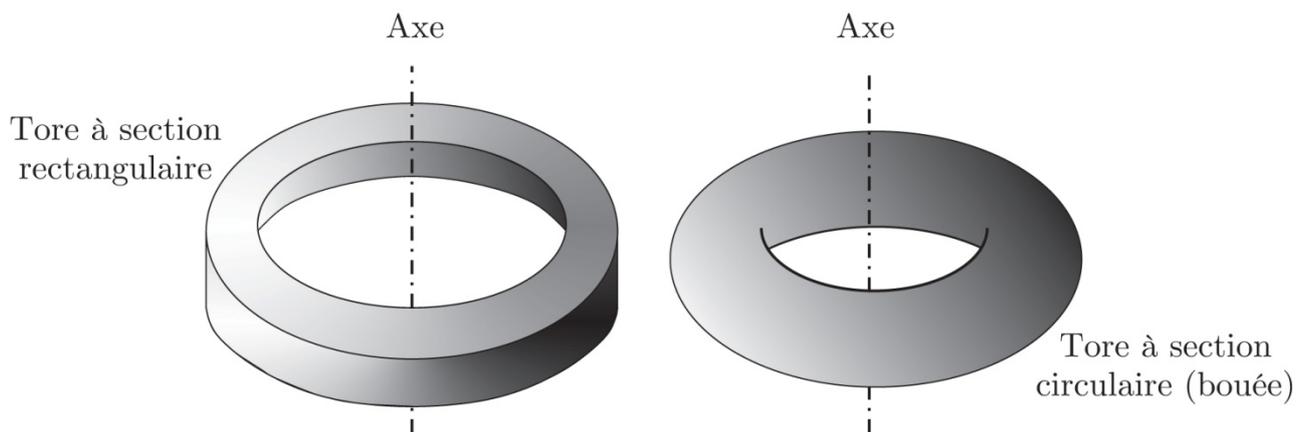


FIGURE 1 – Deux types de tores

II. — Étude d'un conducteur ohmique torique

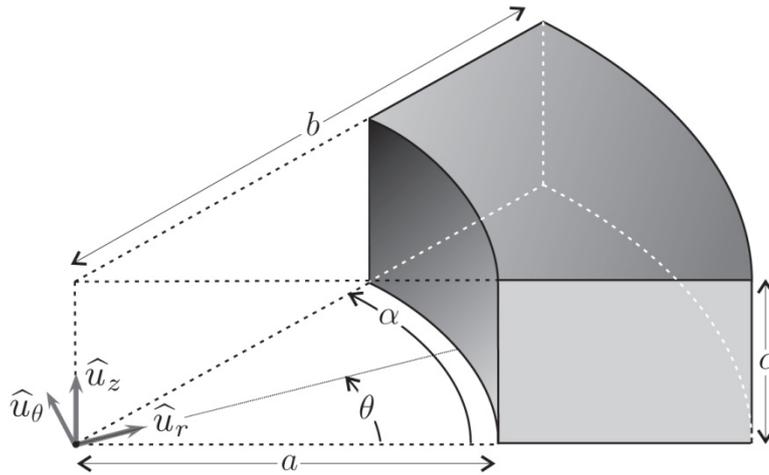


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

▣ 6 — On rappelle la valeur numérique

de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

▣ 7 — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ . En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

▣ 8 — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si $T \gg \tau$.

▣ 9 — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .

▣ 10 — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ \vec{E} et de la densité de courant \vec{j} .

▣ 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a , b , c , γ et α .

▣ 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

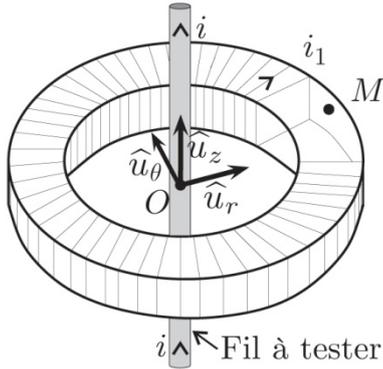


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O, z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$

avec $r \in [a, b]$ et $z \in [0, c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

□ **13** — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

□ **14** — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .

□ **15** — Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

□ **16** — Déterminer l'expression de la résistance totale R_p du bobinage en fonction de a , b , c , N et λ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.

□ **17** — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M , ω , R_p et L .

□ **18** — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

PARTIE II

Dans tout le problème, ε_0 représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

Première partie : Le théorème de Gauss

1 – Énoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int} .

Donner l'expression de l'équation de Maxwell qui permet de démontrer le théorème de Gauss.

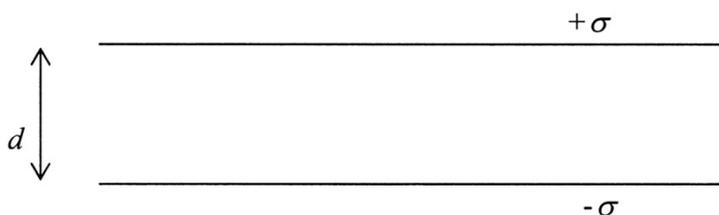
Deuxième partie : Condensateur plan

2 – On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique \vec{E} créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ est orthogonal au plan.

Démontrer que \vec{E} est tel que sa norme E vaut $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur \vec{E} de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

3 – Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.

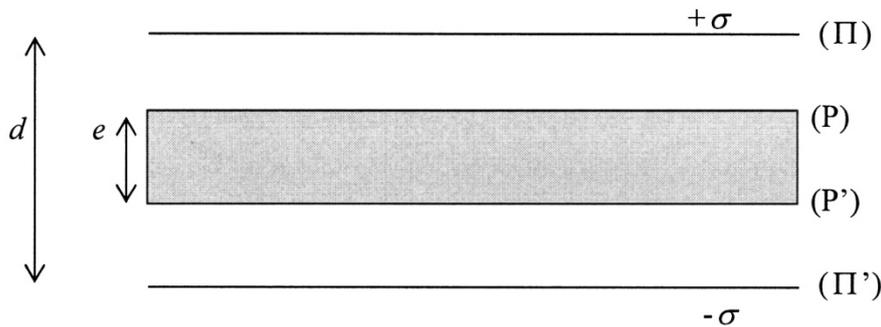


3.1 – En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.2 – Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de ε_0 , σ et d . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

3.3 – Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ε_0 et d .

4 – On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur e est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal.

Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure P et inférieure P' de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

5 – En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge σ_p et $\sigma_{p'}$, qui apparaissent sur les surfaces P et P' de la plaque métallique.

Exprimer σ_p et $\sigma_{p'}$, en fonction de σ .

6.1 – Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre P et II d'une part et entre P' et II' d'autre part).

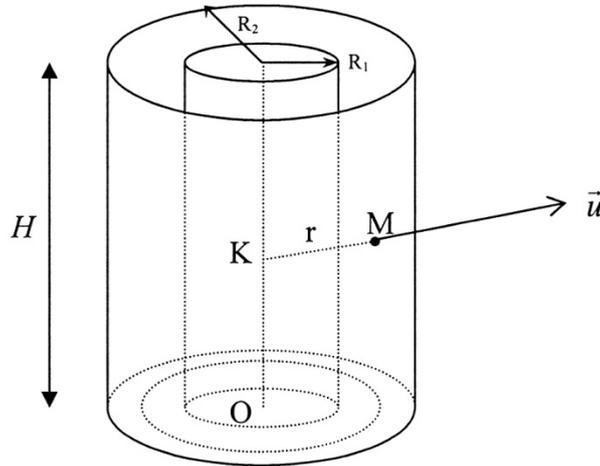
En déduire la différence de potentiel U' entre les deux armatures du condensateur. On exprimera U' en fonction de σ , e , d et ϵ_0 .

6.2 – En déduire la capacité surfacique C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de e , d et ϵ_0 . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.

Troisième partie : Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur H et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique $Q > 0$. L'armature externe porte une charge totale $-Q$.

Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2 . Soit un point M situé à la distance $r = KM$ de l'axe : $R_1 < r < R_2$. K est la projection orthogonale du point M sur l'axe du condensateur.



Soit \vec{u} le vecteur unitaire de la droite (KM) dirigé de K vers M .

On admettra que le champ électrostatique \vec{E} créé au point M est radial et sa norme ne dépend que de r . On peut donc écrire : $\vec{E} = E(r) \vec{u}$.

On néglige les effets de bord.

7 – En appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera, déterminer l'expression de $E(r)$. On exprimera $E(r)$ en fonction de Q , ϵ_0 , r et H . On distinguera les cas selon que $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$.

8 – En déduire le potentiel $V(r)$ à une distance r de l'axe lorsque $R_1 < r < R_2$. On exprimera $V(r)$ en fonction de Q , H , V_1 , R_1 , ϵ_0 et r . En déduire la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux armatures du condensateur en fonction de Q , ϵ_0 , H , R_1 et R_2 .

9 – Déterminer la capacité C du condensateur en fonction de ϵ_0 , H , R_2 et R_1 .

10 – On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie u_{el} égale à $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

En utilisant l'expression de $E(r)$ déterminée précédemment et en intégrant l'expression de u_{el} déterminer l'énergie W_{cond} accumulée par le condensateur. On exprimera W_{cond} en fonction de Q , ϵ_0 , H , R_1 et R_2 . En déduire l'expression de W_{cond} en fonction de Q et C .

11 – En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question 9, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques.

Fin de l'énoncé

Partie III – Effet Hall

Le référentiel d'étude est rapporté à trois axes orthogonaux Ox, Oy, Oz ; $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est la base orthonormée directe associée.

A / REGIME STATIQUE

Une plaquette parallélépipédique réalisée dans un semi-conducteur dopé n , d'épaisseur h , de largeur ℓ et de longueur finie L , est utilisée pour réaliser un capteur à effet Hall. Les seules charges libres sont des électrons de charge de $q = -e$; N_n représente leur nombre par unité de volume et σ désigne la conductivité électrique du matériau semi-conducteur.

La plaquette est traversée par un courant électrique d'intensité constante $I_0 > 0$, uniformément réparti sur la section transversale avec la densité volumique de courant $\vec{J} = J\vec{u}_y$, de sorte que $I_0 = Jh\ell$, comme le montre la figure 1 ci-dessous ; le champ électrique associé est noté $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_y$ (l'alimentation extérieure n'est pas représentée pour simplifier le schéma).

Le capteur est placé au centre O du repère cartésien, dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps (créé par un dispositif extérieur non représenté) de vecteur $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $B > 0$. Dans cette sous-partie, le champ magnétique créé par le courant I_0 dans la plaquette est supposé négligeable devant \vec{B} .

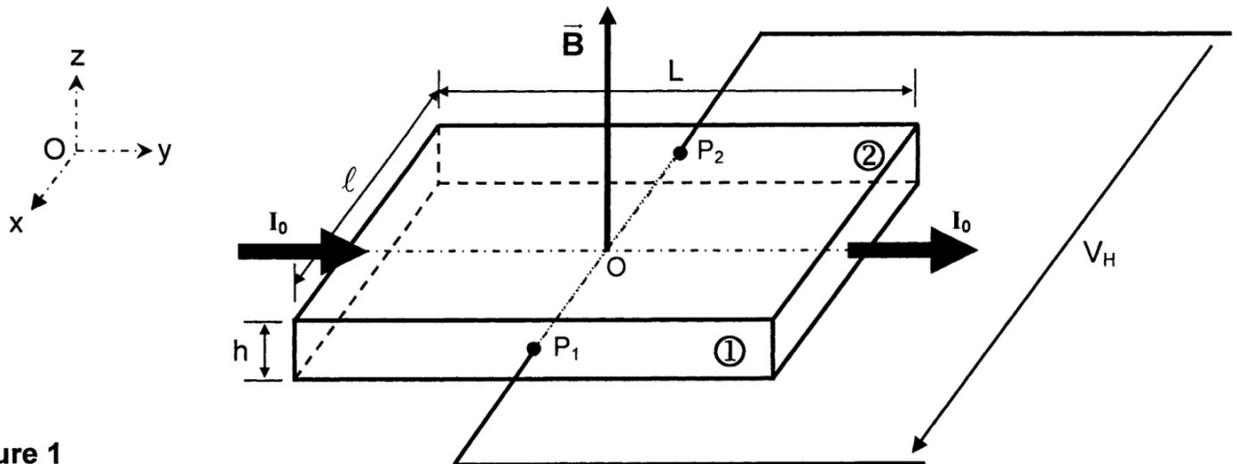


Figure 1

- A.1** Exprimer la relation liant la densité de courant \vec{J} et la vitesse de déplacement \vec{V} des électrons dans la plaquette. Préciser les caractéristiques de \vec{V} .
- A.2** Ecrire, sous sa forme vectorielle, la force \vec{F}_{mag} à laquelle est soumis l'électron de la part du champ magnétique, en supposant qu'il est animé de la vitesse de dérive \vec{V} .
En déduire la force de Laplace \vec{F}_L qui s'exerce sur la plaquette.
Préciser l'effet du champ magnétique sur la trajectoire des électrons dans la plaquette.
- A.3** Montrer que, sous peine de voir disparaître le régime permanent d'écoulement des charges dans le conducteur, un champ électrique, appelé champ de Hall, apparaît et qu'il s'écrit $\vec{E}_H = k_E (\vec{J} \wedge \vec{B})$, où k_E est un coefficient à déterminer ; préciser la direction et le sens de ce champ à l'aide d'un schéma.

A.4 En déduire l'existence d'une tension $V_H = V(P_1) - V(P_2)$ dite tension de Hall, qui apparaît entre les deux faces opposées ① et ② de la plaquette, puis l'écrire sous la forme $V_H = \frac{R_H}{h} I_0 B$, où R_H est le coefficient de Hall qu'il conviendra d'explicitier en fonction de N_n et e . Analyser le signe de R_H .

A.5 Application numérique : Calculer la constante R_H et la valeur de B à l'aide des données suivantes : $I_0 = 100 \text{ mA}$, $|V_H| = 126,7 \text{ mV}$, $N_n = 1,7 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $h = 0,3 \text{ mm}$, $\ell = 1 \text{ cm}$, $L = 3 \text{ cm}$.

A.6 En pratique, un capteur est caractérisé par sa sensibilité. Définir puis calculer la sensibilité S_B de ce capteur vis-à-vis du champ magnétique.

La constante de Hall varie avec la température – car la densité de charges libres en dépend – selon la loi : $R_H(t) = R_H(0) \cdot \exp(-at)$, où la température t s'exprime en degrés Celsius, avec $a = 0,014 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$ pour un capteur en InSb .

A.7 Evaluer la variation relative de la tension de Hall V_H quand la température au niveau du capteur s'élève de 10 degrés. Commenter cette valeur.

A.8 Montrer qu'il existe une relation simple entre la force de Laplace \vec{F}_L et la tension de Hall, de la forme $V_H = \zeta \vec{F}_L \cdot \vec{u}_x$, où ζ est un coefficient à déterminer.

Désignons par \vec{E} le champ électrique résultant dans la plaquette traversée par la densité de courant \vec{J} , en présence du champ magnétique \vec{B} .

A.9 Montrer que \vec{E} , \vec{J} et \vec{B} vérifient la loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \sigma [\vec{E} - k_J (\vec{J} \wedge \vec{B})]$, où k_J est un coefficient à déterminer. En déduire l'expression de \vec{E} en fonction de \vec{J} et \vec{B} .

A.10 Représenter, dans le plan Oxy , les vecteurs $\frac{\vec{J}}{\sigma}$, \vec{E} et $k_J (\vec{J} \wedge \vec{B})$. Tracer les lignes de courant, les lignes de champ et les surfaces équipotentielles associées, en distinguant deux cas : absence ou présence du champ magnétique.

A.11 Montrer que les lignes de champ électrique et les lignes de courant font un angle ψ qui sera exprimé en fonction de B , σ et R_H . Calculer cet angle ψ pour un champ $B = 1 \text{ T}$, sachant que $\sigma = 2 \cdot 10^4 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Les deux fils conducteurs sont soudés à la plaquette aux points P_1 et P_2 , de coordonnées respectives $(\ell/2, y_1, 0)$ et $(-\ell/2, y_2, 0)$ avec, théoriquement, $y_2 = y_1$.

A.12 Estimer le décalage maximum admissible $\delta = |y_2 - y_1|$ par rapport à leur position théorique, sachant que la mesure doit fournir une tension de Hall V_H à 1% près. Commenter le résultat ; proposer un montage complémentaire pour compenser ce décalage et préciser le protocole de réglage.