Physique : DM7

Vers une nouvelle définition du Kelvin (Centrale PC - 2016)

I) L'agitation thermique

I.A.1) a) D'après la loi de statique des fluides $\frac{dp}{dz} = -\rho g$

De plus pour un GP : $pV = nRT \iff p = \frac{m}{MV}RT \iff p = \rho\frac{RT}{M}$

d'où $\frac{dp}{dz} = -\frac{pM}{RT}g \iff \frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT}p = 0$

$$\iff \boxed{p(z) = p(0)\, e^{-\frac{Mg}{RT}z}}$$

$$\text{ou} = p(0)\, e^{-\frac{mg}{k_B T}z}$$

b) Soit $p = \rho\frac{RT}{M} \iff p = n_v k_B T$

$\Rightarrow \boxed{n_v(z) = N_0 e^{-mgz/k_BT} \quad \text{où } N_0 = \frac{p_0}{k_B T}}$ et m = masse d'une particule d'air

Le terme mgz représente l'E_p de pesanteur

I.A.2) . On peut écrire $n_v(z) = N_0 e^{-z/H}$ où $\boxed{H = \frac{k_B T}{mg}}$

. Pour une chute libre : $v_e = \sqrt{2gH} \iff \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}}$

. D'où $v_q = \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_e \simeq 1{,}22\, v_e$. Elles sont du même ordre de grandeur

I.A.3) • Considérons une balle de masse $m = 100g$ à $T = 300K$. En comparant l'E_{pp} à k_BT on obtient : $mg\,\delta z = k_BT \Leftrightarrow \delta z = \frac{k_BT}{mg} = \underline{4 \cdot 10^{-21} m}$.

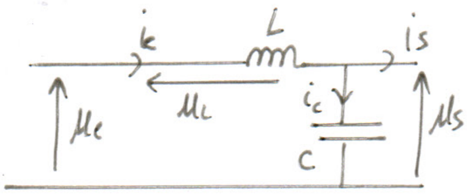
• Ainsi sous l'effet de l'agitation thermique le barycentre est quasi-immobile. On peut donc considérer qu'<u>il y a immobilisation absolue de la balle</u>.

I.B.1) La vitesse d'agitation thermique des électrons dans le métal est t.q :

$$v_q = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \sim 10^5 ms^{-1} \ll c$$

$\Rightarrow$ <u>les e^- ne sont pas relativistes</u>

I.B.2)



Soit $\boxed{\begin{cases} i_e = i_s + i_c \Leftrightarrow i_e = i_s + C\dfrac{du_s}{dt} \\ u_e = u_L + u_s \Leftrightarrow u_e = u_s + L\dfrac{di_e}{dt} \end{cases}}$

I.B.3) a) De m̂ : $\begin{cases} i(x,t) = i(x+dx,t) + \gamma dx \dfrac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \\ u(x,t) = u(x+dx,t) + \lambda dx \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \end{cases}$

Donc : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} & (1) \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} & (2) \end{cases}}$

(b) (1) donne : $\dfrac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = -\gamma \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

(2) donne : $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Le théorème de Schwarz donne : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda\gamma \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{C_e^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{où } C_e = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}} \quad (3)$$

(c) . En notation complexe (3) donne : $(-ik)^2 \underline{u} = \dfrac{1}{C_e^2}(i\omega)^2 \underline{u}$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = \dfrac{\omega}{C_e}} \quad (4)$$

. A l'aide de (1) : $(-ik)\,\underline{i} = -\gamma(i\omega)\,\underline{u}$

$$\Rightarrow R_c = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{k}{\gamma\omega} = \dfrac{1}{C_e\gamma} = \boxed{\sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma}} = R_c} \quad (5)$$

Donc : $\begin{cases} \lambda = R_c^2\gamma \\ \lambda = \dfrac{1}{C_e^2\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = R_c^2\gamma \\ \text{et} \\ R_c^2\gamma = \dfrac{1}{C_e^2\gamma} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{R_c C_e} \\ \lambda = \dfrac{R_c}{C_e} \end{cases}} \quad (6)$

I.B.4) (a) On remplace $u(x,t) = U(x)\cos(\omega t)$ dans (3) d'où :

$$U'' \cos(\omega t) = \dfrac{1}{C_e^2} \cdot U\,(-\omega^2) \cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{\omega^2}{C_e^2} U = 0 \quad \text{où} \quad \dfrac{\omega^2}{C_e^2} = k^2$$

Donc $U(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

avec $\begin{cases} U(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ U(D) = 0 \Leftrightarrow \sin(kD) = 0 \Leftrightarrow k_n = n\pi/D \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{U(x) = U_{0n}\sin(k_n x) \text{ où } k_n = \frac{n\pi}{D} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c_e}{D}}$

(b) Soit $\omega_n = 2\pi f_n \Rightarrow f_n = \frac{n c_e}{2D}$

or $N = \frac{\Delta f}{|f_{n+1} - f_n|} = \boxed{\frac{\Delta f \cdot 2D}{c_e} = N}$

(c) (1) $\Rightarrow \frac{\partial i_n}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\gamma . U_{0n}\sin(k_n x)(-\omega_n)\sin(\omega_n t)$

$\Rightarrow i_n(x,t) = -\frac{\gamma\omega_n U_{0n}}{k_n}\sin(\omega_n t)\cos(k_n x) + cste(t)$

or $i_n(x,t) = 0$ ssi $U_{0n} = 0 \Rightarrow cste(t) = 0$

De plus $\gamma\frac{\omega_n}{k_n} = \frac{1}{R_c . c_e} . c_e = \frac{1}{R_c}$

$\Rightarrow \boxed{i_n(x,t) = -\frac{U_{0n}}{R_c}\cos\left(\frac{n\pi}{D}x\right)\sin(\omega_n t)}$

I.B.5) (a) Soit $de_m(x,t) = \frac{1}{2}\gamma dx\, u_n^2 + \frac{1}{2}\lambda dx\, i_n^2$

$= \frac{1}{2}dx\left[\gamma . U_{0n}^2\sin^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t) + \frac{\lambda}{R_c^2}U_{0n}^2\cos^2(k_n x)\sin^2(\omega_n t)\right]$

Or $\frac{\lambda}{R_c^2} = \gamma$ et $\langle \cos^2(\omega_m t) \rangle = \langle \sin^2(\omega_m t) \rangle = \frac{1}{2}$

d'où
$$\boxed{\begin{cases} de_m(x,t) = \frac{1}{2} dx . \gamma U_{om}^2 \left[\sin^2(k_m x) \cos^2(\omega_m t) + \cos^2(k_m x) \sin^2(\omega_m t) \right] \\ \text{et} \\ \langle de_m(x) \rangle = \frac{1}{4} \gamma U_{om}^2 \, dx \end{cases}}$$

(b) Soit $\langle E_m \rangle = \int_0^D \frac{\langle de_m(x) \rangle}{dx} . dx$

$\Leftrightarrow \langle E_m \rangle = \frac{1}{4} \gamma U_{om}^2 . D.$

$\Leftrightarrow \boxed{\langle E_m \rangle = \frac{U_{om}^2 D}{4 R_c C_e}}$ car $\gamma = \frac{1}{R_c . C_e}$

I.B.6) (a) Soit $\begin{cases} \langle E_m \rangle = k_B T \\ \text{et} \\ R = R_c \end{cases} \Rightarrow k_B T = \frac{U_{om}^2 D}{4 R C_e} \Rightarrow U_{om}^2 = \frac{4 R C_e . k_B T}{D}$

d'où $u_{eff,m}^2 = \langle u_m^2(x) \rangle = \frac{U_{om}^2 \sin^2(k_m x)}{2}$

$\Leftrightarrow u_{eff,m}^2 = \frac{2 R C_e . k_B T}{D} \sin^2(k_m x)$

$\Rightarrow \boxed{u_{eff,m}^2 = U_{eff,m}^2 \sin^2(k_m x) \text{ avec } U_{eff,m}^2 = \frac{2 k_B T R C_e}{D}}$

(b) Soit $U_{eff}^2 = \sum_{m=1}^{N} U_{eff,m}^2 = \frac{N . 2 k_B T R C_e}{D}$

or $N = \frac{2 D \Delta f}{C_e} \Rightarrow U_{eff}^2 = 4 k_B T R \Delta f$

d'où $\boxed{U_{eff} = \sqrt{4 k_B T . R \Delta f}}$

I.B.7) a) * Soit $V_{eff} \div R^{1/2}$

$\Rightarrow \log V_{eff} \div \frac{1}{2}\log R$, effectivement sur le graphe la pente est de $\frac{1}{2}$.

* Soit $V_{eff} \div \Delta f^{1/2}$

Si $\Delta f_2 = 100\,\Delta f_1$ alors $V_{eff2} = 10 V_{eff1}$ ce que l'on retrouve sur le graphe

* Pour $\Delta f = 1\,Hz$, $\begin{cases} R = 40\,\Omega \\ R = 100\,\Omega \end{cases}$ on obtient $V'_{eff} = \begin{matrix} 4{,}0.10^{-7}\,V \\ 6{,}5.10^{-7}\,V \end{matrix} = A V_{eff}$.

or $k_B = \dfrac{V_{eff}^2}{4TR\Delta f}$

$$\Leftrightarrow \boxed{k_B = \frac{V'^2_{eff}}{4A^2\,TR\,\Delta f}} \simeq \underline{1{,}33\,10^{23}\,J.K^{-1}}$$

b) . Les valeurs des tensions efficaces sont extrêmement faibles, il faut donc éliminer le bruit électromagnétique à l'aide d'une enceinte métallique qui jouera le rôle de blindage.

. La résistance peut chauffer, il faut donc thermostater l'enceinte.

. L'amplification de tension peut ajouter un bruit significatif d'où la nécessité d'un grand nombre de mesures.

II) Mesure Acoustique

II.A.1) D'après l'énoncé $\ell \geq \ell_{inter}$

Or $n_{lim} = \dfrac{1}{\ell_{inter}^3}$ d'où $P_{lim} = n_{lim} \cdot k_B T$

$$\Leftrightarrow P_{lim} = \frac{k_B T}{\ell_{inter}^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{P \leq P_{lim} \simeq 3.10^4 \text{ Pa}}$$

II.A.2) a) Soit $\begin{cases} \mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \\ p(x,t) = p_0 + \Pi(x,t) \end{cases}$ et $v(x,t) = v_1(x,t) \ll c_{son}$.

D'où au 1er ordre :

- eq. conservation de la masse : $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$ s'écrit : $\mu_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t}$ (1)
- eq d'Euler : $\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p$ s'écrit : $\mu_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}$ (2)
- Compressibilité isentropique $\chi_S = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S$ s'écrit : $\chi_S = \dfrac{1}{\mu_0}\cdot\dfrac{\mu_1}{\Pi}$ (3)

(1) donne : $\mu_0 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = -\dfrac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$

(2) donne : $\mu_0 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ avec $\mu_1 = \mu_0 \chi_S \Pi$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c_a^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \text{ où } c_a^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}}$$

b) Pour un GP : $\mu = \dfrac{PM}{RT} \Rightarrow \chi_T = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = \dfrac{1}{P}$

or $\chi_S = \dfrac{\chi_T}{\gamma} \Rightarrow \chi_S = \dfrac{1}{\gamma P} \Rightarrow c_a^2 = \dfrac{\gamma}{\mu_0} P = \dfrac{\gamma}{\mu_0} \mu \dfrac{RT}{M}$

$$\Rightarrow \boxed{c_a^2 = \frac{\gamma N_a k_B T}{M}}$$ car $R = N_a k_B$

ⓒ Soit $c_{a,réel}^2 = c_a^2 (1+\beta p) \Rightarrow c_{a,réel} \overset{D.L}{\simeq} c_a \left(1+\frac{\beta p}{2}\right)$

$$\rightarrow \left|\frac{c_{a,réel} - c_a}{c_a}\right| = \frac{\beta p}{2} < 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p < \frac{2.10^{-6}}{\beta}} \simeq \underline{1{,}5.10^5\ Pa}$$

II.A.3) Soit $k_B = \frac{M c_a^2}{\gamma N_a T}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_a}{N_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}}$$ vu que $\delta\gamma = 0$

$$\Rightarrow \frac{\delta c_a}{c_a} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\delta k_B}{k_B}\right)^2 - \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 - \left(\frac{\delta N_a}{N_a}\right)^2 - \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2} = \underline{0{,}64.10^{-6}}$$

Cette valeur se rapproche de celle recherchée en II.A.2

II.B.1) ⓐ Par symétrie sphérique $\vec{v}(r,t) = v(r,t)\,\vec{e_r}$ donc $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ (cf Formulaire).

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{grad}\,\phi}$$

or l'équation d'Euler donne : $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t}$

donc $\Pi(r,t) = -\mu_0 .\frac{\partial \phi}{\partial t}(r,t) + \underbrace{cste(t)}_{=0 \text{ car } \Pi(r,t)=0 \text{ si } \phi(r,t)=0}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t}(r,t) = -\frac{1}{\mu_0}\Pi(r,t)}$$

(b) Soit $\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(r,t) = -\dfrac{1}{\mu_0}\,\pi(r,t) \\ \text{et} \\ \Delta\pi(r,t) - \dfrac{1}{c_a^2}\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}(r,t) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\Delta\phi - \dfrac{1}{c_a^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right] = 0$

$$\Rightarrow \Delta\phi - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = cste(r) = -\Delta\alpha(r).$$

$$\Rightarrow \Delta(\alpha+\phi) - \frac{1}{c_a^2}\frac{\partial^2(\alpha+\phi)}{\partial t^2} = 0$$

Il existe donc un potentiel qui vérifie :

$$\boxed{\Delta\phi - \frac{1}{c_a^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0}$$

II.B.2) Les parois étant rigides $v(r=a) = 0$. La CL entraîne une quantification des ω.

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(a) = cste}$$

II.B.3) Soit $\vec{j_e} = \pi\vec{v}$ $\Leftrightarrow \vec{j_e} = -\mu_0\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e_r}$

$$\Leftrightarrow \vec{j_e} = -\mu_0 f(-\omega)\sin(\omega t).\,f'\cos\omega t\,\vec{e_r}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{j_e}(r,t) = \frac{\mu_0\omega}{2}\sin(2\omega t).\,f(r).\,f'(r)\,\vec{e_r}}$$

D'où $\boxed{\langle\vec{j_e}\rangle_t = 0}$ ce résultat est logique car les ondes stationnaires ne transportent pas d'énergie. L'énergie est confinée dans le résonateur.

II.B.4) Soit $\left\{\begin{array}{l} \Delta\phi - \dfrac{1}{c_a^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \\ \text{et} \\ \phi = f(r)\cos(\omega t) \end{array}\right.$

d'où : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\Big[r f(r)\cos\omega t\Big] + \dfrac{1}{c_a^2}\omega^2 f(r)\cos(\omega t) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r f(r)\big) + \underbrace{\frac{\omega^2}{c_a^2}}_{k^2} r f(r) = 0$$

$$\Leftrightarrow r f(r) = A\sin kr + B\cos kr$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \frac{A}{r}\sin kr + \frac{B}{r}\cos kr$$

or $f(r)$ existe en $r = 0$ d'où $B = 0$ $\Rightarrow \boxed{\phi(r,t) = \dfrac{A}{r}\sin(kr)\cos(\omega t)}$

II.B.5) Or $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \Leftrightarrow \left[-\dfrac{A}{r^2}\sin(kr) + \dfrac{kA}{r}\cos(kr)\right]\cos\omega t\,\Bigg|_{r=a} = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sin(ka)}{a} + k\cos(ka) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(ka) = ka$$

Posons $\boxed{g(x) = \tan(x) - x}$ et notons x_n la racine n-ième de l'équation $g(x) = 0$.

$$\Rightarrow k_n a = x_n \Leftrightarrow \frac{2\pi\nu_n}{c_a} = x_n \Leftrightarrow \boxed{\nu_n = \frac{c_a}{2\pi}\cdot x_n}$$

II.B.6) Donc $\boxed{c_a = \dfrac{2\pi\nu_1 a}{x_1}} = 307{,}8245_1\ \mathrm{ms^{-1}}$ où $\dfrac{\delta c_a}{c_a} = \sqrt{\left(\dfrac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta\nu_1}{\nu_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta x_1}{x_1}\right)^2} \simeq 1{,}8.10^{-6}$

or $\dfrac{\delta c_a}{c_a}$ doit être inférieur à $0{,}64.10^{-6}$ (II.A.3) donc <u>ce n'est pas acceptable</u>

II.B.7) Or $k_B = \dfrac{c_a^2 M}{\gamma N_a T} = 1{,}380648_3.10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$ et $\dfrac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{4\left(\dfrac{\delta c_a}{c_a}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta N_a}{N_a}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta T}{T}\right)^2} = 3{,}9.10^{-6}$

$\Rightarrow \delta k_B = 5{,}4.10^{-29}\ \mathrm{JK^{-1}}$ $\Rightarrow k_B = \left[\underbrace{1{,}380648} \pm 6.10^{-6}\right]10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$

On peut donc fixer <u>6 chiffres significatifs</u> par cette mesure