

Physique : DM n°2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

I - Statique des fluides

Ce sujet présente la notion de foudre et orage, on s'intéresse à la première partie qui étudie la stabilité des nuages dans l'atmosphère.

- Préambule

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, de rayon $R = 6\,370\text{ km}$, forment un gigantesque condensateur terrestre (figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ $100\text{ à }120\text{ V.m}^{-1}$.

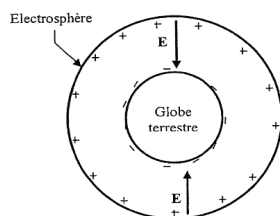


Figure 1 - Terre et électrosphère

Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère et le globe terrestre, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ 80 km .

L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\vec{j}$ tendant à décharger le condensateur.

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus (figure 2) de couleur sombre. Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont respectivement à environ 2 km et 15 km d'altitude. Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

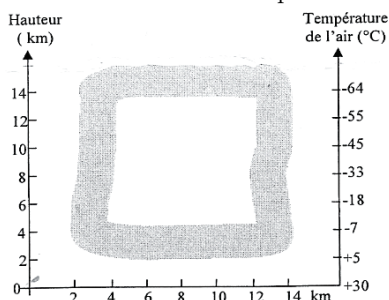


Figure 2 - Cumulo-nimbus

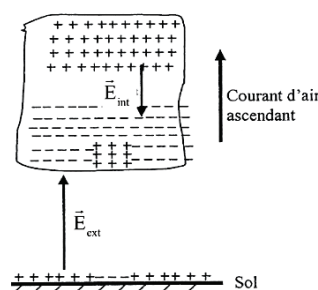


Figure 3 - Dipôles électriques

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui produit la création de charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Tandis que les gouttes d'eau chargées négativement s'établissent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage.

Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (figure 3) :

- Un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne $\vec{E}_{int}$ devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe $\vec{E}_{ext}$ atteint des conditions critiques de l'ordre de 20 kV.m^{-1} , il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

A - Formation et stabilité du nuage

On s'intéresse à l'équilibre de l'air dans l'atmosphère terrestre.

Les valeurs de référence pour la température et la pression seront celles relevées à la surface de la Terre, à savoir $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$. L'air sera assimilé à un gaz parfait.

On repère ici l'espace par le trièdre (O, x, y, z). L'axe des z vertical est dirigé vers le haut et son origine O coïncide avec la surface de la Terre.

A.1 - Équilibre isotherme de l'atmosphère

On suppose ici que la température de l'atmosphère est uniforme et vaut T_0 pour tout z.

On note $\rho_{air}(z)$ la masse volumique de l'air à l'altitude z.

- 1) On note M_{air} la masse molaire de l'air. Quels sont les deux principaux constituants physico-chimiques de l'air ? En quelles proportions molaires y sont-ils présents ? En ne considérant que ces deux principaux constituants de l'air, déterminer la valeur numérique de M_{air} .
- 2) En écrivant une condition d'équilibre mécanique sur un élément infinitésimal d'atmosphère situé entre les altitudes z et $z + dz$, montrer que : $\frac{dP}{dz} = -\rho_{air}g$
- 3) Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ de l'air en fonction de l'altitude z.
- 4) En déduire un ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique de l'atmosphère.

A.2 - Equilibre de l'atmosphère caractérisée par un gradient de température et formation de la base du nuage

La température dans les basses couches de l'atmosphère n'est pas uniforme mais décroît avec l'altitude. Dans cette partie, on admettra que cette température suit une décroissance affine de la forme :

$T(z) = T_0 - \lambda z$ avec $T_0 = 300 \text{ K}$ et $\lambda = 0,007 \text{ K.m}^{-1}$.

- a) A partir de la condition d'équilibre mécanique d'un élément infinitésimal d'atmosphère, déterminer l'expression littérale de $P(z)$.

b) Les applications numériques donnent :

Altitude (km)	0,5	2	5	8	11	14
Pression (Pa)	94 500	79 300	54 800	36 700	23 700	14 600

Jusqu'à quelle altitude et avec quelle précision, le modèle de l'atmosphère isotherme est-il pertinent ?

A.3 - Profil de température au sein d'une colonne d'air humide à toutes les altitudes, formation du nuage

D'un point de vue thermodynamique, l'ascension verticale d'une colonne d'air humide, depuis la surface de la Terre à la pression P_0 , jusqu'à l'altitude z à la pression $P(z)$, sera assimilée à une détente adiabatique et mécaniquement réversible. Par ailleurs, l'air humide contenant une faible quantité de vapeur d'eau sera encore assimilable à un gaz parfait de masse molaire M_{air} .

- 6) Écrire le système d'équations permettant de déterminer le profil de température $T(z)$ au sein d'une colonne d'air humide, en équilibre mécanique, pour toutes les altitudes.

La résolution des équations précédentes aboutit à l'expression : $T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)$ avec : $z_2 = \frac{\gamma R T_0}{(\gamma - 1) M_{air} g}$

- a) Par extrapolation, évaluer la pression de vapeur saturante de l'eau à l'altitude $z = 500 \text{ m}$.
- b) En supposant que la fraction molaire de l'eau dans la colonne d'air humide est de 4 %, montrer que l'eau devrait se liquéfier en dessous de 500 m.

c) En général, les observations rendent compte d'une liquéfaction survenant à des altitudes légèrement supérieures. Expliquer. Ce phénomène de métastabilité existe aussi pour des corps très purs lors du changement d'état liquide-solide. Dans ce dernier cas, quel nom lui est associé ?

A.4 - Stabilité du nuage : pourquoi les gouttelettes d'eau de la partie inférieure du nuage ne tombent-elles pas ?

On supposera dans cette étude sur la stabilité du nuage que l'air est immobile dans le référentiel terrestre et a une masse volumique constante $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$.

On repère ici l'espace par le trièdre (O' , x , y , z'). L'axe des z' vertical est dirigé vers le bas et son origine O' coïncide avec la base d'un cumulo-nimbus (figure 4).

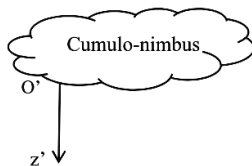


Figure 4 - Orientation de l'espace

On considère la chute d'une fine gouttelette d'eau liquide de rayon $r = 0,01 \text{ mm}$, située initialement à 2 000 m au-dessus de la surface de la Terre et dépourvue de vitesse initiale. On suppose que les frottements exercés par l'air sur la gouttelette sont modélisables par la force : $\vec{f} = -6\pi\eta_{\text{air}}r\vec{v}$, où η_{air} correspond à la viscosité de l'air et $\vec{v}$ à la vitesse de la gouttelette.

- 8)
 - a) Faire un bilan des forces exercées sur la gouttelette d'eau.
 - b) Pourquoi est-il légitime de ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède ?
 - c) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de la gouttelette d'eau.
- 9) Montrer que la gouttelette d'eau tend à atteindre une vitesse limite, notée $\vec{v}_{\text{lim}}$, dont on précisera l'expression ainsi que sa valeur numérique.
- 10) Évaluer un ordre de grandeur de la durée nécessaire pour que la gouttelette d'eau atteigne sa vitesse limite.
- 11) A l'aide d'une approximation que l'on justifiera, déterminer la durée de chute d'une gouttelette d'eau depuis la base d'un cumulo-nimbus, initialement située à 2 000 m au-dessus de la surface de la Terre, jusqu'au sol.
- 12) Par ailleurs, quel phénomène thermodynamique peut justifier la stabilité mécanique du nuage, même en l'absence de courants ascensionnels suffisants ?

Données :

- Pression de vapeur saturante de Peau en fonction de la température

Température (°C)	Pression de vapeur saturante (Pa)	Température (°C)	Pression de vapeur saturante (Pa)
-10	260	15	1700
0	610	20	2340
5	872	25	3170
10	1230	30	4240

- Viscosité de l'air : $\eta_{\text{air}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$.
- Pression atmosphérique : $P^\circ = 1 \text{ bar}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse volumique du béton : $\rho_m = 2600 \text{ kg.m}^{-3}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
- Masse volumique de l'air : $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$

II – Etude de l'éolienne

G) Préliminaire :

Bilan d'énergie pour un système ouvert en écoulement permanent :

Expression générale du premier principe de la thermodynamique pour un système fermé :

27) Rappeler l'équation générale traduisant la conservation de l'énergie pour un système fermé en mouvement.

Bilan enthalpique lors de l'écoulement unidimensionnel d'un fluide en régime permanent :

On considère un fluide parfait, en écoulement permanent, de débit massique D_m qui traverse une partie active (figure 3) qui lui fournit une puissance utile P_u et une puissance thermique P_{th} .

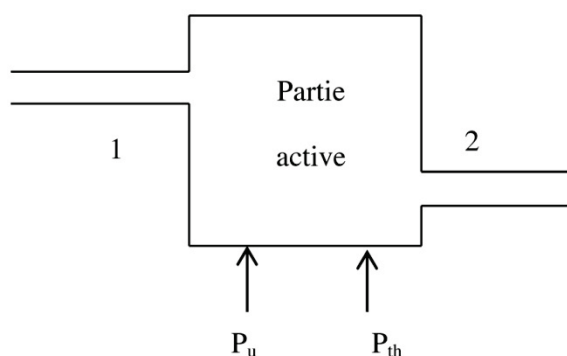


Figure 3 : partie active

On note respectivement P_1 , e_{c1} , e_{p1} , u_1 , h_1 et v_1 : la pression, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle massique, l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et le volume massique du fluide en amont de la partie active.

Ces mêmes grandeurs sont notées P_2 , e_{c2} , e_{p2} , u_2 , h_2 et v_2 en aval de la partie active.

On considère comme système fermé à la date t l'ensemble constitué du fluide contenu dans la partie active à la date t et du fluide, de masse dm_1 , qui va entrer pendant l'intervalle de temps dt dans cette partie active.

28) a) Définir le système à la date $t + dt$.

b) En notant dm_2 la masse qui est sortie de la partie active entre t et $t + dt$, comparer dm_1 et dm_2 . Que conclure quant au débit massique D_m ?

29) Donner les expressions des travaux des forces de pression δW_1 et δW_2 respectivement en amont et en aval du système pendant l'intervalle de temps dt .

30) En s'appuyant sur l'équation de conservation de l'énergie, montrer qu'on peut établir une nouvelle équation (E_1) de la forme :

$$D_m [(x_2 - x_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + (e_{p2} - e_{p1})] = P_u + P_{th} . \quad (E_1)$$

Préciser à quoi correspond la fonction x ainsi que son unité.

Dans toute la suite du problème, on négligera les variations d'énergie potentielle de sorte que le bilan précédent s'écrira sous la forme suivante :

$$D_m [(x_2 - x_1) + (e_{c2} - e_{c1})] = P_u + P_{th} .$$

Bilan de quantité de mouvement pour un système unidimensionnel en écoulement permanent :

De même, l'établissement d'un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle (figure 4) délimité par deux sections droites S_1 et S_2 , d'un tube de courant où le fluide entre avec une vitesse $\vec{V}_1$ supposée uniforme sur la section S_1 et en ressort avec une vitesse $\vec{V}_2$ également uniforme sur la section S_2 , permet d'établir une équation (E_2) du type :

$$Y_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{R} \quad (E_2)$$

où $\vec{R}$ est la résultante des forces exercées sur le fluide considéré par les éléments en contact avec celui-ci.

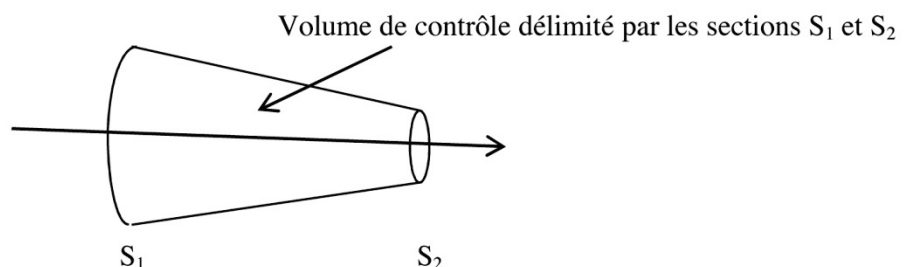


Figure 4 : volume de contrôle

31) Par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de Y_m et préciser à quoi correspond ce terme.

H) Application à l'éolienne :

Modélisation :

L'éolienne sera assimilée à ses pales qui récupèrent une puissance mécanique $P_{\text{éol}}$ provenant de l'écoulement de l'air avoisinant.

L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé Galiléen où les pales sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $x'x$ de vecteur unitaire $\vec{e}_x$ (figure 5).

Les effets de la pesanteur sont négligeables. L'air est assimilé à un gaz parfait. L'écoulement de l'air autour des pales est supposé stationnaire, parfait, incompressible et à symétrie de révolution autour de l'axe $x'x$. On note ρ la masse volumique de l'air.

La figure 5 représente le tube de courant passant par les extrémités des pales de l'hélice.

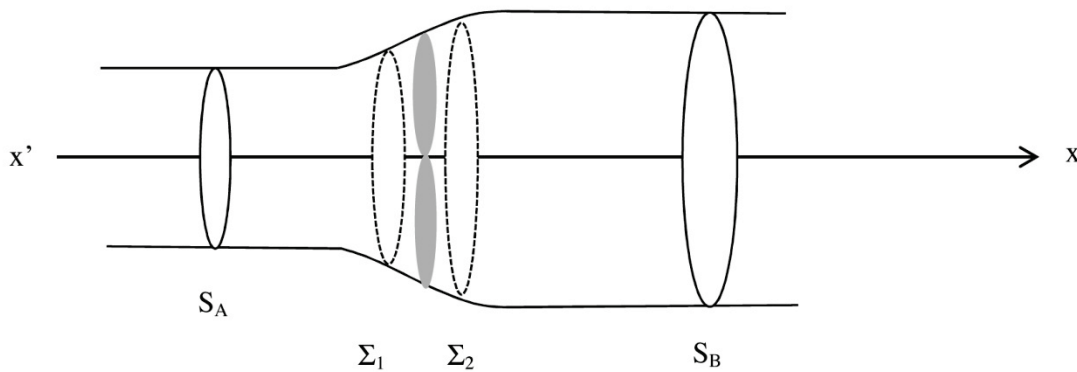


Figure 5 : pales de l'éolienne et tube de courant

La vitesse de l'air est supposée uniforme sur une section perpendiculaire au tube de courant. Elle vaut respectivement : $\vec{V}_A = V_A \vec{e}_x$, sur la section S_A située loin en amont des pales et vaut $\vec{V}_B = V_B \vec{e}_x$ sur la section S_B située loin en aval des pales. A grande distance des pales, en amont ou en aval, la pression de l'air est égale à la pression atmosphérique P^0 et la température égale à T_0 .

Les sections Σ_1 et Σ_2 , situées au voisinage immédiat des pales, l'une en amont et l'autre en aval, ont leurs aires quasiment identiques. De sorte que l'on supposera $\Sigma_1 = \Sigma_2 = S$, au premier ordre. La pression du fluide est supposée uniforme sur chacune de ces sections et vaut P_1 sur Σ_1 et P_2 sur Σ_2 .

Au voisinage des pales, il y a continuité de la composante normale, (suivant $\vec{e}_x$), de la vitesse de l'air. Cette composante sera notée : $\vec{V} = V \vec{e}_x$. On néglige la dissipation d'énergie par frottement de l'air le long des pales.

Puissance récupérable par les pales de l'éolienne :

- 32) Ecrire deux relations liant tout ou partie de ces grandeurs : S_A , V_A , S_B , V_B , S et V .
- 33) Exprimer les pressions P_1 et P_2 en fonction de P° , ρ , V_A , V_B et V .
- 34) On se propose d'appliquer l'équation (E_2) sur le fluide contenu dans le tube de courant compris entre les sections voisines Σ_1 et Σ_2 situées de part et d'autre des pales de l'éolienne.
- a) On note $\vec{R}_{12} = R_{12}\vec{e}_x$: la résultante des forces exercées sur l'air considéré et $\vec{F}_{\text{pâles} \rightarrow \text{air}} = F\vec{e}_x$: la force exercée par les pales de l'éolienne sur l'air.
Exprimer R_{12} en fonction de F , P_1 , P_2 et de S .
- b) Par application de l'équation (E_2), en déduire que $\vec{R}_{12} = \vec{0}$.
- c) Exprimer alors F en fonction de P_1 , P_2 et S .
- d) Puis exprimer F en fonction de ρ , S , V_A et V_B .
- 35) On se propose d'appliquer l'équation (E_2) sur le fluide contenu dans le tube de courant compris entre les sections éloignées S_A et S_B situées en amont et en aval des pales de l'éolienne, en admettant que la résultante des forces de pression est nulle.
Exprimer F en fonction de ρ , S , V , V_A et V_B .
- 36) Déduire de ce qui précède une relation simple entre V_A , V_B et V .
- 37) On se propose d'appliquer l'équation (E_1) sur la portion du tube de courant, délimitée par les sections S_A et S_B , considérée comme une partie active.
Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) le fait que $P_{th} = 0$?
Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) le fait que $h_B - h_A = 0$?
- 38) Quelle est la puissance algébrique utile fournie par les pales de l'éolienne au fluide considéré ? En déduire l'expression de la puissance mécanique, $P_{\text{éol}}$, fournie par le vent à l'éolienne en fonction de ρ , S , V_A et V_B .
- 39) En posant $x = \frac{V_B}{V_A}$, exprimer $P_{\text{éol}}$ en fonction de ρ , S , V_A et x . Pour quelle valeur de x , $P_{\text{éol}}$ est-elle maximale ? Exprimer cette valeur maximale en fonction de ρ , S et V_A .
- 40) Application numérique :
- a) Evaluer la puissance maximale récupérable par une éolienne dont les pales ont un diamètre $D = 60$ m pour une vitesse du vent de 40 km.h^{-1} .
- b) Combien faudrait-il d'éolienne de ce format, dans les mêmes conditions météorologiques pour produire la même puissance qu'une tranche de centrale nucléaire de $1\,500 \text{ MW}$?