Physique : DM n°2

A – Etude thermique d'un bâtiment (CCP 2016 – MP)

I.1.a)

* Soit $[C_v] = J.K^{-1}.m^{-3}$

* On a $\boxed{C = C_v . abh} = \underline{\underline{125\ kJ.K^{-1}}}$

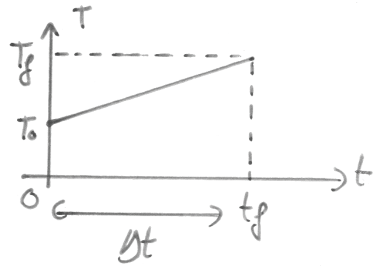
I.1.b) 1er principe : $d(U+E) = \delta W + \delta Q$

or $\begin{cases} dE = 0 : \text{pas de variation d'Em} \\ \delta W = 0 : \text{car volume constant} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad C dT = P dt$

Donc $\boxed{P = C \dfrac{dT}{dt}}$ (1)

I.1.c) (1) $\Rightarrow \boxed{T = T_0 + \dfrac{P}{C} t}$ (2) avec



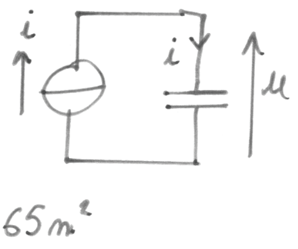
Pour atteindre une température T_f, il faut une durée

$\Delta t = \dfrac{C}{P}(T_f - T_0) = \underline{\underline{625 s \simeq 10 min}}$

I.1.d) Analogie : $i \Leftrightarrow P$, $U \Leftrightarrow T$, $C \leftarrow C$ de l'énoncé.

(en farad)

D'où $i = C \dfrac{du}{dt} \Rightarrow$



I.2.a) On a $\boxed{S_p = 2(a+b) \times h} = \underline{\underline{65 m^2}}$

I.2.b) On a $V_b = S_p . L = 9{,}8 m^3$ et $\boxed{C_{mur} = \rho c V_b} = \underline{\underline{21\ MJ.K^{-1}}}$

D'où $C_{mur}/C = 170$, la pièce va monter plus doucement en température à cause des murs épais.

I.3.a) • Fourier : $\boxed{\vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \dfrac{dT}{dx} \vec{u_x}}$

traduit le fait que les transferts thermiques se font du chaud vers le froid.

• j s'exprime en $W.m^{-2}$; il représente la puissance thermique qui passe à travers le mur par m^2.

• Dimension : $\boxed{[\lambda] = W m^{-1} K^{-1}}$

$$= ML^2T^{-3} \times L^{-1} \theta^{-1}$$

$$= MLT^{-3}\theta^{-1}$$

température

I.3.b) D'après le premier principe : $dU = \delta Q$

or : $\begin{cases} dU = \dfrac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \times \rho\, d\tau \\ \delta Q = \left[\left(j(x,t) - j(x+dx,t)\right) S\right] dt \simeq -\dfrac{\partial j}{\partial x} S\, dx\, dt \end{cases}$

D'où $\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$

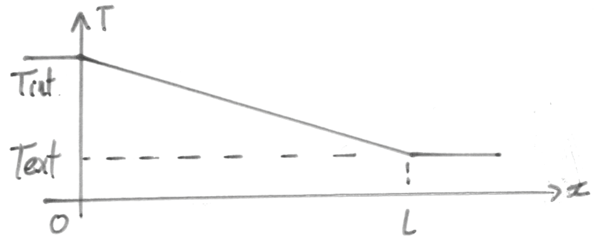
or $\begin{cases} du = c\,dT \\ j = -\lambda \dfrac{dT}{dx} \end{cases} \Rightarrow \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

I.4.a) Régime stationnaire : $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0}$

I.4.b) Donc $T(x) = Ax + B$ et avec les conditions aux limites :

$$T(x) = T_{int} + \frac{T_{ext} - T_{int}}{L} x$$



I.4.c) . Par définition $T_{moy} = \frac{1}{L}\int_0^L T(x)\,dx = \boxed{\frac{T_{int}+T_{ext}}{2} = T_{moy}}$

. On vérifie que $T_{moy} = T(L/2)$

I.4.d) On a $j = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda A$ d'où $\boxed{j = \lambda \frac{T_{int}-T_{ext}}{L}}$ indépendant de x

car $\frac{\partial j}{\partial x} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$.

I.4.e) . Cette puissance doit compenser les pertes sur les murs car sol et plafond isolés.

Or $Pertes = j S_p = 6{,}5\,kW > P = 2\,kW$

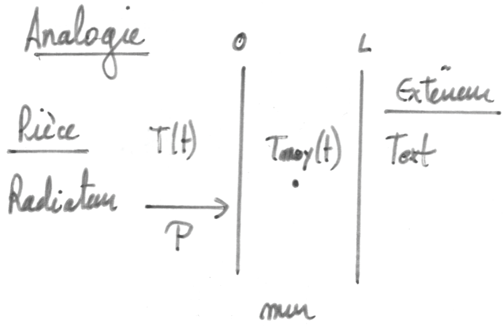
$\Rightarrow$ <u>le radiateur n'est pas suffisant</u>

I.5.a) <u>Analogie</u> :

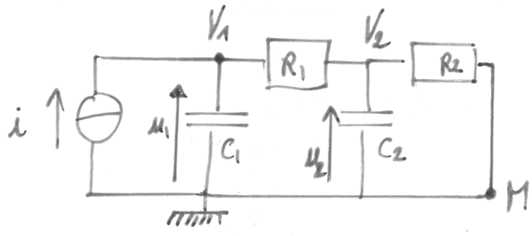
$\vec{j} = -\gamma\,\overrightarrow{grad}\,V \longleftrightarrow$	$\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T$
$\gamma \longleftrightarrow$	λ
$\vec{j} \longleftrightarrow$	$\vec{j}_{th}$
$V \longleftrightarrow$	T
$i \longleftrightarrow$	P

I.5.b) D'où $\boxed{R_{mur} = \frac{L}{\lambda S_p}} = \underline{\underline{1{,}5\,m\,K.W^{-1}}}$

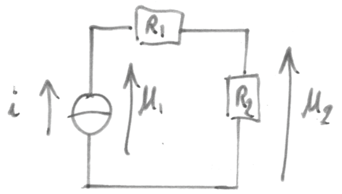
I.6.a) Analogie



- $I \leftrightarrow P$
- $R_1 + R_2 = R_{mur}$ (moitié intérieure ; moitié extérieure)
- $C_2 = C_{mur}$
- $C_1 = C$
- $u_1 = V_1 - V_M = T(t) - T_{ext}$
- $u_2 = V_2 - V_M = T_{moy} - T_{ext}$



I.6.b) En régime permanent continu les condensateurs se comportent comme des circuits ouverts d'où



$$\Rightarrow u_2(t\to\infty) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\, u_1(t\to\infty)$$

$$\Rightarrow (T_{moy} - T_{ext}) = \frac{R_2}{R_1+R_2}(T_{int} - T_{ext})$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{1}{2}(R_1+R_2) \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} R_2 = R_{mur}/2 \\ R_1 = R_{mur}/2 \end{cases}$$

I.7.a) R_2 et C_2 en // : $\underline{Z}_2 = \dfrac{R_2/jC_2\omega}{R_2 + 1/jC_2\omega}$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

I.7.b) R_1 et $\underline{Z}_2$ en série : $\underline{Z}_1 = R_1 + \underline{Z}_2$

I.7.c) C_1 et $\underline{Z}_1$ en parallèle donc $\underline{i}(t) = \left(jC_1\omega + \dfrac{1}{\underline{Z}_1}\right)\underline{u}_1$

1.7.d) Soit $\underline{i} = \left(jC_1\omega + \dfrac{1}{\underline{Z}_1}\right)\underline{u}_1$

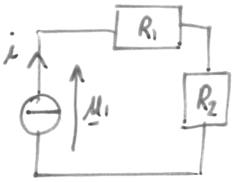
$$= \left(jC_1\omega + \frac{1}{R_1+\underline{Z}_2}\right)\underline{u} = \left[\frac{jR_1C_1\omega + jC_1\underline{Z}_2\omega + 1}{R_1 + \dfrac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}}\right]\underline{u}_1$$

$$= \left[\frac{1+jR_2C_2\omega + jR_1C_1\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2 + jC_1R_2\omega}{R_1 + jR_1R_2C_2\omega + R_2}\right]\underline{u}_1$$

Donc $$\underline{u}_1 = \frac{(R_1+R_2) + jR_1R_2C_2\omega}{1+j\left[(R_1+R_2)C_1\omega + R_2C_2\omega\right] - R_1R_2C_1C_2\omega^2}\,\underline{i}$$

D'où $$\boxed{\underline{U}_1 = \frac{1+j\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_2\omega}{1+j\left[(R_1+R_2)C_1+R_2C_2\right]\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}(R_1+R_2)I_0}$$ CQFD

1.8a) . A Basses fréquences : $\underline{U}_1 \to (R_1+R_2)I_0$, on retrouve le régime stationnaire

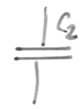


les condensateurs ne jouent plus de rôle, on n'a plus que des pertes par conduction à travers le mur.

. A hautes fréquences : $\underline{U}_1 \to -j\dfrac{1}{C_1\omega}I_0 = \dfrac{1}{jC_1\omega}I_0 \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0$

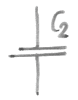
Donc $T(t) = T_{ext}$ ce qui est cohérent.

I.8.b) . Si $C_2 = 0$ alors $\underline{U}_1 = \dfrac{(R_1+R_2)I_0}{1+j(R_1+R_2)C_1\omega}$ ce qui correspond



circuit ouvert

. Si $C_2 \to \infty$ alors $\underline{U}_1 = \dfrac{R_1 I_0}{1+jR_1C_1\omega}$ en effet $\underline{Z}_{C_2} \to 0$.



Circuit fermé

I.8.c) Soit $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{10}} = \dfrac{\underline{U}_1}{(R_1+R_2)I_0}$ d'où si $\omega \to 0$: $\underline{H} \to 1$

si $\omega \to \infty$: $\underline{H} \to 0$

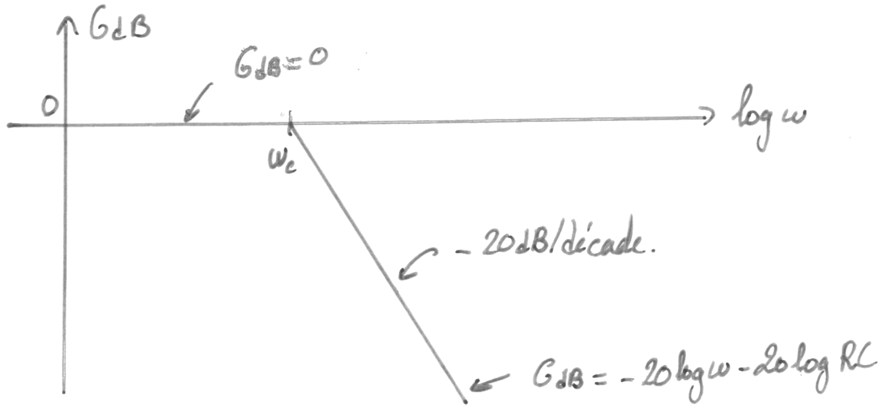
c'est un passe-bas d'ordre 2

I.8.d) $\begin{cases} \text{Si } R_1 = R_2 = R/2 \\ C_2 = \alpha C_1 = \alpha C \end{cases}$

alors $$\underline{H} = \frac{1 + j\,\frac{R^2/4}{R}\cdot \alpha C\omega}{1 + j\left[\,RC + \frac{R}{2}\alpha C\right]\omega - \frac{R^2}{4}\alpha C^2\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1 + j\,\frac{\alpha}{4} RC\omega}{1 + j RC\left[1 + \alpha/2\right]\omega - \frac{\alpha}{4}(RC\omega)^2}}$$

I.9.a)



On a ω_c définie par $\omega_c = \frac{1}{RC}$ qui correspond à l'intersection des asymptotes.

I.9.b) - cf Annexe

- ω_1 est obtenue à - 3dB.
- ω_2 — à + 3dB au dessus du palier ②
- ω_3 est l'intersection de ② et ③

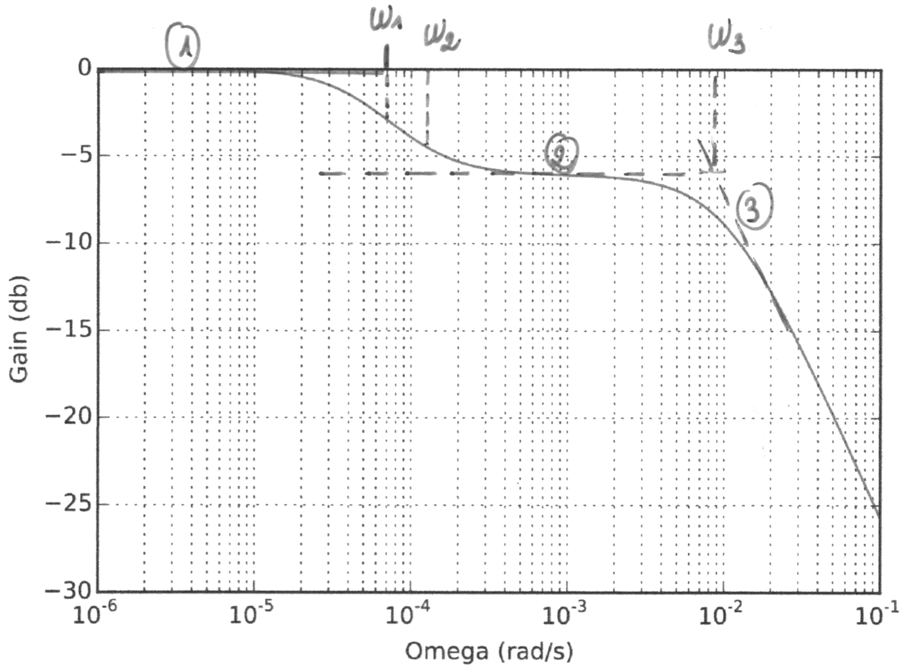
Zone ① : régime stationnaire

Zone ② : les variations rapides de puissance du radiateur affecte la température de la pièce

t.q : $\underline{H} = \frac{j\,\alpha/4\,RC\omega}{RC[1+\alpha/2]\omega} \simeq 1/2$.

Zone ③ : le gain chute de 20dB/décade, les variations rapides de température sont mal répercutées dans la pièce.

Question I.9.b



I.9.c) La fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'un produit de fonctions de transfert du 1er ordre :

$$\underline{H} = \frac{1 + j\omega/\omega_2}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3)}$$

I.9.d) . La pulsation de coupure est t.q : $\underline{G_{dB}(\omega_c) = G_0 - 3dB.}$

$\Rightarrow \omega_c = \omega_1 = 7.10^{-5}\,\text{rad.s}^{-1}$

Posons $\tau_c = 1/\omega_c \simeq 14600\,s \simeq 4h.$

- On peut supposer le régime permanent atteint pour $\underline{\underline{5\tau \simeq 20h}}$