

Physique : DM n°2

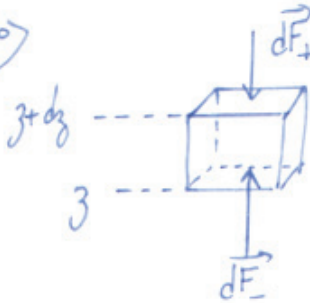
I - Statique des fluides (CCP PSI – 2015)

① Formation et stabilité du nuage (CCP PSI – 2015)①.1 Equilibre isotherme de l'atmosphère1°) Proportions : N_2 : 80% et O_2 : 20%

1

$$\Rightarrow M_{\text{air}} = 0,8 M_{N_2} + 0,2 M_{O_2} = \underline{\underline{28,8 \text{ g.mol}^{-1}}}$$

2°)

A l'équilibre mécanique : $\sum d\vec{F} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow d\vec{F}(z+dz) + d\vec{F}(z) + d\vec{P} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow [-p(z+dz) + p(z)] dS \vec{u}_z + dm \vec{g} = \vec{0}$$

2

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{dp}{dz} - \rho g \right] dS \vec{u}_z = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho_{\text{air}} g}$$

3°) On a $pV = nRT \Leftrightarrow p M_{\text{air}} = \rho_{\text{air}} RT$

1

$$\text{d'où } \frac{dp}{dz} = - \frac{p M_{\text{air}}}{RT} g.$$

$$= - p/H \text{ avec } H = \frac{RT_0}{M_{\text{air}} g}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p = p_0 e^{-z/H}}}$$

1

4°) l'atmosphère a une épaisseur de quelques H : $\underline{\underline{H = 8800 \text{ m}}}$

A.2 Gradient de température

5°) a) Cette fois on a : $\frac{dp}{dz} = - \frac{gM_{\text{air}}}{R(T_0 - \lambda z)}$

$$\Leftrightarrow \ln p = + \frac{M_{\text{air}} g}{R \lambda} \int \frac{d(-dz)}{T_0 - \lambda z}$$

$$\Leftrightarrow \ln p = \frac{gM_{\text{air}}}{R \lambda} \ln(T_0 - \lambda z) + \text{cste.}$$

à $p = p_0$ pour $z = 0 \Rightarrow \ln p_0 = \frac{gM_{\text{air}}}{R \lambda} \ln T_0 + \text{cste}$

$$\text{D'où } \ln \frac{p}{p_0} = \frac{gM_{\text{air}}}{R \lambda} \ln \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0} \right)$$

$$\Rightarrow p = p_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0} \right)^{\frac{gM_{\text{air}}}{R \lambda}}$$

b)

$z(\text{km})$	0,5	2	5	8	11	14
$P(\text{Pa})$	94 500	79 300	54 800	36 700	23 700	14 600
$P_{\text{isotherm}}(\text{Pa})$	94 476	79 670	56 655	40 200	28 650	20 374
$\Delta p/p (\%)$	0,03%	0,46%	3,4%	9,8%	21%	39,5%

le modèle reste pertinent jusqu'à 5 km environ

A.3 Colonne d'air humide

6°) la particule d'air vérifie : $T p^{1-\gamma} = \text{cste} \Rightarrow \gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma) \frac{dp}{p} = 0$

On a aussi : $\frac{dp}{p} = - \frac{gM_{\text{air}} dz}{RT}$ d'où : $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = - \frac{gM_{\text{air}} dz}{RT}$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} dT = - \frac{gM_{\text{air}} dz}{R}$$

$$\Leftrightarrow dT = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{g M_{\text{air}}}{R} dz$$

$$\Leftrightarrow T = T_0 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{g M_{\text{air}}}{R} z$$

$$\Leftrightarrow T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g M_{\text{air}}}{R T_0} z \right)$$

$$\Leftrightarrow T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{z}{H} \right) \Rightarrow z_2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} H : \text{CQFD}$$

da démo m'était pas demandée.

7°) a) On obtient : $T(500\text{m}) = 295\text{K}$ ou 22°C

Par extrapolation on en déduit $p_{\text{sat}} \approx 2670\text{Pa}$

b) D'après le tableau du Sb à 500m on a $p = 94500\text{Pa}$

$$\text{or } x_{\text{eau}} = 4\% \Rightarrow p_{\text{eau}} = x_{\text{eau}} p = 3780\text{Pa} > p_{\text{sat}}$$

$\Rightarrow$ l'eau est en phase liquide, elle se liquéfie
donc pour $z < 500\text{m}$

c) Si la condensation n'a pas eu lieu pour $p_{\text{eau}} > p_{\text{sat}}$, c'est que l'équilibre thermodynamique n'est pas assuré. Le système est hors équilibre pour des raisons cinétiques : le système est métastable comme pour la surfusion par exemple.

A.4) Stabilité du nuage

$$8^\circ) \text{ a) Bilan des forces } \begin{cases} \vec{F} = -6\pi\eta_{\text{air}} r \vec{v} \\ \vec{P} = \rho_{\text{eau}} V \vec{g} \text{ où } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \vec{\Pi} = -\rho_{\text{air}} V \vec{g} : \text{poussée d'Archimède.} \end{cases}$$

b) On peut négliger Π car $\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{air}}} \approx 1000$.

$$c) \text{ D'où } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi\eta_{\text{air}} r \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta_{\text{air}} r \vec{v}}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{eau}}} = +\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta_{\text{air}}}{\rho_{\text{eau}} r^2} \vec{v} = +\vec{g}$$

$$9^\circ) \text{ A l'équilibre: } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{2}{9} \frac{\rho_{\text{eau}} r^2}{\eta_{\text{air}}} = \underline{\underline{1,21 \text{ cm/s}}}$$

$$10^\circ) \text{ Sat: } \tau = \frac{2\rho_{\text{eau}} r^2}{9\eta_{\text{air}}} \Rightarrow v_{\text{lim}} \text{ est atteint pour: } \underline{\underline{5\tau = 10 \text{ ms}}} \quad (0,99 v_{\text{lim}})$$

$$11^\circ) \text{ Si on suppose que } v_{\text{lim}} \text{ est atteinte quasi instantanément, vu la faible valeur de } \tau \text{ alors la durée de chute est: } \Delta t = \frac{\Delta z}{v_{\text{lim}}} = 1,65 \cdot 10^5 \text{ s} \sim \underline{\underline{46 \text{ h}}}$$

$$12^\circ) \text{ En l'absence de courants ascendants, les gouttes vont rencontrer un air de plus en plus chaud et donc se vaporiser } \Rightarrow z = 0 \\ \Rightarrow v_{\text{lim}} \rightarrow 0$$

. Ce phénomène entraîne une stabilité mécanique du nuage.

II – Etude de l'éolienne (CCP PSI – 2013)

27) Pour un système fermé on a :

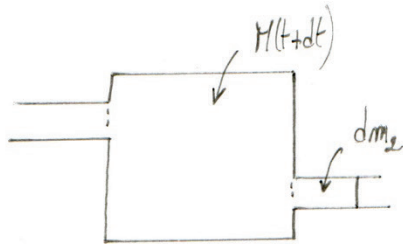
$$\Delta(U + E_c + E_{\text{pert}}) = W_p + W' + Q$$

où U : énergie interne, E_c : énergie cinétique macroscopique

E_{pert} : Énergie potentielle des faces extérieures

W_p : travail des forces de pression, W' : travail utile et Q : chaleur échangée.

28) a)



Le système est constitué du fluide :
 - contenu dans la partie active : $M(t+dt)$
 - qui est sorti entre t et $t+dt$: dm_2

b) On est en régime stationnaire donc :

$$M(t) = M(t+dt) \Rightarrow dm_1 = dm_2 \Rightarrow \underline{dm = cst}$$

29) En amont on perd le volume dV_1 d'où $dW_1 = p_1 dV_1 = p_1 V_1 dm_1 = p_1 V_1 Dm dt$

En aval on gagne le volume dV_2 d'où $dW_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 V_2 dm_2 = -p_2 V_2 Dm dt$

30) Soit $d(U + E_c + E_{\text{pert}}) = \delta W_p + \delta W' + \delta Q$ ↑
volume massique.

$$= p_1 V_1 Dm dt - p_2 V_2 Dm dt + \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire : $d(U + E_c + E_{\text{pert}}) = dm_2 (u_2 + e_{c2} + e_{p2}) - dm_1 (u_1 + e_{c1} + e_{p1})$

$$\text{d'où : } Dm dt [(u_2 + p_2 V_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (u_1 + p_1 V_1 + e_{c1} + e_{p1})] = \delta W' + \delta Q$$

$$\Rightarrow \underline{Dm [(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1})] = P_u + P_{th}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = h \Rightarrow \text{en J.kg}^{-1} \\ P_u: \text{puissance utile t.q } P_u = \dot{W}' / dt \\ P_{th}: \text{puissance thermique t.q } P_{th} = \dot{Q} / dt \end{array} \right.$$

$$31) \quad \text{On a } Y_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{R} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ou } [R] = \left[m \frac{dv}{dt} \right] = MT^{-1}[v] \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Y_m = Dm = \text{kg.s}^{-1}}$$

$$32) \quad \left. \begin{array}{l} \text{En régime permanent } Dm = \text{cste} \\ \text{Or le fluide est incompressible d'où } Dv = \text{cste} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S_A v_A = S_b v_B = S v} \quad \text{vitesse}$$

32) On va appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant:

Entre S_A et Σ_1 : $p^0 + \mu \frac{v_A^2}{2} = p_1 + \mu \frac{v^2}{2}$

Entre Σ_2 et S_B : $p^0 + \mu \frac{v_B^2}{2} = p_2 + \mu \frac{v^2}{2}$

car on néglige l'effet de pesanteur (on pose $z = \text{cste}$).

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = p^0 + \mu/2 (v_A^2 - v^2) \\ p_2 = p^0 + \mu/2 (v_B^2 - v^2) \end{cases}$$

34) a) On a: $\vec{R}_{12} = + \vec{F} - (\vec{F}_{p_1 \Sigma_1} + \vec{F}_{p_2 \Sigma_2})_{\text{air} \rightarrow \text{pale}}$

En projection sur Ox : $R_{12} = F - (-p_1 S + p_2 S)$

$$\Rightarrow \underline{R_{12} = F + p_1 S - p_2 S}$$

b) Entre Σ_1 et Σ_2 : $v_1 = v_2 = v \Rightarrow \underline{R_{12} = 0}$

c) donc $\underline{F = (p_2 - p_1) S}$

d) de la question (32): $p_2 - p_1 = \mu/2 (v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow F = \frac{\mu}{2} (v_B^2 - v_A^2) S$

$$\text{Or } \rho = \mu \Rightarrow F = \frac{\rho}{2} (v_B^2 - v_A^2) S$$

(35) D'après (E2) : $D_m (v_B - v_A) = F + F_p$ or $F_p = 0$ d'après l'énoncé

$$\text{d'où } F = D_m (v_B - v_A)$$

$$\Rightarrow F = \rho S v (v_B - v_A)$$

(36) En égalisant les expressions de F : $v (v_B - v_A) = \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2)$

$$\Rightarrow v = \frac{v_B + v_A}{2}$$

(37) • Il n'y a aucun transfert thermique du fluide vers l'extérieur donc $P_{th} = 0$ car l'écoulement est parfait.

• On a affaire à un gaz parfait dont les forces d'interaction sont nulles. Ces forces ne travaillant pas il n'y aura pas de fluctuation de température $\Rightarrow \Delta h = c_p \Delta T = 0$

(38) D'après E.1 : $D_m [(h_2 - h_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + \underbrace{(e_{p2} - e_{p1})}_0] = P_u + P_{th}$

$$\Rightarrow D_m (e_{c2} - e_{c1}) = P_u$$

$$\Rightarrow \frac{D_m}{2} (v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol} \text{ ou } P_u = -P_{eol}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu S v}{2} (v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho S (v_B + v_A) (v_B^2 - v_A^2)}{4} = -P_{eol}$$

(39) D'où $P_{eol} = -\frac{\rho S v_A^3}{4} (1+x)(x^2-1) \Leftrightarrow P_{eol} = \frac{\rho S v_A^3}{4} (1-x^2)(1+x)$

$$\text{or } \frac{dP_{eol}}{dx} = (1+x)(-2x) + (1-x^2) = 1-x^2-2x^2-2x = 1-2x-3x^2 = -3(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3})$$

$$\text{f.g. : } x = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } -\frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } P_{max} = \frac{\rho S v_A^3}{4} \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{8}{9}\right) \Rightarrow P_{max} = \frac{8}{27} \rho S v_A^3$$

(40) a) Soit
$$P_{\max} = \frac{8}{27} \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot N_A^3$$
$$= \underline{\underline{1,49 \text{ MW}}}$$

b) Soit $N = \frac{P_{\text{pu}}}{P_{\text{réel}}} \approx \underline{\underline{1000 \text{ éoliennes}}}$