

## Physique : DS3

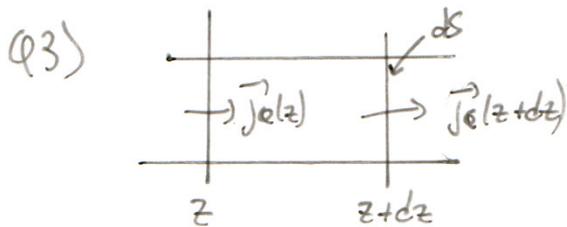
## Partie I - La température du mouton (CCP MP - 2019)

$$Q1) \text{ Par définition: } \begin{cases} \vec{j}_Q = -\lambda \text{ grad } T \\ \text{et } d\phi = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [j_Q] = \text{Wm}^{-2} \\ \text{et} \\ [\lambda] = [j_Q] \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\lambda] = \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \text{ ou Puissance } \text{L}^{-1}\text{T}^{-1}$$

$$Q2) \text{ soit } T = T(z, t)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{d'où } \underline{\vec{j}_Q = j_Q(z, t) \vec{u}_z}$$



D'après le premier principe  $dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c$  or ici  $\delta Q_c = 0$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ or } dU &= \delta U(t+dt) - \delta U(t) \\ &= \mu c dS (T(t+dt) - T(t)) \\ &= \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dT dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Et } \delta Q_{\text{éch}} &= \phi_e dt - \phi_s dt \\ &= j_Q(z) dS dt - j_Q(z+dz) dS dt \\ &= - \frac{\partial j_Q}{\partial z} dS dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q}{\partial z} \quad (1)$$

D'après la loi de Fourier :  $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{u}_z$  d'où  $\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}}_{D_{th}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Q4) En régime stationnaire :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

De plus d'après ① :  $\frac{\partial j_Q}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{j}_Q = \text{cte } \vec{u}_z$

Q5) Soit  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = Ax + B$  avec  $\left. \begin{array}{l} T(0) = T_{entrée} \\ T(e) = T_{sortie} \end{array} \right\}$

d'où  $T = \frac{T_{sortie} - T_{entrée}}{e} x + T_{entrée}$

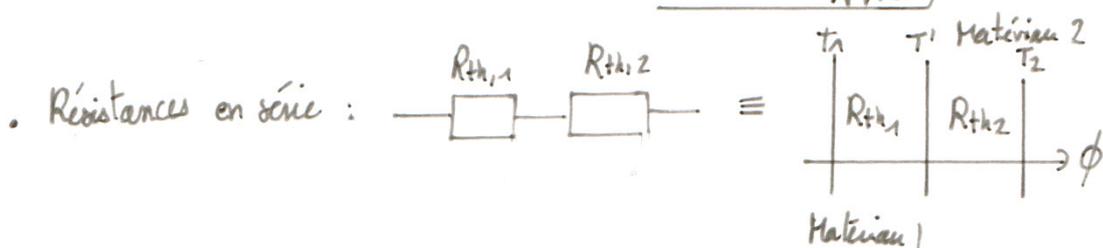
d'où  $\Phi = j_Q S = -\lambda \frac{dT}{dx} \cdot \overset{HL}{S}$

$\Rightarrow \Phi = \lambda HL \cdot \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{e}$

Q6). La résistance thermique est telle que :  $T_{entrée} - T_{sortie} = R_{th} \Phi$

$\Leftrightarrow R_{th} = \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{\Phi}$

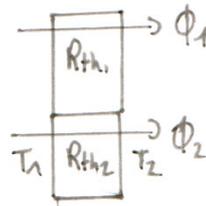
$\Leftrightarrow R_{th} = \frac{e}{\lambda HL}$



d'où  $T_1 - T_2 = R_{th,1} \Phi + R_{th,2} \Phi = R_{th} \cdot \Phi$

$\Rightarrow R_{th} = R_{th,1} + R_{th,2}$

• Résistances en parallèle

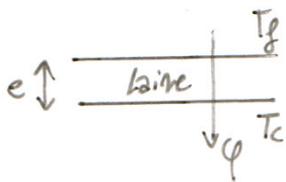


$$\text{d'où } T_1 - T_2 = \begin{cases} R_{th1} \phi_1 \\ R_{th2} \phi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$

Q7)



$$\text{d'où } R_{th, \text{laine}} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} S} = \frac{T_c - T_f}{\phi}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{laine}} = \frac{e \phi}{(T_c - T_f) S}$$

Q8) Entre chaque paroi on a  $T_c - T_i = R_{th} \phi_i$  d'où une association en parallèle de 2 sections de surface  $H^2$  et de 4 sections de surface  $HL$  d'où:

$$\frac{1}{R_{diff}} = \frac{2}{R_{th,1}} + \frac{4}{R_{th,2}}$$

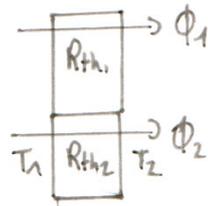
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{diff}} = \frac{2 R_{th,2} + 4 R_{th,1}}{R_{th,1} \cdot R_{th,2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{diff}} = \frac{2 \cdot \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} HL} + 4 \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} H^2}}{\left(\frac{e}{\lambda_{\text{laine}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{HL} \cdot \frac{1}{H^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{diff}} = \frac{\lambda_{\text{laine}}}{e} (2H^2 + 4HL)$$

$$\Leftrightarrow R_{diff} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} (4HL + 2H^2)} \Rightarrow \begin{cases} R_{diff, \text{fondue}} = 0,109 \text{ W}^{-1}\text{K} \\ R_{diff, \text{non fondue}} = 1,18 \text{ W}^{-1}\text{K} \end{cases}$$

• Résistances en parallèle

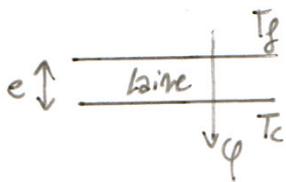


$$\text{d'où } T_1 - T_2 = \begin{cases} R_{th,1} \Phi_1 \\ R_{th,2} \Phi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th,2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$$

Q7)



$$\text{d'où } R_{th, \text{laine}} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} S} = \frac{T_c - T_f}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{laine}} = \frac{e \varphi}{(T_c - T_f) S}$$

Q8) Entre chaque paroi on a  $T_c - T_i = R_{th} \Phi_i$  d'où une association en parallèle de 2 sections de surface  $H^2$  et de 4 sections de surface  $HL$  d'où :

$$\frac{1}{R_{diff}} = \frac{2}{R_{th,1}} + \frac{4}{R_{th,2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{diff}} = \frac{2 R_{th,2} + 4 R_{th,1}}{R_{th,1} \cdot R_{th,2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{diff}} = \frac{2 \cdot \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} HL} + 4 \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} H^2}}{\left(\frac{e}{\lambda_{\text{laine}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{HL} \cdot \frac{1}{H^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{diff}} = \frac{\lambda_{\text{laine}}}{e} (2H^2 + 4HL)$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_{diff}}{\lambda_{\text{laine}} (4HL + 2H^2)} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} (4HL + 2H^2)} \Rightarrow \begin{cases} R_{diff, \text{fondue}} = 0,109 \text{ W}^{-1}\text{K} \\ R_{diff, \text{non fondue}} = 1,18 \text{ W}^{-1}\text{K} \end{cases}$$

$$Q9) \text{ Sint } \vec{j}_{\text{e}} = -h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \vec{n}$$

$$\Rightarrow q_{\text{TOT}}^{\text{cc}} = h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) S$$

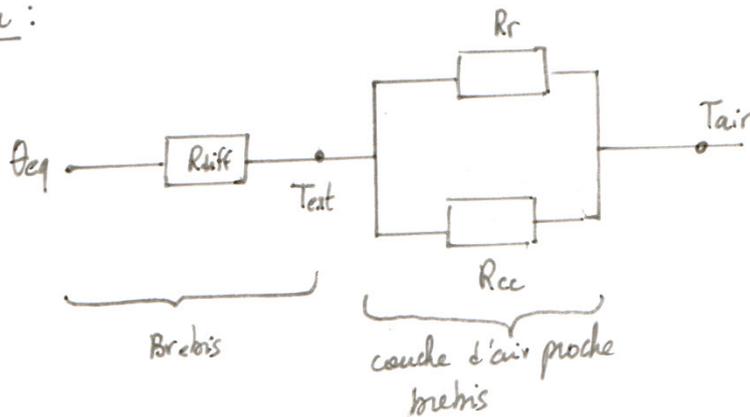
$$\Rightarrow q_{\text{TOT}}^{\text{cc}} = h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) [4HL + 2H^2]$$

$$\text{Or : } R_{\text{cc}} = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}}{q_{\text{TOT}}^{\text{cc}}} \Rightarrow R_{\text{cc}} = \frac{1}{h [4HL + 2H^2]} = \underline{0,18 \text{ W}^{-1}\text{K}}$$

$$Q10) \text{ Sint } P_r = KA(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$$

$$\text{or : } R_r = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}}{P_r} \Rightarrow R_r = \frac{1}{KA} \Rightarrow R_r = \frac{1}{K [4HL + 2H^2]} = \underline{0,15 \text{ W}^{-1}\text{K}}$$

Q11) Schéma :



$$\Rightarrow R = R_{\text{diff}} + \frac{R_{\text{cc}} \cdot R_r}{R_{\text{cc}} + R_r} \Rightarrow \begin{cases} R_{\text{mon, roudue}} = 1,9 \text{ W}^{-1}\text{K} = R_1 \\ R_{\text{rondue}} = 0,17 \text{ W}^{-1}\text{K} = R_2 \end{cases}$$

$0,08 \text{ W}^{-1}\text{K}$

Q12) En confort climatique la boebris perd autant d'énergie que ce qu'elle produit :

• Perte par évaporation :  $\dot{m} \cdot \overbrace{\Delta h_{\text{vap}}}^L$

• Perte thermique :  $\frac{T_{\text{int}} - T_0}{R_1}$

$$\Rightarrow P_{\text{mo}} = \frac{T_{\text{int}} - T_0}{R_1} + \dot{m} L = \underline{18 \text{ W}}$$

$$Q13) \text{ De } \hat{m} : P_{\text{mo}}' = \frac{T_{\text{int}} - T_0}{R_2} + \dot{m} L = \underline{200 \text{ W}}$$

Q14a) Premier principe appliqué à la brebis :  $dU = \delta Q^{th} + \delta Q^{eva} + \delta Q^{met}$ .

$$\Rightarrow \mu c H^2 L \frac{\partial T}{\partial t} dt = \overset{\text{pertes}}{- \frac{T - T_{air}}{R_1} dt} - \overset{\text{pertes}}{D_m \cdot L_{vap} dt} + P_m dt$$

$$\text{or } D_m L_{vap} = P_m - \frac{T_{int} - T_0}{R_1}$$

$$\text{d'où } \mu c H^2 L \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{T - T_{air}}{R_1} dt - P_m dt + \frac{T_{int} - T_0}{R_1} dt + P_m dt$$

$$\Leftrightarrow \mu c H^2 L \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T - T_{air}}{R_1} = P_m - P_m + \frac{T_{int} - T_0}{R_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T - T_{air}}{\mu R_1 c H^2 L} = \frac{P_m - P_m}{\mu c H^2 L} + \frac{\overset{= \theta_{eq}}{T_{int} - T_0}}{\mu c H^2 L R_1}$$

$$\text{d'où } \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T - T_{air}}{C_1} = \frac{T_1 - T_{air}}{C_1}$$

$$\text{où } C_1 = \mu c R_1 H^2 L$$

$$T_1 - T_{air} = R_1 (P_m - P_m) + \theta_{eq} - T_0$$

Q14b) L'éq. dif s'écrit aussi :  $\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{C_1} = \frac{T_1}{C_1}$

$$\Rightarrow T = A e^{-t/C_1} + T_1$$

$$\text{or } T(0) = \theta_{eq} = A + T_1 \Rightarrow A = \theta_{eq} - T_1$$

$$\text{d'où } \underline{T(t) = T_1 + (\theta_{eq} - T_1) e^{-t/C_1}}$$

Q14c) A.N :  $\begin{cases} C_1 = 7,2 \cdot 10^5 \text{ s} = 8,3 \text{ jours} \\ T_1 = 41^\circ \text{e si } T_{air} = 17^\circ \text{c.} \end{cases}$

Q15)

$$\text{On a vu } \begin{cases} P_m = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + \dot{m} \Delta h_{vap} \\ P_{mo} = \frac{T_{int} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta h_{vap} \end{cases} \Rightarrow P_m - P_{mo} = \frac{T_0 - T_{air}}{R_1}$$

$$\text{Or } T_{min} < T_{air} < T_{max} \Rightarrow T_{min} < T_0 - (P_m - P_{mo})R_1 < T_{max}$$

$$\Rightarrow (T_{min} - T_0)/R_1 < P_{mo} - P_m < (T_{max} - T_0)/R_1$$

$$\Rightarrow \underline{P_{mo} + \frac{T_0 - T_{max}}{R_1} < P_m < P_{mo} + \frac{T_0 - T_{min}}{R_1}}$$

$$\text{A.N.: } \underline{13W < P_m < 25W}$$

Q16) De la même façon qu'en Q14a):

$$dU = S Q_{th} + S Q^{ev} + S Q^{met}$$

$$\Leftrightarrow \mu c L H^2 \frac{\delta T}{\delta t} = - \frac{T - T_{air}}{R_2} \delta t - \underbrace{(\dot{m} + \dot{m}')}_{= 3\dot{m}} \Delta h_{vap} \delta t + P_m \delta t$$

$$\Leftrightarrow \mu c L H^2 \frac{\delta T}{\delta t} = - \frac{T - T_{air}}{R_2} - 3 \left( P_{mo} - \frac{T_{int} - T_0}{R_1} \right) + P_m$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta T}{\delta t} + \frac{T - T_{air}}{\mu c R_2 L H^2} = \left[ P_m - 3P_{mo} + 3 \frac{T_{eq} - T_0}{R_1} \right] / \mu c L H^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta T}{\delta t} + \frac{T - T_{air}}{\tau_2} = \frac{T_2 - T_{air}}{\tau_2} \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = \mu c R_2 L H^2 \\ T_2 - T_{air} = R_2 (P_m - 3P_{mo}) + 3(T_{eq} - T_0) \frac{R_2}{R_1} \end{array} \right.$$

D'où  $\left| \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_1}{R_2} \right| = 0,05 \Rightarrow$  l'établissement du régime permanent est beaucoup plus rapide pour la broie torréfiée. Elle est plus sensible au coup de chaud / coup de froid

• la bobine est dans de bonnes conditions si  $T_2 = \theta_{eq}$

$$\Rightarrow \theta_{eq} = T_{air,m} + R_2 (p_m - 3p_{m0}) + 3(\theta_{eq} - T_0) \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow T_{air,m} = \theta_{eq} - R_2 (p_m - 3p_{m0}) + 3(\theta_{eq} - T_0) \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow T_{air,m} = T_{air}(p_m = 13W) = \underline{36,8^\circ C}$$

## Partie II : Tunnel du Fréjus (Mines PC - 2016)

$$1^{\circ}) \text{ Par définition } \begin{cases} T_{\max} = \theta_0 \\ T_{\max} = \theta_0 + T_0 \\ T_{\min} = \theta_0 - T_0 \end{cases}$$

On peut choisir  $T_0 = 15^{\circ}\text{C}$

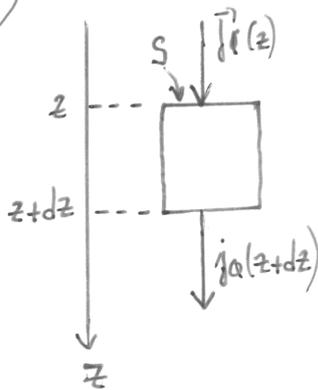
$$2^{\circ}) \text{ On a : } \underline{d\Phi_e = \vec{j}_e \cdot d\vec{S}} \quad \text{où } [j_e] = \underline{\text{Wm}^{-2}}$$

où  $\vec{j}_e$  est la densité du flux thermique homogène à une puissance surfacique.

3<sup>o</sup>) loi de Fourier :  $\underline{\vec{j}_e = -K \text{ grad } T}$  valable dans un milieu isotrope avec des variations de température peu rapides.

$$\text{D'où } [K] = \frac{\text{Wm}^{-2}}{\text{Km}^{-1}} = \underline{\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}$$

4<sup>o</sup>)



$$\text{Soit } \delta Q = [j_e(z) - j_e(z+dz)] S dt$$

$$\Leftrightarrow \underline{\delta Q = - \frac{\partial j_e}{\partial z} dz S dt}$$

5<sup>o</sup>) . de système doit contenir un assez grand nombre de particules pour introduire la notion de température.

. de système doit être assez petit pour tenir compte de l'inhomogénéité de la température à grand volume.

6°) En appliquant le premier principe :  $dU = \delta Q \Rightarrow dU = - \frac{\partial \rho}{\partial z} S dz dt$

ou  $dU = [u(t+dt) - u(t)] \rho_s dG$   
 $= \frac{\partial u}{\partial t} \rho_s dG dt$

$\Rightarrow dU = c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} dG dt$  où  $dG = S dz$

7°) Donc  $\frac{\partial T}{\partial t} c_s \rho_s = - \frac{\partial \rho}{\partial z}$

ou  $\rho = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Rightarrow \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{k}{\rho_s c_s}}_D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  ①

t.q.  $[D] = m^2 s^{-1}$

8°) La forme de solution :  $T = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$  est ondulatoire, la variation de température au sonnet se propage dans la roche.

① s'écrit  $(-ik)^2 D = i\omega$

$\Rightarrow k^2 = -\frac{i\omega}{D} = e^{-i\pi/2} \omega/D$

$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-i\pi/4} \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = k' + ik''$

Pour tenir compte d'une absorption  $k'' < 0$

$\Rightarrow k = k' + ik''$  où  $\begin{cases} k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{propagation} \\ k'' = -i \sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{atténuation} \end{cases}$

Donc  $T(z,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t - k'z) e^{-k'z}$  où  $k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

9°) Soit  $z_e$  t.q :  $T_0 e^{-k'z_e} = \frac{T_0}{100}$

$$\Leftrightarrow -k'z_e = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_e = \frac{\ln 100}{k'} = \ln 100 \sqrt{\frac{2k}{G\rho_s \omega}} \approx \underline{5,3 \text{ m}}$$

D'où  $z_e \ll$  altitude du trijys  $\Rightarrow$  les variations annuelles de température n'affectent pas la température des roches environnantes.

10°) Pour  $\omega = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  on a  $z_e$  encore plus petit,  $z_e = 0,3 \text{ m}$ , les variations journaliers sont encore moins ressenties en profondeur.

• les variations de basse fréquence se propagent plus facilement : c'est un passer bas

11°) En régime stationnaire :  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  d'où  $dU = 0$

$$\Leftrightarrow \delta Q_e + \delta Q_c = 0$$

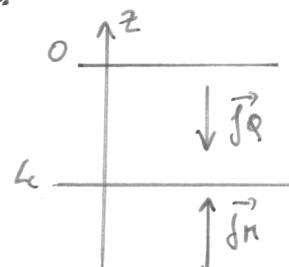
$$\Leftrightarrow \left[ -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz \right] S dt + P dV dt = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + P = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial j_Q}{\partial z} = P_0 e^{-z/H}$$

12°) Donc  $j_Q = -P_0 H e^{-z/H} + \text{cste.}$

Or en  $z = L_c$ ,  $j_Q = -j_m$



$$\text{Donc } -P_0 H e^{-L_c/H} + \text{cste} = -j_m$$

$$\Rightarrow \text{cste} = -j_m + P_0 H e^{-L_c/H}$$

$$\text{Donc } j_q = P_0 H [e^{-L_c/H} - e^{-z/H}] - j_m \quad (1)$$

$$\text{de plus : } j_q = -K \frac{dT}{dz} \Leftrightarrow dT = \left\{ \frac{P_0 H}{K} [e^{-z/H} - e^{-L_c/H}] + \frac{j_m}{K} \right\} dz.$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{P_0 H}{K} \left[ -H e^{-z/H} - z e^{-L_c/H} \right] + \frac{j_m z}{K} + \text{cste.}$$

$$\text{a } T(b) = \theta_0 \Rightarrow \frac{P_0 H}{K} [-H] + \text{cste} = \theta_0 \text{ d'où } \text{cste} = \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{K}$$

$$\text{Donc } T(z) = \theta_0 + \frac{P_0 H}{K} \left[ H(1 - e^{-z/H}) - z e^{-L_c/H} \right] + \frac{j_m z}{K} \quad (2)$$

13) • On a  $j_s = j_q(z=0)$

$$\text{d'où } j_s = P_0 H [e^{-L_c/H} - 1] - j_m$$

14) • Comparons :  $j_m/k$  et  $\frac{P_0 H}{K} e^{-L_c/H}$

$$\text{c'ad : } \begin{cases} j_m = 0,035 \text{ Wm}^{-2} \\ P_0 H e^{-L_c/H} = 1,11 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } T(z) \simeq \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{K} (1 - e^{-z/H}) + \frac{j_m z}{K}$$

$$\Rightarrow \underline{T(z=1,7\text{km}) \simeq 33^\circ\text{C}} \quad (\text{qui est proche des } 30^\circ\text{C} \text{ de l'énoncé})$$

$$\text{Et } \underline{j_s = -60 \text{ mWm}^{-2}}$$

15) l'équation de diffusion en régime stationnaire devient :  $\Delta T = 0$

$$\cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$\cdot \text{En posant } T(x, z) = C_1 + f(x)g(z)$$

$$\Rightarrow f''g + g''f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} = \text{cste.}$$

Or on veut une solution oscillante en  $x$  d'où :  $f'' + k^2 f = 0$

$$\Rightarrow f = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$\text{et } g = C e^{-kz} + D e^{kz} = C e^{-kz} \text{ afin que la solution reste bornée}$$

$$\text{Or } T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = C_1 + (A' \cos kx + B' \sin kx)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = T_s \\ B' = 0 \\ A' = T_1 \end{cases} \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda} \quad \text{avec } \frac{2\pi}{\lambda} = k.$$

- On remarque que le relief a une part importante dans les variations de la température en fonction de  $x$  et aussi de  $z$ .
- Vu que  $\lambda = 10 \text{ km}$  cet effet est plus important que les précédents m<sup>2</sup> pour une profondeur de l'ordre du km.

16) d'équation de chaleur étant linéaire on peut sommer les deux termes d'où :

$$T(x,z) = T_s + \frac{jH z}{K} + \frac{P_0 H^2}{K} (1 - e^{-z/H}) + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda} \quad (3)$$

17) A l'ordre 1 on h on peut écrire :

$$T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Or en surface :  $j_s = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$

$$\text{d'où } T(x, z=0) = T(x, z=h) + \frac{j_s}{k} h.$$

$$= T_s + \frac{j_s}{k} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \theta_0 + \beta z + \frac{j_s h_0}{k} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

or d'après (3)  $T(x, 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \begin{cases} T_s = \theta_0 + \beta z \\ T_1 = \frac{j_s h_0}{k} \end{cases}$

$$\text{Donc : } T(x, z) = \underbrace{\theta_0 + z \left( \frac{j_s}{k} + \beta \right)}_{C_1} + \underbrace{\frac{P_0 H^2}{K} (1 - e^{-z/H})}_{C_2} + \frac{h_0 j_s}{k} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = j_s/k + \beta \\ C_2 = P_0 H^2 / K \quad \text{et } \delta = \frac{\lambda}{2\pi} \\ C_3 = j_s/k \end{cases}$$