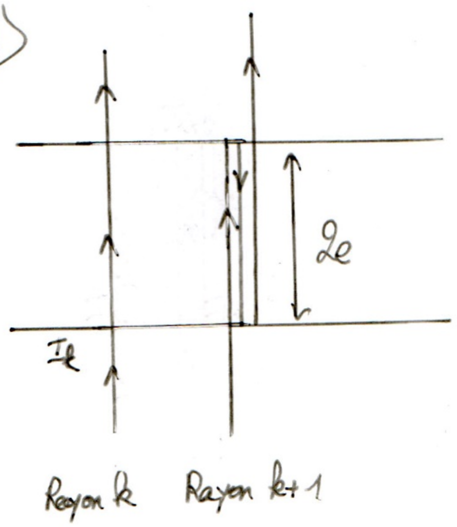
Physique : DM8

Contraste interférentiel (CCP – PC – 2013)

A.1.1)



On remarque sur le schéma que :

$\delta = 2me$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \phi_{k+1} - \phi_k = \frac{4\pi me}{\lambda}}$$

1.1.2) On remarque que le rayon (k+1) fait 2 réflexions supplémentaires que le rayon k d'où $\boxed{\dfrac{A_{k+1}}{A_k} = r^2}$

1.1.3) Si on note A_0 l'amplitude du rayon incident on a :

$$\begin{cases} A_1 = t^2 A_0 \\ A_2 = r^2 A_1 \\ \vdots \\ A_k = r^{2(k-1)} A_1 \end{cases}$$

et d'un point de vue de la phase

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{1\to 0} = 2\psi + \dfrac{2\pi}{\lambda} me \\ \Delta\varphi_{2\to 1} = \varphi . \\ \vdots \\ \Delta\varphi_{k\to 1} = (k-1)\varphi \end{cases}$$

Donc $\underline{A}_k = r^{2(k-1)} t^2 A_0 \, e^{-i\left[(k-1)\varphi + 2\psi + \overbrace{\frac{2\pi}{\lambda} me}^{\varphi/2}\right]}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{A}_k = t^2 A_0 \, e^{-i(2\psi + \varphi/2)} \times \left(r^2 e^{-i\varphi}\right)^{k-1}}$$

A.1.4)

D'où $\underline{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k = t^2 A_0 e^{-2i(\psi+\varphi/4)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(r^2 e^{-i\varphi}\right)^{k-1}$

$$= t^2 A_0 e^{-2i(\psi+\varphi/4)} \frac{1-\left(r^2 e^{-i\varphi}\right)^{\infty}}{1-r^2e^{-i\varphi}}$$

or $|re^{-i\varphi}| < 1$ d'où :

$$\boxed{\underline{A} = \frac{t^2 A_0 e^{-2i(\psi+\varphi/4)}}{1-r^2e^{-i\varphi}}}$$

A.1.5) Or : $I = \frac{K}{2}\underline{A}\underline{A}^* = \frac{t^4 A_0^2 \cdot K/2}{(1-r^2e^{-i\varphi})(1-r^2e^{+i\varphi})}$

$$= \frac{K}{2}\frac{t^4 A_0}{1+r^4-(r^2e^{-i\varphi}+r^2e^{i\varphi})}$$

$$= \frac{K}{2}\frac{t^4 A_0}{1+r^4-2r^2\cos\varphi}$$

or $\sin^2\varphi/2 = \frac{1-\cos\varphi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 1-2\sin^2\varphi/2$

D'où $I = \frac{Kt^4A_0}{2} \cdot \frac{1}{1+r^4-2r^2+4r^2\sin^2\varphi/2}$

$$\Leftrightarrow I = \frac{Kt^4A_0}{2} \frac{}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\varphi/2} = \frac{Kt^4A_0}{2(1-r^2)^2} \frac{1}{1+\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2\varphi/2}$$

$$\boxed{\text{Donc } I = \frac{I_0}{1+m\sin^2(\varphi/2)} \quad \text{où} \begin{cases} I_0 = \dfrac{Kt^4A_0}{2(1-r^2)^2} \\ \text{et} \\ m = \dfrac{4r^2}{(1-r^2)^2} \end{cases}}$$

A.1.6) A.N $m = 90$

① $I(\varphi)$ est maximal si le dénominateur est minimal càd ssi $\sin^2(\varphi/2) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + q\pi$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \pi + 2q\pi \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Alors $\boxed{I_{max} = I_0}$

② De m̂ si $\sin^2(\varphi/2) = 1$ alors $\varphi = 2q\pi \Rightarrow I_{min} = \dfrac{I_0}{1+m}$

③ Soit $I(\varphi) = \dfrac{I_0}{2} \Leftrightarrow 1 + m\sin^2(\varphi/2) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\varphi/2) = 1/m$$

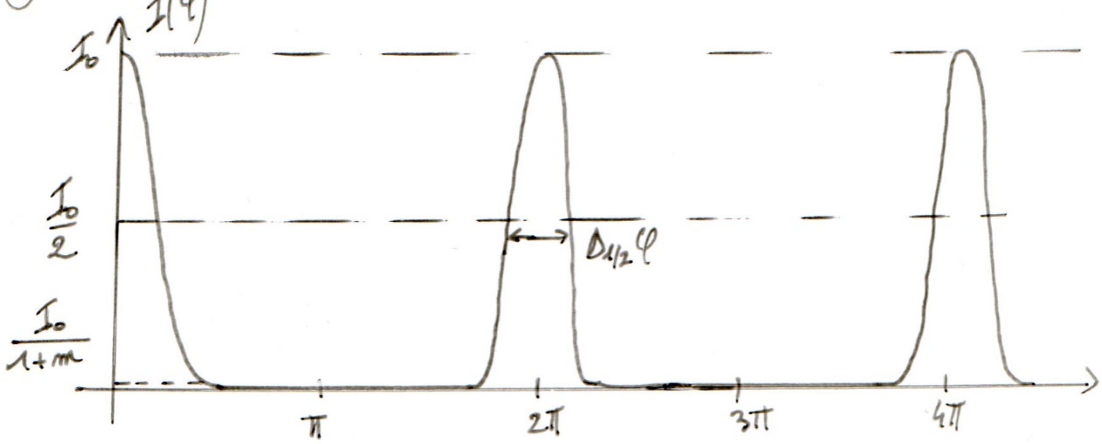
$$\Leftrightarrow (\varphi/2) = \pm \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

D'où $I(\varphi) = \dfrac{I_0}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm 2\,\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$

D'où $\boxed{\Delta_{1/2}(\varphi) = 4\,\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \simeq \frac{4}{\sqrt{m}} \text{ si } m \gg 1}$

$\simeq \underline{0{,}16\pi}$

④



⑤ • Dès que φ s'écarte de $2p\pi$ de plus de $\Delta_{1/2}\varphi$, l'intensité chute énormément. Ainsi on peut considérer que $I = 0$ sauf pour φ voisin de $2p\pi$.

• On observera une intensité variant suivant les valeurs de φ d'élevé à faible sur un écran d'observation.

A.2.1) On rajoute un détail t.q : $\delta = 2n(e-\varepsilon) + 2n'\varepsilon$.

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{4\pi}{\lambda}\left[n(e-\varepsilon) + n'\varepsilon\right]$$

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{4\pi}{\lambda} ne + \frac{4\pi}{\lambda}\varepsilon(n'-n)$$

$$\boxed{\Rightarrow \varphi' = \varphi + \Delta\varphi \text{ où } \Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}.\varepsilon(n'-n)}$$

A.N : $\boxed{\Delta\varphi = 0{,}07 \text{ rad}}$ avec $\dfrac{\Delta\varphi}{\varphi} = \dfrac{\varepsilon}{e}\left(\dfrac{n'-n}{n}\right) = \dfrac{\varepsilon}{e}\left(\dfrac{n'}{n} - 1\right) = \dfrac{\varepsilon}{e} \times 0{,}005$.

Comme $\varepsilon < e \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi \ll \varphi}$

A.2.2) Seul φ' change d'où $\boxed{I'(\varphi') = I_0 . \dfrac{1}{1 + m\sin^2(\varphi'/2)}}$

A.2.3) Soit $\mathcal{C} = \dfrac{I - I'}{I} = 1 - \dfrac{I'}{I} = 1 - \dfrac{1 + m\sin^2(\varphi/2)}{1 + m\sin^2(\varphi'/2)}$

or $\sin^2\left(\dfrac{\varphi'}{2}\right) = \sin^2\left(\dfrac{\varphi + \Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) + \dfrac{\Delta\varphi}{2}.2\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) + o\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \frac{m.\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2).\Delta\varphi}{1 + m\sin^2(\varphi/2)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{C} = K\Delta\varphi \text{ où } K = \frac{\frac{m}{2}\sin\varphi}{1 + m\sin^2(\varphi/2)}}$$

A.2.4)

On a $K = \dfrac{45}{1+90\sin^2(\pi/4)} = \dfrac{45}{46} \sim 1.$

$\Longrightarrow \mathcal{C} = 0{,}07 < 0{,}1$: le détail est difficilement visible

A.2.5) Soit $K = \dfrac{m/2 \sin\varphi}{1+m\sin^2(\varphi/2)}$

d'où $\dfrac{dK}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}.\cos\varphi\left(1+m\sin^2(\varphi/2)\right) - \dfrac{m}{2}\sin\varphi\left(m\sin\dfrac{\varphi}{2}.\cos\dfrac{\varphi}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\varphi\left(1+m\sin^2\varphi/2\right) = \sin\varphi\left(m\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)\right)$

$\Leftrightarrow \cos\varphi\left(1+m\dfrac{(1-\cos\varphi)}{2}\right) = \sin\varphi .\ m \times \dfrac{\sin\varphi}{2}.$

$\Leftrightarrow \cos\varphi\left(1+\dfrac{m}{2}\right) - \dfrac{m}{2}\cos^2\varphi = \dfrac{m}{2}\sin^2\varphi.$

$\Leftrightarrow \cos\varphi\left(1+\dfrac{m}{2}\right) - \dfrac{m}{2}\cos^2\varphi = \dfrac{m}{2}\left(1-\cos^2\varphi\right)$

$\Leftrightarrow \cos\varphi\left(1+\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{m}{2}.$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos\varphi = \dfrac{m/2}{1+m/2}} \Longrightarrow \underline{\underline{\varphi \sim 12^\circ}}$

Dans ce cas : $\underline{\underline{K = 4{,}7}}$

Or $\mathcal{C} = 0{,}1$ pour que les détails soient visibles d'où : $\Delta\varphi_{min} = \dfrac{\mathcal{C}}{K} = 0{,}021\,\text{rad}.$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda}(n-n')e = \Delta\varphi_{min} \Rightarrow e_{min} = \dfrac{\Delta\varphi_{min}.\lambda}{2\pi(n-n')}$

$\Rightarrow \underline{e_{min} = 0{,}37\,\mu m.}$

On verra des détails de $0{,}37\,\mu m$ au minimum

- On peut traiter l'objet à étudier en augmentant son pouvoir réfléchissant. La transmission par l'objet serait modifiée et on le verrait mieux. On peut aussi faire une inversion de contraste par strioscopie.