

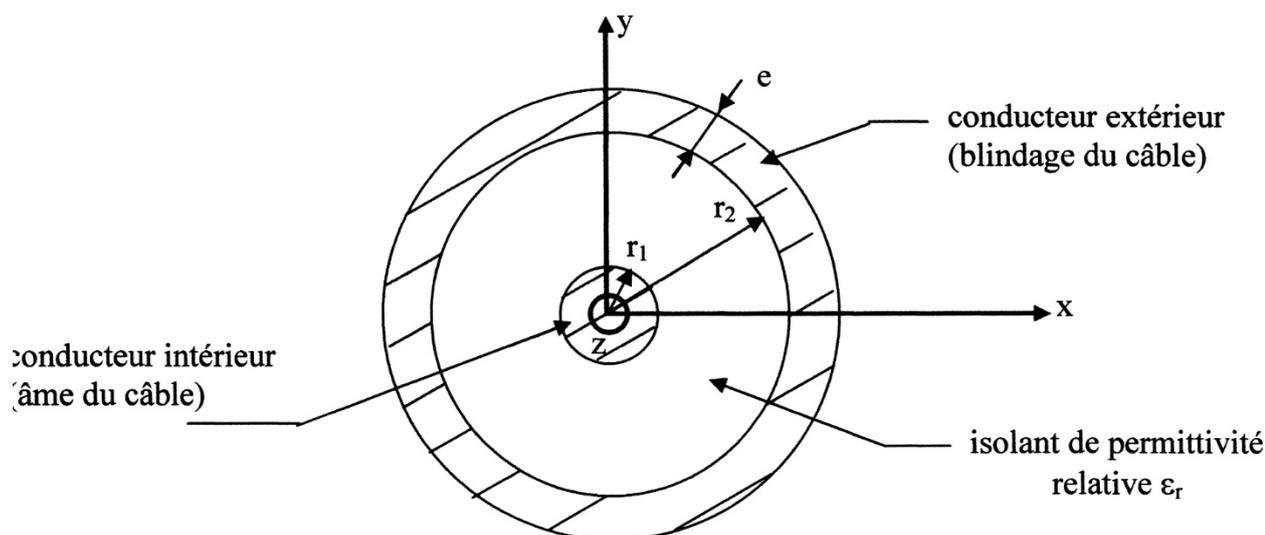
## Physique : DM6

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

### Partie I – Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres coaxiaux parfaitement conducteurs, de même axe Oz, et de rayons respectifs  $r_1$ ,  $r_2$  et  $(r_2+e)$ , et de longueur  $\ell$ . La longueur de la ligne  $\ell$  est assez grande devant  $r_1$  et  $r_2$  pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités : on considère que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur  $\ell$  était infinie**.

L'espace entre les deux conducteurs contient un isolant, homogène et isotrope de permittivité relative  $\epsilon_r = 2,0$ . On rappelle que la permittivité absolue  $\epsilon$  de l'isolant est liée à sa permittivité relative par la relation  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ , la notation  $\epsilon_0$  désignant la permittivité absolue du vide.



Pour les applications numériques, on prendra:  $r_1 = 0,15 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 0,50 \text{ cm}$ ,  $\ell = 10 \text{ m}$ ,  $e = 0,10 \text{ cm}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

**1. Le conducteur intérieur est porté au potentiel  $V_1$  constant et le conducteur extérieur au potentiel  $V_2$ , qu'on suppose nul. Les conducteurs, en équilibre électrostatique, portent alors respectivement les charges électriques  $+Q$  et  $-Q$ , supposées uniformément réparties sur les deux seules surfaces des conducteurs qui sont de rayon  $r_1$  et  $r_2$ .**

1.1. Montrer que le champ électrique est radial et que sa valeur algébrique ne dépend que de  $r$ , soit :  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$ .

1.2.a. Etablir l'expression de  $E(r)$  en fonction de  $Q$ , de la permittivité  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$  de l'isolant, de  $r$  et de  $\ell$ , en distinguant les trois cas :  $r < r_1$ ,  $r_1 < r < r_2$  et  $r_2 < r < (r_2+e)$ . Il est rappelé que l'expression de  $E(r)$  demandée se déduit de celle obtenue dans le cas d'un câble coaxial « à vide » en remplaçant la permittivité absolue  $\varepsilon_0$  du vide par celle,  $\varepsilon$ , du matériau isolant

1.2.b. Montrer que, dans le domaine  $r > (r_2+e)$ ,  $E(r) = 0$ .

1.3.a. Tracer le graphe de  $E(r)$ .

1.3.b. Commenter **physiquement** les éventuelles discontinuités de  $E(r)$  à la traversée des cylindres de rayons  $r_1$ ,  $r_2$  et  $(r_2+e)$ .

1.4. Exprimer la tension  $U_{12} = V_1 - V_2$  en fonction de  $Q$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ ,  $\ell$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

1.5. Montrer que la capacité par unité de longueur du câble coaxial, notée  $C_1$ , est donnée par :

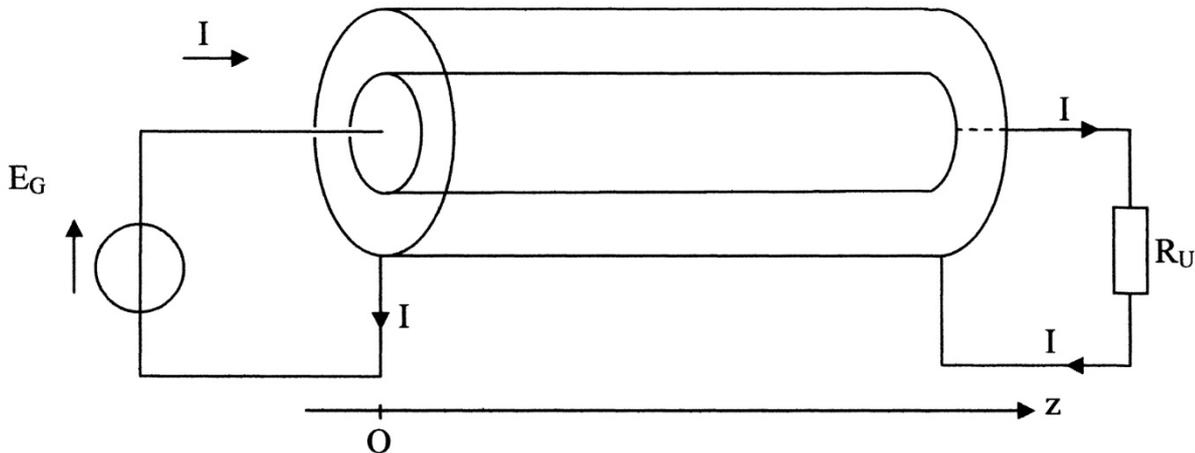
$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

1.6. En déduire **simplement** l'expression de l'énergie électrostatique  $W_e$  emmagasinée par le câble coaxial de longueur  $\ell$ .

1.7. Calculer la valeur numérique de  $C_1$ .

1.8. Calculer la valeur numérique de  $W_e$  pour une tension  $U_{12} = 10$  V entre les armatures du câble.

2. Le câble coaxial est chargé (à sa sortie) par une résistance  $R_U$  et alimenté en entrée par un générateur de tension continue  $E_G$ .



Le conducteur intérieur constitue le conducteur aller du courant électrique d'intensité  $I$ .  
Le conducteur extérieur constitue le conducteur retour de ce courant.

Les conducteurs sont parcourus dans toute leur épaisseur par des courants volumiques de densités uniformes  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ , de même direction que  $Oz$ . On considère de nouveau que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur  $\ell$  était infinie.**

2.1. Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de  $r$ , soit :  $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ .

2.2. Etablir les expressions de  $B(r)$ , en fonction de  $\mu_o$ ,  $I$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et de  $e$ , en distinguant quatre domaines à définir.

2.3.a. Tracer l'allure du graphe de  $B(r)$ .

2.3.b. Observe-t-on des discontinuités de  $B(r)$  à la traversée des cylindres de rayons  $r_1$ ,  $r_2$  et  $(r_2+e)$ ? Aurait-on pu le prévoir avant de traiter les questions 2.1 à 2.2? Pourquoi?

2.4.a. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique en un point de l'espace, en fonction du champ magnétique en ce point.

**Dans toute la suite**, on néglige, notamment pour alléger les calculs, la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme - région  $r < r_1$  - et celle localisée dans le blindage - région  $r_2 < r < (r_2+e)$  - du câble coaxial.

2.4.b. Exprimer, **dans ces conditions**, l'énergie magnétique  $W_m$  emmagasinée par le câble coaxial de longueur  $\ell$ , en fonction de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et de  $\ell$ .

2.5. En déduire l'expression de l'inductance propre du câble coaxial par unité de longueur notée  $L_1$ .

2.6. Calculer la valeur numérique de  $L_1$ .

2.7. Le câble coaxial est parcouru par un courant d'intensité  $I = 0,10$  A.  
Calculer la valeur numérique de l'énergie magnétique  $W_m$  emmagasinée par le câble coaxial.

**3. Les conducteurs intérieur et extérieur ont une conductivité  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$  S.m<sup>-1</sup>.**

3.1. Exprimer la résistance des conducteurs par unité de longueur, notée  $R_1$ , en fonction de  $\gamma$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , et de  $r_3 = (r_2 + e)$ .

3.2. Calculer la valeur numérique de  $R_1$ .

3.3. On souhaite régler la tension  $E_G$  du générateur pour obtenir un courant d'intensité  $I = 0,20$  A. La ligne est chargée par  $R_u = 50 \Omega$ . Calculer la valeur numérique de  $E_G$ .

## PARTIE II – CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Un disque conducteur de conductivité  $\sigma$ , d'axe  $Oz$  vertical, de rayon  $b$  et d'épaisseur  $e$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  (figure 6). Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical  $Oz$  de rayon  $a$  ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé verticalement suivant le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  ;
- il varie sinusoïdalement au cours du temps selon la forme :  $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t)\vec{e}_z$ , où  $B_m$  représente son amplitude et  $\omega$  sa pulsation.

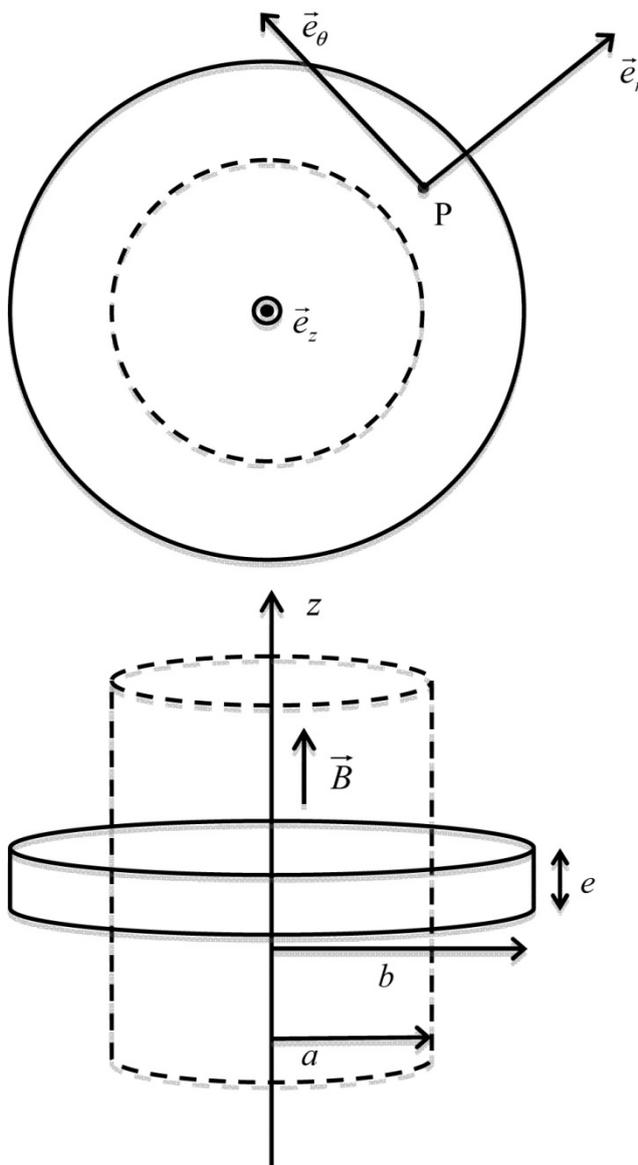


Figure 6 : disque conducteur et champ magnétique

Nous admettrons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit  $\vec{j}$  ;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme :  $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$  ;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

**1** – Rappeler la relation liant le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  au champ électrique  $\vec{E}$  dans un conducteur de conductivité  $\sigma$ .

**2** – On considère un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  et d'axe  $Oz$ . Déterminer la circulation  $C(r,t)$  du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera  $C(r,t)$  en fonction de  $r$ ,  $j(r,t)$  et  $\sigma$ .

**3** – Déterminer l'expression du flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers la surface définie par le contour  $\Gamma$ .

On distinguera très clairement les deux cas où  $r < a$  et  $a < r < b$ .

**4** – En appliquant la loi de Faraday, déterminer l'expression du courant volumique induit  $j(r,t)$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $B_m$  et  $t$ .

On distinguera très clairement les deux cas où  $r < a$  et  $a < r < b$ .

**5** – Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule.

**6** – En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon  $r$ , de largeur  $dr$  et d'épaisseur  $e$ , déterminer l'expression de la puissance totale  $P_{\text{joule}}$  dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne  $\langle P_{\text{joule}} \rangle$ .

On montrera que  $\langle P_{\text{joule}} \rangle$  peut se mettre sous la forme  $\langle P_{\text{joule}} \rangle = A\omega^2 B_m^2$  où  $A$  est un coefficient que l'on exprimera en fonction de  $e$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$ .

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où  $a = b$ . Dans ce cas, le coefficient  $A$  est donné

par l'expression :

$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}.$$

**7** – Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques à induction pour chauffer les casseroles et leur contenu.

Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité ?

Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.

**8** – En pratique, le champ magnétique utilisé a une pulsation  $\omega$  de l'ordre de  $2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$  (courant de fréquence  $f$  de l'ordre de 30 kHz). Son intensité  $B_m$  est de l'ordre de  $10^{-4} \text{ T}$ .

On considère une plaque à induction de rayon  $b = 10 \text{ cm}$  et une casserole dont le fond a le même rayon  $a = b = 10 \text{ cm}$ , une épaisseur  $e = 1,0 \text{ cm}$  et une conductivité  $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ .

Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne  $\langle P_{\text{joule}} \rangle$  dissipée dans le fond de la casserole.

## PARTIE III – LE HAUT-PARLEUR

Un haut-parleur électrodynamique, schématisé en figure 1, est constitué d'un châssis sur lequel est fixé le circuit magnétique. Sur cet ensemble rigide est fixé l'élément actif du haut-parleur : l'équipage mobile formé de la membrane et de la bobine mobile. La liaison avec le châssis est assurée, près du centre par le spider, pièce de toile rigidifiée par du plastique et qui joue le rôle d'un ressort et sur le pourtour par une suspension périphérique. L'ensemble de la suspension assure le rappel vers la position d'équilibre et le guidage en translation parallèlement à l'axe  $z'z$ . Le circuit magnétique, constitué d'aimants permanents, génère un champ magnétique  $\vec{B}$  radial et uniforme ( $B = 1,05 \text{ T}$ ) dans l'entrefer. La longueur totale du bobinage de la bobine mobile vaut  $l = 3,81 \text{ m}$ . La masse de l'équipage mobile vaut  $m = 4,0 \text{ g}$ .

Les parties **A.1-**, **A.2-** et **A.3-** ne sont que très partiellement liées.

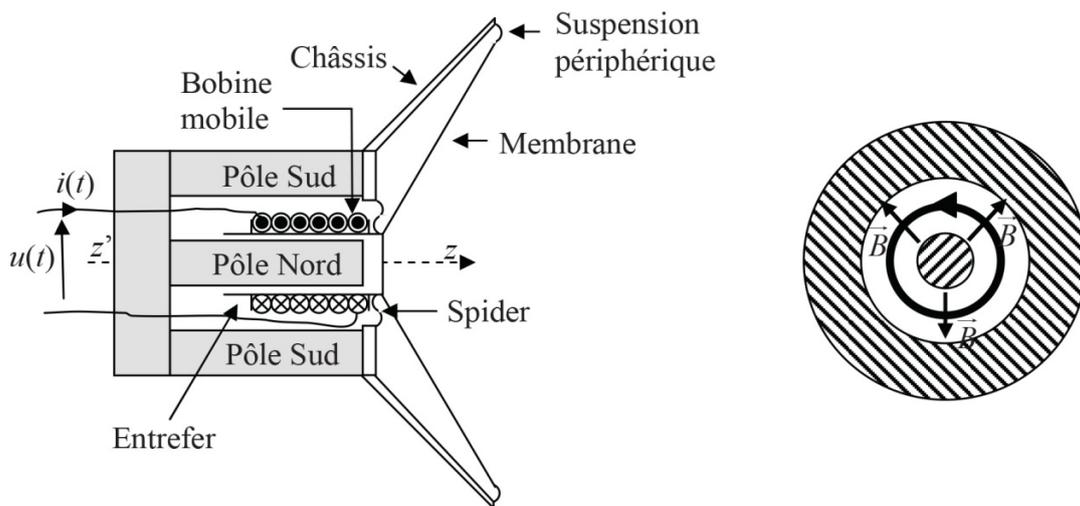


Figure 1 : schéma de principe du haut-parleur électrodynamique

### A.1- Etude temporelle du fonctionnement

**A.1.1-** Pourquoi qualifie-t-on le haut-parleur de convertisseur électromécanique ?

**A.1.2-** On applique aux bornes de la bobine une tension variable  $u(t)$ . La bobine est alors traversée par un courant d'intensité  $i(t)$  et la membrane se déplace avec la vitesse  $v(t)$ .

**A.1.2.1-** Justifier précisément l'apparition d'une f.é.m. induite  $e(t)$  aux bornes de la bobine.

**A.1.2.2-** Le schéma électrique équivalent de la bobine est donné en figure 2, page suivante. Donner la relation qui lie  $u(t)$  à  $i(t)$ ,  $i'(t) = \frac{di(t)}{dt}$  et  $e(t)$ . Que représente chacun des termes de cette équation dite électrique ? Pour la suite du problème, on posera  $e(t) = v(t) \cdot B \cdot l$ .

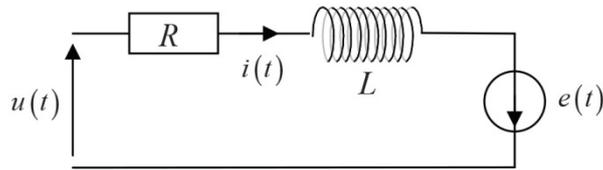


Figure 2 : schéma électrique de la bobine

**A.1.3-** Donner l'expression de la force élémentaire de Laplace  $d\vec{f}_L$  exercée sur une portion de conducteur de longueur  $dl$  en fonction de  $i(t)$ ,  $dl$ ,  $B$  et  $\vec{u}_z$ .

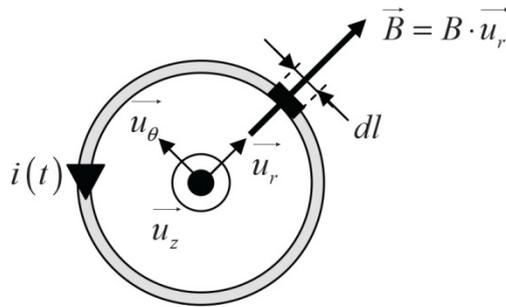


Figure 3 : portion de conducteur soumise à la force de Laplace

**A.1.4-** En prenant l'origine des  $z$  comme étant la position d'équilibre du centre d'inertie de l'équipage mobile (bobine + membrane), le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système donne la relation suivante :  $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t) \cdot l \cdot B \cdot \vec{u}_z - k \cdot z(t) \cdot \vec{u}_z - \lambda \cdot \vec{v}$ . Interpréter les différents termes de cette relation.

En déduire une équation reliant  $i(t)$  à  $z(t)$  et ses dérivées  $z'(t) = \frac{dz(t)}{dt}$  et  $z''(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$ .

L'équation ainsi obtenue est appelée équation mécanique.

## A.2- Régime sinusoïdal forcé

La tension appliquée est supposée sinusoïdale, de fréquence  $f$  :  $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$  et  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ . Nous utiliserons le formalisme complexe qui, à toute fonction sinusoïdale du type  $a(t) = A_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$  associe la fonction complexe  $\underline{a}(t) = A_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ . On rappelle que  $j$  est le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ .

**A.2.1-** Ecrire les équations mécanique et électrique en utilisant le formalisme complexe.

**A.2.2-** En déduire l'expression de l'impédance du haut-parleur  $\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$ .

**A.2.3-** Cette impédance  $\underline{Z}(\omega)$  correspond à la mise en série de deux impédances : l'une  $\underline{Z}_e(\omega)$ , appelée impédance propre, qui ne contient que des termes relatifs au circuit électrique et l'autre  $\underline{Z}_m(\omega)$ , appelée impédance motionnelle, qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du système. Préciser les expressions de  $\underline{Z}_e(\omega)$  et  $\underline{Z}_m(\omega)$ .

**A.2.4-** Montrer que l'admittance motionnelle  $\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)}$  peut s'écrire sous la forme :

$\underline{Y}_m(\omega) = j \cdot C_m \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot L_m \cdot \omega} + \frac{1}{R_m}$ . Préciser les expressions de  $C_m$ ,  $L_m$  et  $R_m$  en fonction de  $l$ ,  $B$ ,  $k$ ,  $m$  et  $\lambda$ . On donne  $k = 1\,250 \text{ N.m}^{-1}$  et  $\lambda = 1,0 \text{ kg.s}^{-1}$ , vérifier que  $C_m = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ ,  $L_m = 12,8 \text{ mH}$  et  $R_m = 16 \Omega$ .

**A.2.5-** Proposer un schéma électrique équivalent de l'impédance  $\underline{Z}(\omega)$  du haut-parleur dans lequel vous ferez apparaître  $R$ ,  $L$ ,  $C_m$ ,  $L_m$  et  $R_m$ .

**A.2.6-** On peut également poser que l'impédance du haut-parleur se compose d'une partie réelle  $R_T$  et d'une partie imaginaire  $X_T$  :  $\underline{Z}(\omega) = R_T + j \cdot X_T$ . Montrer alors que l'expression de  $R_T$  est la suivante :  $R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \cdot \left( C_m \cdot \omega - \frac{1}{L_m \cdot \omega} \right)^2}$ .

**A.2.7-** En utilisant la courbe  $R_T = f(\omega)$  de la figure 4, déterminer la valeur numérique de la résistance  $R$  et montrer que la fréquence de résonance vaut  $f_0 = 89 \text{ Hz}$ . Vérifier la cohérence de la valeur de  $f_0$  avec les données de l'énoncé.

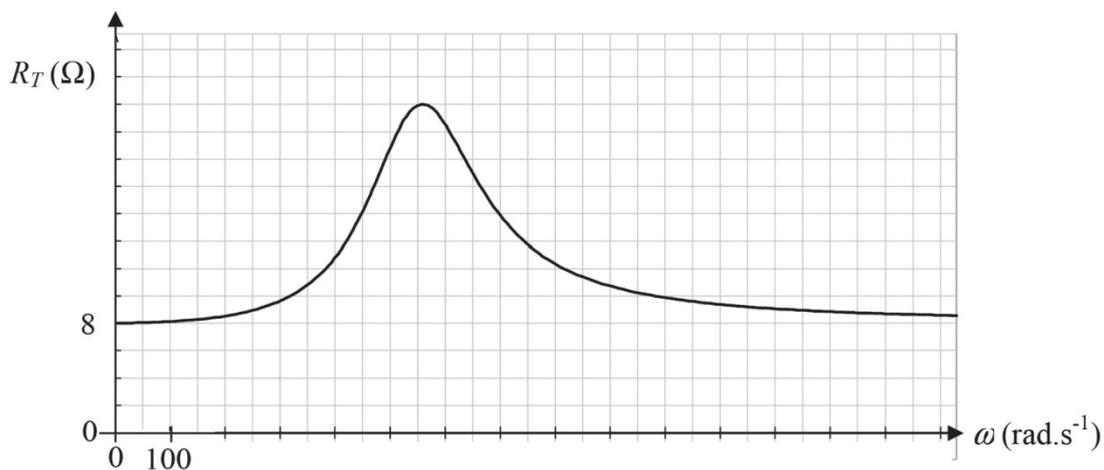


Figure 4 : courbe représentant  $R_T$  en fonction de  $\omega$

### A.3- Etude énergétique

Nous ferons l'hypothèse que la transformation de l'énergie mécanique des parties mobiles en énergie acoustique s'effectue sans perte.

**A.3.1-** Etablir le bilan de puissance électrique global sous la forme :

$$u(t) \cdot i(t) = \frac{d(E_{magn})}{dt} + P_J(i(t)) + P_L(v(t)).$$

Préciser les expressions de  $E_{magn}$ ,  $P_J(i(t))$  et  $P_L(v(t))$ .

Interpréter chacun des termes du bilan.

**A.3.2-** Etablir le bilan de puissance mécanique global sous la forme :

$$\frac{d(E_c(v(t)))}{dt} + P_A(v(t)) + \frac{d(E_{pe}(z(t)))}{dt} = P_L(v(t)).$$

Préciser les expressions de  $E_c(v(t))$ ,  $E_{pe}(z(t))$  et  $P_A(v(t))$ .

Interpréter chacun des termes du bilan.

**A.3.3-** Dédurre des deux relations précédentes que :

$$u(t) \cdot i(t) = \frac{d(E_{magn})}{dt} + P_J(i(t)) + \frac{d(E_M(t))}{dt} + P_A(v(t)).$$

**A.3.4-** Montrer que la puissance moyenne  $\langle P_S(t) \rangle$  fournie par l'alimentation électrique est reliée à la valeur moyenne du courant au carré consommé par le haut-parleur  $\langle i(t)^2 \rangle$  et à la valeur moyenne de la vitesse au carré de l'équipage mobile  $\langle v(t)^2 \rangle$  par la relation :

$$\langle P_S(t) \rangle = R \cdot \langle i(t)^2 \rangle + \lambda \cdot \langle v(t)^2 \rangle.$$

Lequel de ces termes correspond à la puissance utile moyenne  $\langle P_u(t) \rangle$  ? En déduire l'expression du rendement  $\eta$ .

**A.3.5-** La tension  $u(t)$  appliquée aux bornes du haut-parleur est une tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace  $U_{eff}$ . La bobine est alors traversée par un courant  $i(t)$  alternatif sinusoïdal d'intensité efficace  $I_{eff}$ .

On rappelle que le haut-parleur peut se modéliser comme indiqué en figure 5. Montrer que le rendement  $\eta$  défini en question **A3.4-** a pour expression  $\eta = \frac{R_T - R}{R_T}$ .

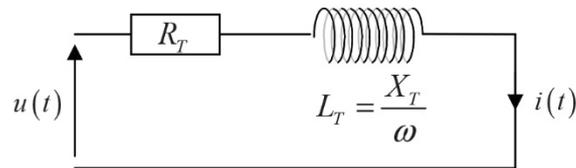


Figure 5 : modélisation du haut-parleur

**A.3.6-** On donne, en figure 6, la représentation du rendement  $\eta$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Pour quelle fréquence le rendement est-il maximal ? Est-ce en accord avec les valeurs numériques précédentes ? Justifier votre réponse.

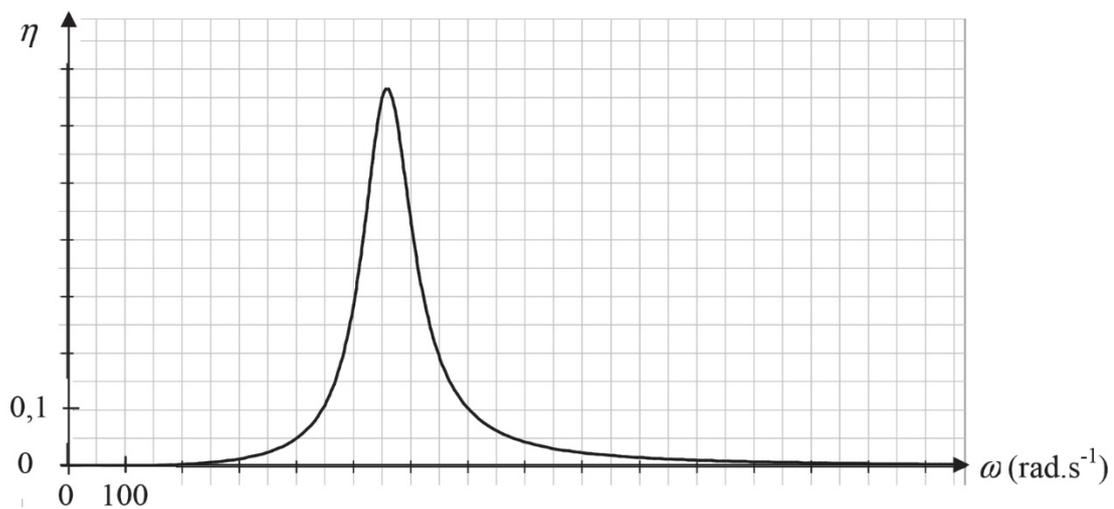


Figure 6 : courbe représentant le rendement  $\eta$  en fonction de la pulsation  $\omega$

**A.3.7-** Dans quelle gamme de fréquences l'utilisation du haut-parleur est-elle intéressante ? Rappeler l'intervalle de fréquences dans lequel l'oreille humaine entend les sons.

**A.3.8-** Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques comportent plusieurs haut-parleurs.

