

Physique : DS4

Partie I - Le tore (Mines PSI 2014)

⑥ ϵ_0 : permittivité du vide t.q $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

⑦ Soit : $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

or $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{et } \vec{j} = \gamma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = \gamma \rho / \epsilon_0$

Donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho / \tau = 0$ ou $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = 10^{-19} \text{ s}$

$\Rightarrow \rho = \rho(0) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = 10^{-19} \text{ s}$

$\Rightarrow \rho \rightarrow 0$ au bout de qq's τ

⑧ Dans le cadre de l'ARAS magnétique $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$.

$\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

En effet en ordre de grandeur $\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{a} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{E}{\tau} \right) \quad \text{①} \\ \text{et} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} E/a = B/\tau \quad (\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \quad \text{②} \end{array} \right.$

or $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma \gg \frac{\epsilon_0}{\tau} \Leftrightarrow \tau \gg \tau$

⑨ En régime permanent : $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \rightarrow 0 \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$

D'où $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow \Delta V = 0$

$$\textcircled{10} \text{ Soit } \begin{cases} \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0 \\ V(0) = U \\ V(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow V = A\theta + B \Rightarrow V = U + \theta \frac{(-U)}{\alpha}$$

$$\Rightarrow V = U \frac{\alpha - \theta}{\alpha}$$

$$\text{Donc } \vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{U}{\alpha r} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{J}}{d\theta} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \text{ Soit } I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\gamma U}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz \Leftrightarrow \frac{\gamma c U \ln \frac{b}{a}}{\alpha} = I$$

$$\text{et } R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha}{\gamma c} \frac{1}{\ln(b/a)}$$

$$\textcircled{12} \text{ On a : } R = \frac{L}{\gamma S} \quad \text{or } \ln \frac{b}{a} = \ln \left(1 + \frac{b-a}{a} \right) \approx \frac{b-a}{a}$$

$$\text{d'où } R = \frac{\alpha}{\gamma c} \cdot \frac{a}{b-a}$$

$$\text{or } S = c(b-a) \Rightarrow R = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{a}{S}$$

$$\text{et } L = \alpha a \Rightarrow R \approx \frac{L}{\gamma S} \quad \text{CQFD}$$

11) Etude d'une pince ampèremétrique

13) Dans le cas de l'AROS magnétique on néglige les phénomènes de propagation
t.q: $\tau \ll T$ ou $\tau = \frac{a}{c}$ avec a : taille caractéristique du système

or (a) et (b) donnent

$$\begin{aligned} \frac{B}{a} &= \mu_0 j + \epsilon_0 \frac{Ba}{T^2} \\ &= \mu_0 j + \frac{Ba}{c^2 T^2} \\ &= \mu_0 j + Ba \cdot \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{a} = \mu_0 j \text{ si } \tau \ll T$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ si } \tau \ll T}$$

14) On a invariance par révolution autour de Oz : $\Rightarrow B(r, z)$
le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$

$$\text{Donc } \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i + Ni)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} (i + Ni) \vec{u}_\theta}$$

15) Pour une spire: $\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{2\pi} (i + Ni) \ln\left(\frac{b'}{a}\right) \cdot c$

d'où pour le tor: $\Phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi} (i + Ni) c \ln(b'/a)$

or $\Phi = Li + Mi$ d'où

$$\begin{cases} L = NM = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} c \ln(b'/a) \\ M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} c \ln(b'/a) \end{cases} \text{ où } b' = a + b$$

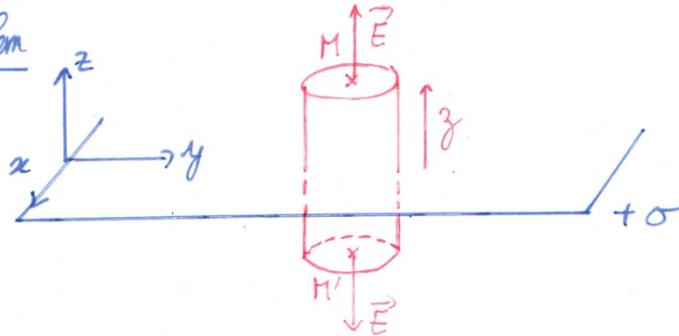
Partie II - Electrostatique - CCP 2010 PSI

I - Théorème de Gauss

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Théorème de Gauss : } \phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}} / \epsilon_0 \\ \text{Maxwell - Gauss : } \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \end{array} \right.$$

II - Condensateur plan

②

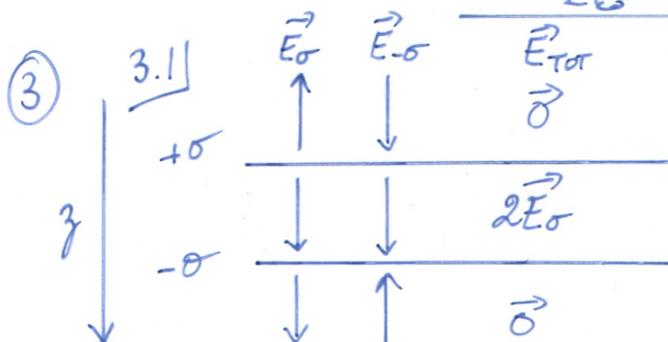


* Les plans (Myz) et (Mxz) sont plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_z$

* Il y a invariance par $T(y)$ et $T(x)$ $\Rightarrow E = E(z)$

* En prenant comme surface de Gauss un cylindre de rayon R , symétrique par rapport au plan on a : $2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ car $\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z$$



A l'aide du théorème de superposition on obtient :

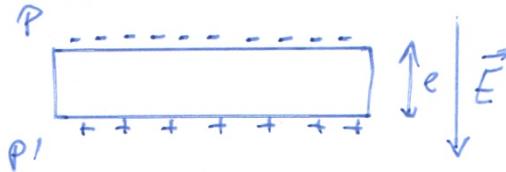
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{int}} = \sigma / \epsilon_0 \vec{u}_z \\ \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{array} \right.$$

3.2) Soit $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ d'où $\underline{U = \sigma / \epsilon_0 d}$

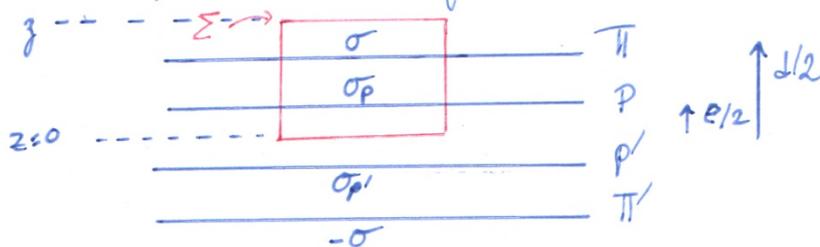
3.3) On a $C = Q/U$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\sigma S}{\sigma_d} \cdot \epsilon_0 \quad \Leftrightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

- ④. Le champ électrostatique qui règne dans le condensateur déplace les électrons de la lame jusqu'à ce que le champ total dans la lame (conducteur) soit nul.
 Il apparaît des charges surfaciques sur les plans (P) et (P')



- ⑤ le problème des symétries reste inchangé $\Rightarrow \vec{E} = E(z)\vec{u}_z$



$$\text{Donc } [E(0) + E(z)]S = (\sigma + \sigma_p)S / \epsilon_0$$

$$\text{or } \begin{cases} \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \vec{E}(0) = 0 \text{ par symétrie} \end{cases} \quad \text{donc } \underline{\sigma = -\sigma_p}$$

- ⑥ 6.1) En appliquant le théorème de Gauss pour un pt M t.q $e/2 < z < d/2$ on a:

$$[E(0) + E(z)]S = \frac{\sigma_p S}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(z) = \sigma_p / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(e/2 < z < d/2) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\text{et } \underline{\vec{E}(-d/2 < z < -e/2) = \sigma / \epsilon_0 \vec{u}_z}$$

$$\Rightarrow U' = \int_{-d/2}^{d/2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\sigma / \epsilon_0 \cdot \left(\frac{d-e}{2}\right) + 0 \Rightarrow \underline{U' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-e)}$$

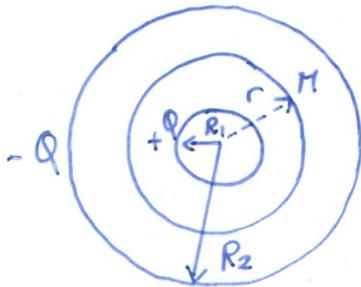
$$6.2) \text{ Soit } Q = \sigma S = C'U'$$

$$\Leftrightarrow C' = \frac{\sigma S}{U'} \Leftrightarrow C' = \frac{\sigma S}{\sigma(d-e)} \cdot \epsilon_0 \Leftrightarrow C' = \frac{\epsilon_0 S}{d-e}$$

Donc $\frac{C'}{S} > \frac{C}{S}$, la plaque a permis d'augmenter la capacité.

III) Condensateur cylindrique

7



On a affaire à un problème à symétrie cylindrique d'où :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r et de hauteur h d'où :

$$2\pi r h E = q_{\text{int}} / \epsilon_0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r h E = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ si intérieur et } 0 \text{ si extérieur.}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r < R_1) = \vec{0}, \quad \vec{E}(r > R_2) = \vec{0} \\ \vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

8) D'où : $V_{\text{int}}(r) = \frac{-Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln r + \text{cte}$

$$\Leftrightarrow V_{\text{int}}(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) + V_1$$

$$\Rightarrow U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\textcircled{9} \quad \text{On } Q = C(V_1 - V_2) \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$\textcircled{10} \quad \text{On a } W_{\text{cond}} = \iint_{\text{espace}} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) d\mathcal{E} = \iint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow W_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0 H^2} \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \times 2\pi \times H \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow W_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 H} \cdot \ln(R_2/R_1)$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 \times \left(\frac{2\pi \epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)} \right)^{-1}$$

$$\text{D'où } W_{\text{cond}} = \frac{1}{2} Q^2 / C$$

$$\textcircled{11} \quad \text{On a : } C = \frac{2\pi \epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right)} = 2\pi \epsilon_0 H / \ln(1 + e/R_1)$$

$$\Rightarrow C \stackrel{\text{d.l.}}{\sim} \frac{2\pi \epsilon_0 H}{e/R_1} \Rightarrow C \sim \frac{2\pi \epsilon_0 H R_1}{e}$$

$$\text{or } S_1 = 2\pi R_1 H \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S_1}{e}$$

C'est équivalent à un condensateur plan t. q. : $\begin{cases} e = R_2 - R_1 \\ \text{et} \\ S_1 = S_{\text{LATÉRALE}} = 2\pi R_1 H. \end{cases}$

Partie III - Effet Hall (E3A - 2010 - PSI)

IV Etude de l'effet Hall (E3A - PSI - 2010)

A.1 Soit $\vec{j} = -Nn e \vec{v}$ et $\vec{v} = -|\vec{v}| \vec{u}_y$

A.2 On a $\vec{F}_{mag} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$
 $\Rightarrow \vec{F}_L' = Nn dV [-e \vec{v} \wedge \vec{B}]$
 $\Rightarrow \vec{F}_L' = \vec{j} dV \wedge \vec{B}$ où $dV = \text{volume de la plaquette}$.

or $\vec{j} \cdot \vec{S} = I_0 \Leftrightarrow j \cdot hl = I_0$

$\Rightarrow \vec{F}_L' = I_0 dy \vec{u}_y \wedge \vec{B}$

Après intégration : $\vec{F}_L = I_0 l B \vec{u}_x$

A.3 La force de Laplace provoque une déformation qui crée un champ de Hall tel que : $\vec{F}_L + \vec{F}_H = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -e (\vec{v} \wedge \vec{B}) - e \vec{E}_H = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\Leftrightarrow \vec{E}_H = + \frac{\vec{j}}{Nn e} \wedge \vec{B}$

$\Leftrightarrow \vec{E}_H = k_H (\vec{j} \wedge \vec{B})$ où $k_H = + \frac{1}{Nn e}$

A.4 D'où : $V_H = V(P_1) - V(P_2)$
 $= \int_{P_2}^{P_1} dV = \int_{P_2}^{P_1} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_H l = -k_H j B l$

$\Leftrightarrow V_H = - \frac{j B l}{Nn e} = - \frac{I_0 / h l \cdot B l}{Nn e}$

$\Leftrightarrow V_H = \frac{R_H}{h} I_0 B$ avec $R_H = - \frac{1}{e Nn} = -k_H$

A.5 A.N : $\left\{ \begin{array}{l} R_H = -3,7 \cdot 10^{-4} \text{e}^{-1} \text{m}^3 \\ B = \frac{V_H h}{R_H I_0} = 1,0 \text{T} \end{array} \right.$

A.6 On définit: $S_B = \frac{V_H}{B} = \frac{R_H I_0}{h} = 0,12 \text{ VT}^{-1}$

A.7 On a $V_H = R_H \frac{I_0 B}{h} \Rightarrow \frac{\Delta V_H}{V_H} = \frac{\Delta R_H}{R_H}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_H}{V_H} = \frac{R_H(t+\Delta t) - R_H(t)}{R_H(t)} = e^{-a\Delta t} - 1$$

$\stackrel{\text{d.l.}}{\approx} -a\Delta t.$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_H}{V_H} = -0,14$$

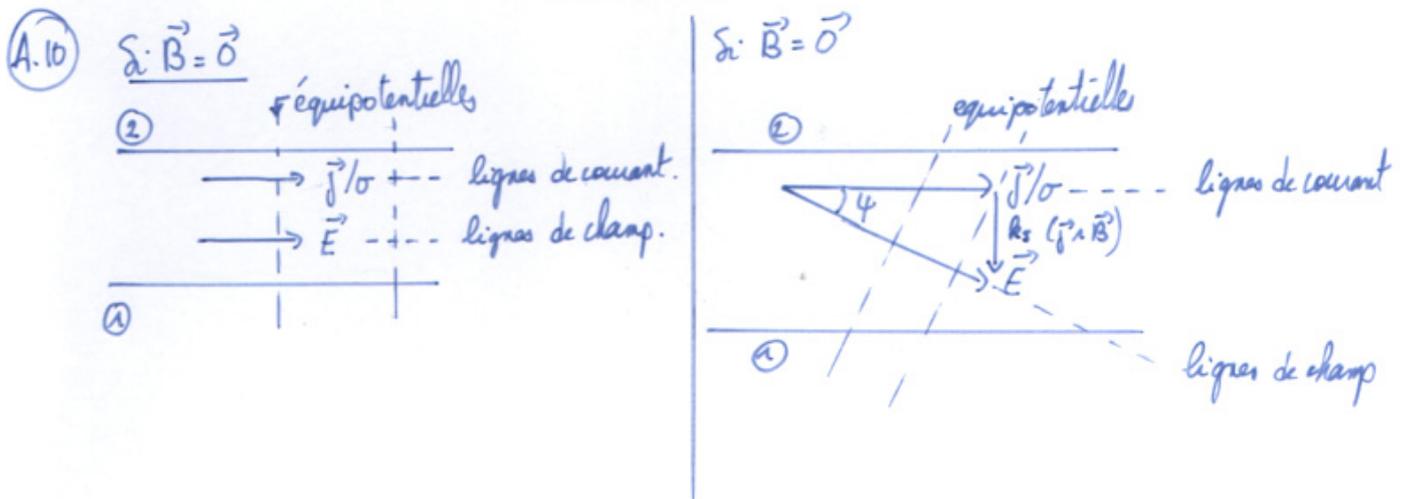
A.8 On a $\begin{cases} F_L = I_0 L B \\ V_H = -\frac{1}{N n e} \frac{I_0 B}{h} \end{cases} \Rightarrow V_H = \frac{-F_L}{N n e h L} \Rightarrow \zeta = -\frac{1}{N n e L h}$

A.9 Soit $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H$ avec $\vec{j} = \sigma \vec{E}_0$

$$\Leftrightarrow \vec{j} = \sigma (\vec{E} - \vec{E}_H)$$

$$\Leftrightarrow \vec{j} = \sigma (\vec{E} - k_E \vec{j} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \underline{k_E = k_J}$$

donc $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} + k_E \vec{j} \wedge \vec{B}$



A.11) D'après le schéma : $\tan \psi = \frac{k_J \mu B}{f/\sigma}$

$$\Leftrightarrow \underline{\tan \psi = \sigma k_J B}$$

or $k_J = -R_H$ d'où :

$$\psi = \text{Arctan}(-R_H \sigma B) \approx \underline{\underline{82^\circ}}$$

A.12) • Si $y_1 = y_2$: $V_H = V(P_1) - V(P_2)$

$y_1 \neq y_2$: $V(P_1) - V(P_2) = V_H + \Delta V$ t.q : $\Delta V = E_0 \delta$.

$$\text{or } \frac{\Delta V}{V_H} < 0,01$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu \delta / \sigma}{R_H \cdot \mu B l} < 0,01$$

$$\Leftrightarrow \underline{\delta < 0,01 \cdot l B R_H \sigma}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\delta < 0,74 \text{ mm}}} : \text{précision difficile à atteindre}$$

- On peut ajouter un générateur de tension continue variable qu'on réglerait pour que $V_{mesurée} = 0$ en absence de champ magnétique afin de compenser ΔV .

Ainsi au voltmètre on mesurerait alors que V_H .

