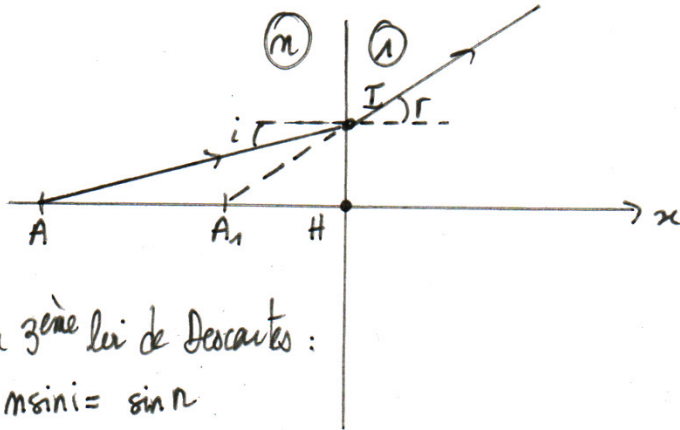


Physique : DM15

Capture d'empreintes digitales (Centrale MP – 2019)

Q1)

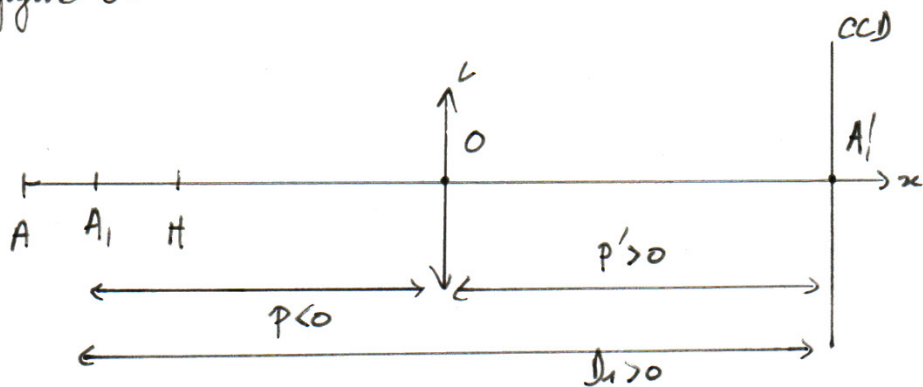


D'après la 3^{ème} loi de Descartes :
 $m \sin i = \sin r$

Dans les conditions de Gauss les rayons sont paraxiaux d'où : $\begin{cases} \sin i \approx i \\ \sin r \approx r \end{cases}$

$$\text{or } \begin{cases} \tan i = \frac{\overline{IH}}{\overline{HA}} \\ \tan r = \frac{\overline{IH}}{\overline{HA_1}} \end{cases} \quad \text{d'où } m \frac{\overline{IH}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{HA_1}} \Rightarrow \underline{\overline{HA_1} = \frac{1}{m} \overline{HA}}$$

Q2) D'après la figure 3 :



$$\text{D'après Descartes : } \begin{cases} \frac{1}{\overline{OA_1'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{D_1} \text{ avec } D_1 = p' - p \quad (1) \\ \text{et} \\ \gamma = \frac{\overline{OA_1'}}{\overline{OA_1}} \Rightarrow \gamma = \frac{p'}{p} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \\ \text{et} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} D_1 = \gamma p - p \\ p' = \gamma p \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{D_1}{\gamma - 1} \\ p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{On remplace dans } \textcircled{3} : \frac{1}{f'} &= \gamma - 1 \left(\frac{1}{\gamma D_1} - \frac{1}{D_1} \right) \\ &= \frac{\gamma - 1}{D_1} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma} \\ \Rightarrow f' &= - \frac{\gamma D_1}{(\gamma - 1)^2} \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

Q3) A partir d'un objet réel, pour obtenir une image réelle on doit avoir $\gamma < 0$.

$$\text{D'après } \textcircled{4} : (\gamma^2 - 2\gamma + 1)f' = -\gamma D_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_1}{f'} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$$

Étudions cette fonction $f(\gamma) = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$ ou $f'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$

γ	$-\infty$	-1	0
$f'(\gamma)$	\ominus	\oplus	\oplus
$f(\gamma)$	↘ 4 ↗		

$$\text{D'où } f(\gamma) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{D_1}{f'} \geq 4 \Leftrightarrow \underline{D_1 \geq 4f'}$$

Q4) Calculons D_1 : $D_1 = D - \overline{AA_1}$ or $\begin{cases} \overline{AH} = 3 \text{ cm} \\ \overline{HA_1} = \frac{\overline{HA}}{n} = \frac{3}{1.5} = -2 \text{ cm} \end{cases}$

$$\text{d'où } D_1 = 10 - (3 - 2) = 9 \text{ cm}$$

• D'après Q: $f' = - \frac{\delta D_1}{(\delta-1)^2} = - \frac{-2 \times 9}{(-2-1)^2} = \underline{\underline{2 \text{ cm}}}$

• Et $p' = \frac{\delta D_1}{\delta-1} = \frac{-2 \times 9}{-2-1} = 6 \text{ cm}$.

\Rightarrow la lentille doit être placée 6 cm avant l'écran

Q5) • On souhaite avoir $|x|$ maximal pour chercher comment modifier f' différentes

$f(\delta): \frac{D_1}{f'} = 2 - \delta - \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow -\frac{1}{f'^2} D_1 \cdot df' = \left(-1 + \frac{1}{\delta^2}\right) d\delta$

$\Rightarrow \frac{d\delta}{df'} = \frac{D_1}{f'^2 \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)}$

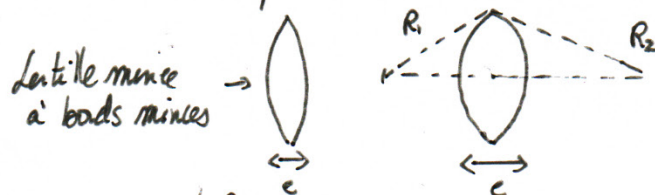
$\Rightarrow \frac{d\delta}{df'} = \frac{D_1 \cdot \delta^2}{f'^2 (\delta^2 - 1)} > 0$

or $f' > 0$ et $\delta < 0$ donc si on veut augmenter $|x|$ on a: $d\delta < 0$
 $\Rightarrow df' < 0$

\Rightarrow Il faut choisir la focale la plus petite possible

• Dans le cas d'une lentille bi-convexe, il faut augmenter les rayons de courbure

\Rightarrow on ne sera plus dans les conditions des lentilles minces



\Rightarrow on ne vérifie plus les conditions de Gauss dans ces conditions

Q6). Afin d'observer deux crêtes successives sur l'écran il faut vérifier :

$$\frac{|\delta/a| l_c}{c} \text{ largeur d'un pixel.}$$

$$\Leftrightarrow l_c < 200 \mu\text{m.}$$

de sillon mesuré en moyenne $30 \mu\text{m}$ d'où sur l'écran une représentation de $60 \mu\text{m}$.

On peut choisir une valeur de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ afin de voir les sillons de l'empreinte et leurs détails.

Q7). D'après Descartes : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ que l'on différentie : $\frac{dp'}{p'^2} = \frac{dp}{p^2}$

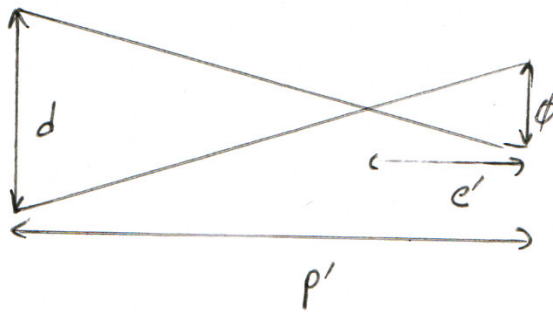
$$\Leftrightarrow \frac{dp'}{dp} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$$

En posant $\begin{cases} dp = e \\ dp' = e' \end{cases}$, les variations d'épaisseur dans les plans conjugués

$$\Rightarrow \frac{e'}{e} = \gamma^2$$

D'après Thalès :

$$\frac{d}{e-p'} = \frac{\phi}{e'}$$



Supposons $e \ll |p|$

$$\Leftrightarrow \gamma e \ll \gamma |p|$$

$$\Leftrightarrow \gamma e \ll p'$$

$$\Leftrightarrow \frac{e'}{\gamma} \ll p'$$

$$\text{or } \gamma = -2 \Rightarrow e' \ll p' \text{ donc } \frac{d}{p'} \approx \frac{\phi}{e'} \Rightarrow \phi \approx \frac{e' d}{p'} \quad (1)$$

$$\text{or } \begin{cases} p' = \delta p \\ \text{et} \\ e' = \delta^2 e \end{cases} \quad \text{d'où } \theta \Rightarrow \phi = \delta d \cdot \frac{e}{p}$$

Q8) On veut que: $\phi \gg \pi/13$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta d e}{p} \gg \delta a$$

$$\Leftrightarrow d \gg \frac{ap}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{p} \gg \frac{a}{e}$$

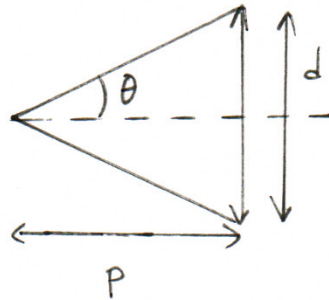
$$\Leftrightarrow \frac{d}{p} \gg 3,3.$$

$$\text{or } \frac{d/2}{p} = \tan \theta$$

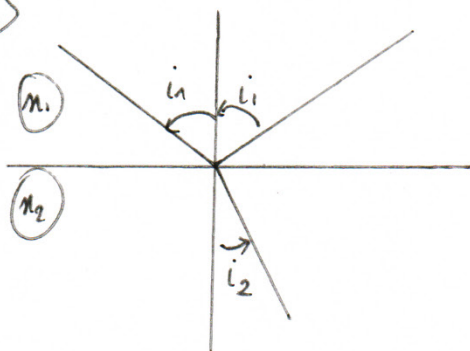
$$\text{d'où } \tan \theta \gg 1,6.$$

$$\Leftrightarrow \theta \gg 58^\circ \Rightarrow \text{cette valeur ne remplit pas les conditions de Gauss,}$$

(rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique)



Q9)



1^{ère} loi: tous les rayons appartiennent au même plan:
le plan d'incidence

2^{ème} loi: $i_1 = i_1'$

3^{ème} loi: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

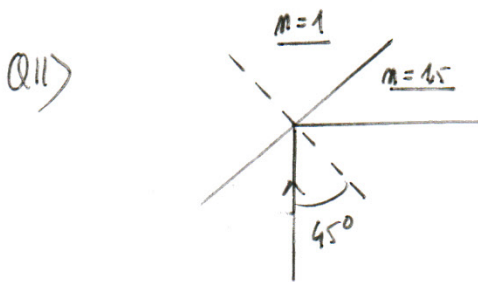
Q10) la réflexion totale est obtenue lorsque $i_2 > \pi/2$.

$$\Leftrightarrow n_1 \sin i_1 > n_2$$

Pour avoir réflexion totale.

$$\Leftrightarrow \sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$$

d'où $i_1 > \underbrace{\text{Arcsin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}_{i_{\text{lim}}}$ avec $n_2 < n_1$



- Avec les indices proposés : $i_{\text{lim}} = 41^\circ$

donc il y a réflexion totale.

- Non, on ne peut pas éclairer le doigt sur l'écran du CCD

Q12) Dans une région vide de charges et de courant :

$$\begin{cases} \text{MG} : \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \text{MF} : \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{MF} : \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{MA} : \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{Or } \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\Delta \vec{E} + \text{grad}(\text{div } \vec{E}) \quad [\text{non donné par l'énoncé}]$$

$$\Leftrightarrow \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} \quad \text{d'où } \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} : \text{D'Alembert}$$

Envisageons une OPPH alors on obtient $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow \omega = kc \Leftrightarrow v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = c$

v_{ph} ne dépend pas de $\omega \Rightarrow$ le vide n'est pas dispersif.

Q13) On remplace ϵ_0 par $n^2 \epsilon_0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \frac{n^2}{c^2}$ d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot n^2$
 et $v_g = \frac{c}{n}$

or $n = n(\omega)$ d'après l'énoncé \Rightarrow le milieu LHI est dispersif

Q14) D'après l'énoncé \vec{E} est continu sur le diéptre d'où en $z=0$:

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t)$$

$$\Leftrightarrow E_0 e^{-j(\omega t - k_{ix}x)} + \underline{r} E_0 e^{-j(\omega t - k_{rx}x)} = \underline{t} E_0 e^{-j(\omega t - k_{tx}x)}$$

car $\vec{k}_r = k_{rx} \vec{e}_x - k_{rz} \vec{e}_z \dots$ et $\vec{r} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z$

d'où $e^{jk_{ix}x} + \underline{r} e^{jk_{rx}x} = \underline{t} e^{jk_{tx}x}$

Q15) Cette relation doit être vérifiée pour tout x d'où: $1 + \underline{r} = \underline{t}$

Q16) D'après l'énoncé $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$

$$\Leftrightarrow \frac{m\omega}{c} \sin(i_1) = -\frac{m\omega}{c} \sin(i'_1) = \frac{\omega}{c} \sin(i_2)$$

D'où $\begin{cases} i_1 = -i'_1 \\ \text{et} \\ n \sin(i_1) = \sin(i_2) \end{cases}$ on retrouve bien les lois de Descartes

Q17) D'après l'énoncé en $z=0$, $\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}_t(0,t)$ ①

$$\text{or } \vec{B}_i = \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i = (k_{ix} \vec{e}_x + k_{iz} \vec{e}_z) \wedge E_0 e^{j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)} \vec{e}_y$$

$$= (k_{ix} \vec{e}_z - k_{iz} \vec{e}_x) E_0 e^{-j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)}$$

de même pour \vec{B}_r et \vec{B}_t d'où ① donne:

$$\begin{cases} \text{sur } (Ox): k_{ix} E_0 e^{jk_{ix}x} + \underline{r} k_{rx} E_0 e^{jk_{rx}x} = \underline{t} E_0 k_{tx} e^{jk_{tx}x} \\ \text{sur } (Oz): -k_{iz} E_0 e^{jk_{iz}x} + \underline{r} k_{rz} E_0 e^{jk_{rz}x} = -\underline{t} E_0 k_{tz} e^{jk_{tz}x} \end{cases}$$

Sur Ox , on retrouve $1+r = t$ (3)

Sur Oz , $k_{iz} - r k_{rz} = + t k_{tz}$

or en norme $k_{iz} = k_{rz} \Rightarrow (1-r) k_{iz} = k_{tz} \cdot t$

or $\frac{k_{tz}}{k_{iz}} = r \Rightarrow 1-r = \frac{r t}{1} \quad (4)$

(3) et (4) donnent :

$$\begin{cases} 2 = (r+1)t \\ 2r = (r-1)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{r+1} \\ r = t - 1 = \frac{1-r}{1+r} \end{cases}$$

Q18) Pour k_c :

$$\begin{cases} k_{ix} = k_i \sin i_1 \\ k_{iz} = k_i \cos i_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{ix} = n k_0 \sin i_1 \\ k_{iz} = n k_0 \cos i_1 \end{cases}$$

Q19) Soit $k_{tz}^2 = k_0^2 - k_{rx}^2$

$$= k_0^2 - k_t^2 (\sin i_2)^2$$

$$= k_0^2 - k_t^2 [n \sin i_1]^2 \text{ car } k_t^2 = k_0^2 \text{ (on est dans le vide)}$$

$$\Rightarrow k_{tz}^2 = k_0^2 [1 - n^2 \sin^2 i_1]$$

On doit distinguer deux cas :

(A). Si $n \sin i_1 \leq 1 \Rightarrow k_{tz} = k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}$

(B). Si $n \sin i_1 > 1 \Rightarrow k_{tz} = j k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1} = j/\delta$

D'où le champ transmis :

$$\begin{cases} (A) : \vec{E} = t E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - k_{tx} x - k_{tz} z)} : \text{OPTH.} \\ (B) : \vec{E} = t E_0 \vec{e}_y e^{-j(\omega t - k_{tx} x)} \cdot e^{-z/\delta} : \text{onde avec absorption} \end{cases}$$

Q20) Dans le cas de la réflexion totale : $n \sin i_1 > 1$ d'où

$$\vec{E}_t = \underline{t} E_0 \vec{e}_y e^{-j(\omega t - k_{tz} x)} e^{-z/\delta} : \text{onde évanescente}$$

$$\text{où } \delta = \frac{1}{k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$$

Calculons le vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ou $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right\}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \langle \vec{\Pi}_t \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\underline{t} E_0 e^{-z/\delta}}{\mu_0} \vec{e}_y \left[k_{tz} \vec{e}_z - k_{tx} \vec{e}_x \right] E_0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\underline{t} E_0^2 e^{-2z/\delta}}{\mu_0} (k_{tx} \vec{e}_x + k_{tz} \vec{e}_z) \right\} \end{aligned}$$

or $\left\{ \begin{array}{l} k_{tx} \text{ est un réel} \\ k_{tz} \text{ est imaginaire pur} \end{array} \right.$ donc $\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{e}_z = 0$

On peut aussi préciser que vu la forme de l'onde, il n'y a pas de propagation suivant l'axe Ox , donc $\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{e}_z = 0$

Q21) Si $x < 0$ alors $V(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = E \phi$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi = 0$$

• Si $E = 0$, $\phi_G = Ax + B$.

• Si $E < 0$, $\phi_G = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x)$

• Si $E > 0$, $\phi_G = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ où $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Effectivement on choisit $E > 0$, car $E = E_c > 0$ ici

$$Q22) \text{ A droite on a } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \phi = 0$$

$$\text{Vu la solution proposée posons } q^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$$

$$\cdot \text{ Si } E > V_0 \text{ alors } q = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\cdot \text{ Si } E < V_0, \quad q = i \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

$$\text{D'où } \phi_0 = \underbrace{C e^{iqx}}_{\phi_{0,1}} + \underbrace{D e^{-iqx}}_{\phi_{0,2}}$$

$$\text{on } \left\{ \begin{array}{l} \psi = \phi_0 e^{-i\omega t} \\ \text{Re}(q) > 0 \text{ si } q \text{ réel} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \phi_{0,2}$ correspond à une solution se propageant dans les $x < 0$, ce qui n'est pas réalisable à droite car il n'y a pas de puits pour créer ce type d'onde

$$\Rightarrow \underline{D=0}$$

Si q imaginaire pur alors $\phi_{0,2}$ de la forme : $D e^{-i\omega t} e^{x/\lambda}$ qui diverge vers $x \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \underline{D=0}$$

$$Q23) \text{ D'ai trois ondes : } \left\{ \begin{array}{l} \psi_G(x,t) = [A e^{ikx} + B e^{-ikx}] e^{-i\omega t} \\ \quad \quad \quad = \psi_{G,i} + \psi_{G,r} \\ \psi_D(x,t) = \psi_t(x,t) = D e^{+iqx} e^{-i\omega t} \end{array} \right.$$

$$\text{D'où } \left\{ \begin{array}{l} B = \underline{\underline{-A}} \\ D = \underline{\underline{+A}} \end{array} \right.$$

Par continuité en $x=0$ de ϕ et ϕ' on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A + \underline{\underline{-A}} = \underline{\underline{+A}} \\ kA - k\underline{\underline{-A}} = +q\underline{\underline{+A}} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+r = \underline{t} \\ k(1-r) = \underline{t}q \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1+r = \underline{t} \\ (1-r) = \underline{t} \underline{v} \quad \text{car } \underline{v} = \frac{q}{k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \underline{t}(1+\underline{v}) \\ r = 1-\underline{t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{t} = \frac{2}{1+\underline{v}} \\ r = \frac{1-\underline{v}}{1+\underline{v}} \end{cases} \quad \text{mu}$$

Q24) Par définition:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = \frac{\hbar k}{m} |\psi|^2 \\ R = \frac{\|\vec{J}_R\|}{\|\vec{J}_i\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = \frac{|\psi_r|^2}{|\psi_i|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = |r|^2 \\ T = \frac{\left| \frac{q}{k} \right| |\psi_t|^2}{|\psi_i|^2} = |r| |\underline{t}|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. R = \left| \frac{1-r}{1+r} \right|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4|r|}{|1+r|^2} \right.$$

or \underline{v} réel car $E > V_0$ d'où $R = \frac{1+r^2-2r}{(1+r)^2}$ et $T = \frac{4r}{1+r^2}$

$$\Rightarrow \underline{R+T=1}$$

le flux incident se divise en flux réfléchi et transmis avec conservation du débit total de particules.

Q25) Si $E \leq V_0$ alors l'onde est évanescente et il n'y a plus de propagation
donc $\vec{J}_t = \vec{0}$ et $T = 0$

Q26) En traitant le tableau de bas en haut et de gauche à droite:

• $V_0 > 0 \Rightarrow q^2 < 0$ et $q \in j\mathbb{R}$

• $\underline{r} = \frac{q}{k} = j \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$

et $\underline{r} = \frac{1 - \underline{r}}{1 + \underline{r}}$

Existence d'une amplitude de probabilité non nulle au delà de la marche de potentiel (sur une petite profondeur δ)

$k_{tz}^2 > k_0^2 \Rightarrow \underline{k}_{tz}^2 < 0$ et $\underline{k}_{tz} \in j\mathbb{R}$

• $\underline{r} = \frac{\underline{k}_{tz}}{k_{iz}} = \frac{j k_0 \sqrt{m^2 \sin^2 i - 1}}{m k_0 \cos i} = j \frac{\sqrt{m^2 \sin^2 i - 1}}{m^2 (1 - \sin^2 i)}$

et $\underline{r} = \frac{1 - \underline{r}}{1 + \underline{r}}$

Existence d'un champ \vec{E} (ou un champ \vec{B}) non nul au delà du dipôle (sur une petite profondeur δ)

Q27) Exploisons l'analogie proposée : $T \approx e^{-2kL}$ où $\left\{ \begin{array}{l} k = k_0 \sqrt{m^2 \sin^2 i - 1} \\ \text{et} \\ i = \pi/4 \end{array} \right.$

$\Rightarrow T = e^{-4\pi/\lambda_0 \cdot \sqrt{m^2/2 - 1} \cdot L}$

• Si $L = 0$ on a $T = 1$ (points en contact avec la vitre : crêtes des empreintes)

• Si $L = \frac{e}{\sin i}$ alors $T \rightarrow 0 \Rightarrow$ les creux des sillons sont sombres.

\Rightarrow on aura une image contrastée de l'empreinte.

Q28) Soit $V(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

or $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \Rightarrow V(r) = \alpha \frac{2(z-2) \hbar c}{r}$

Q29) La décroissance radioactive est telle que : $\lambda = -\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N}$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

or à $t = T$, $N(T) = \frac{N(0)}{2} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Q30) Soit $E_\alpha = E_c + E_p \Leftrightarrow E_\alpha = E_c - V_0 \Leftrightarrow E_c = E_\alpha + V_0$ (1)

or $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$

et

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2R}{T} = 2Rf.$$

d'où $\frac{2E_c}{m} = (2Rf)^2 \Leftrightarrow E_c = \frac{m}{2} (2Rf)^2$ (2)

(1) et (2) donnent : $\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot 2Rf = \sqrt{E_\alpha + V_0}$

$$\Leftrightarrow f = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{m}}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}$$

Q31) D'après l'énoncé $\lambda = Pf$ ou $P = e^{-\gamma}$

$$\Leftrightarrow \frac{h\nu}{T} = f \cdot e^{-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{h\nu}{f} e^{\gamma}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log T &= \log [h\nu] - \log f + \log e^{\gamma} \\ &= \log [h\nu] - \log f + \frac{\gamma}{\ln 10} \end{aligned}$$

$$= \log [\ln 2] - \log \left[\frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2}{mc^2} (E_\alpha + V_0)} \right] + 2(Z-2) \alpha \sqrt{2mc^2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{E_\alpha}} - \frac{4}{\sqrt{V_0}} \right)$$

Pour un élément chimique donné $Z = \text{cste}$ et $R = \text{cste} \Rightarrow V_0 = \alpha \frac{2(Z-2)}{R} hc = \text{cste}$.

$$\Rightarrow \log T = \text{cste} - \log \left[\text{cste} \cdot \sqrt{E_\alpha + V_0} \right] + \frac{\text{cste}}{\sqrt{E_\alpha}} + \text{cste}.$$

Il nous faut donc supposer que la fonction $\log(E_\alpha + V_0)$ varie peu comparé à $\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$

$$\Rightarrow \log T \simeq \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2$$

Q32) Soit w : l'émission thermique massique de l'échantillon. (W.kg^{-1})
 Am: activité massique, $A_m = 3 \cdot 10^{10} \text{ Bq.g}^{-1}$

On définit alors w par $w = A_m \cdot E_c$ où E_c = Energie cinétique des α sortants du noyau.

$$\Leftrightarrow w = A_m (E_\alpha + V_0)$$

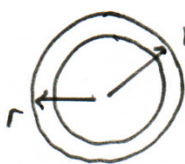
$$\text{or } \left. \begin{array}{l} V_0 = 10 \text{ MeV} \\ E_\alpha = 5 \text{ MeV} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow w = 72 \text{ W.kg}^{-1}$$

Q33) $w_v = \rho w$ est l'émission thermique volumique en W.m^{-3}

$$\text{Q34) Soit } \mu = \frac{P}{V} \Leftrightarrow \mu = \frac{2000}{175 \cdot 10^{-3}} \Leftrightarrow \mu = 11,4 \text{ kW.m}^{-2}$$

Q35)



On applique le premier principe à la couronne cylindrique :

$$dU = \delta Q$$

$$\text{Or en régime stationnaire } dU = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dG = 0$$

$$\text{d'où: } \phi(r+dr) - \phi(r) + Q_c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dr} \cdot dr - 2\pi r \cdot dr \cdot H \cdot \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dr} = 2\pi \mu H r$$

$$\text{Q36) loi de Fourier: } \vec{j}_h = -\lambda \text{ grad } T \Leftrightarrow \vec{j}_h = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$$

$$\text{or } \phi = \int S \Rightarrow \phi(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r H$$

$$\text{Q37) D'après II.1: } \phi = \pi \mu H r^2 + C$$

or $\phi(0) = 0$ car le cylindre n'existe plus si $r=0$

$$\text{d'où } -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H = \pi \mu H r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\mu r}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\mu r^2}{4\lambda} + C'$$

$$\text{or } T(R) = -\frac{\mu R^2}{4\lambda} + C'$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{\mu}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T(R)$$

Q38) Utilisons la loi de Newton à la surface latérale du cylindre.

$$\begin{aligned} \phi(R) &= hS(T_s - T_{\text{ext}}) \\ &= h \cdot 2\pi R H (T(R) - T_{\text{ext}}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \pi \mu H R^2 = h \cdot 2\pi R H (T(R) - T_{\text{ext}})$$

$$\Leftrightarrow T(R) = T_{\text{ext}} + \frac{\mu R}{2h}$$

$$\text{or } T(0) = \frac{\mu R^2}{4\lambda} + T(R), \text{ avec } T(0) = T_{\max}.$$

$$\Rightarrow T_{\max} = \frac{\mu R^2}{4\lambda} + \frac{\mu R}{2h} + T_{\text{ext}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{à } h = 25 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ convection forcée } \textcircled{1} \\ h = 9 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ "naturelle" } \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Or } T_{\text{ext}} = 90^\circ \text{C} \Rightarrow \begin{cases} T_{\max,1} = 233^\circ \text{C} < 516^\circ \text{C} \\ T_{\max,2} = 251^\circ \text{C} < 510^\circ \text{C} \end{cases}$$

Dans les 2 cas on évite toute formation de phase vapeur

Q39) Demi-équation: $\underline{O_2 + 4e^- = 2O^{2-}}$

Q40) Pour l'électrode de référence O_2/O^{2-} on obtient:

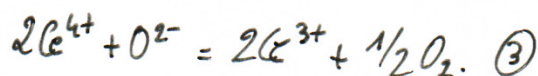
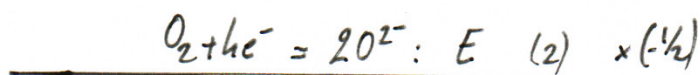
$$E_{\text{ref}} = E^\circ + \frac{RT}{4F} \ln \left(\frac{p_{O_2, \text{ref}} / p^\circ}{a(O^{2-})^2} \right)$$

Pour l'électrode de travail l'oxydant est le dioxygène dissous dans le bain d'où:

$$E = E^\circ + \frac{RT}{4F} \ln \left(\frac{f_{O_2} / p^\circ}{a(O^{2-})^2} \right)$$

$$\underline{\text{D'où } \Delta E = E - E_{\text{ref}} = \frac{RT}{4F} \ln \left(\frac{f_{O_2}}{p_{O_2, \text{ref}}} \right)}$$

Q41) Soit les réactions: $Ce^{4+} + e^- = Ce^{3+} : E^\circ_1 \quad (1) \quad (\times 2)$



$$\text{D'où } \Delta_r G^\circ = 2\Delta_r G^\circ_1 - \frac{1}{2} \Delta_r G^\circ_2$$

$$\Leftrightarrow -RT \ln K_B^\circ = -2FE^\circ_1 + 2FE^\circ$$

$$\Leftrightarrow \ln K_B^0 = \frac{2F(E^{0'} - E^0)}{RT}$$

$$\text{or } K_B^0 = \frac{(f_{O_2}^*/p^0)^{1/2} a^2(Ce^{3+})}{a(O^{2-}) a^2(Ce^{4+})}$$

$$\text{D'où } f_{O_2}^* = K_B^{02} p^0 a(O^{2-}) \cdot \underbrace{\left[\frac{a(Ce^{4+})}{a(Ce^{3+})} \right]^2}_{\text{on qte égales donc égale à 1}}$$

$$\Rightarrow \underline{f_{O_2}^* = p^0 a(O^{2-}) e^{4F/RT (E^{0'} - E^0)}}$$

$$Q42) \text{ On a } \begin{cases} K_B^0 = (f_{O_2}^*/p^0)^{1/2} / a(O^{2-}) & \text{si } a(Ce^{3+}) = a(Ce^{4+}) \\ \text{et } K_B^0 = (f_{O_2}^*/p^0)^{1/2} / a(O^{2-}) \times \left[\frac{a(Ce^{3+})}{a(Ce^{4+})} \right]^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \left[\frac{a(Ce^{3+})}{a(Ce^{4+})} \right]^2 f_{O_2}^{1/2} = f_{O_2}^{*1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{a(Ce^{3+})}{a(Ce^{4+})} = \left(\frac{f_{O_2}^*}{f_{O_2}} \right)^{1/4} \Leftrightarrow \underline{\log \left[\frac{a(Ce^{3+})}{a(Ce^{4+})} \right] = \frac{1}{4} \log \left(\frac{f_{O_2}^*}{f_{O_2}} \right)}$$

Si $f_{O_2} > f_{O_2}^*$ alors Ce^{4+} devient prédominant et le taux d'incorporation des déchets de Cernim décroît.

Q43) On veut favoriser la forme réduite de Ce^{3+} d'où :

- Il faut diminuer $f_{O_2} \Rightarrow$ il faut diminuer la pression de O_2 dans l'atmosphère au dessus du bain
- Si on augmente $a(O^{2-})$ alors la réaction sera favorisée dans le sens direct
 \Rightarrow il faut augmenter l'activité de O^{2-}

© Soit le couple $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$.

↑ Oxydant ↙ Réducteur

Il faut augmenter la matière réductrice afin de réduire Ce^{4+} en Ce^{3+}

Q44) . A l'aide de la fuite réductrice, on remarque que $f_{\text{O}_2} < 1 \text{ atm}$ qui représente la pression critique de formation de bulles que l'on veut éviter.