Physique : DM14

Millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

I) Oscillateur simple

1°) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\dot{x}\,\hat{u}_x - mg\,\hat{u}_x - k(l-l_0)\,\hat{u}_x$

Sur $\hat{u}_x$: $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x-l_0)$ car $l = OG = x(t)$.

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}(x-l_0) = -g.$

Notons $\tilde{x} = x_{eq}$ d'où $\dfrac{k}{m}(\tilde{x}-l_0) = -g \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}(x-\tilde{x}) = 0$

Si $X = x - \tilde{x}$ alors : $\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0}$ (1)

où $\begin{cases} \boxed{\omega_0^2 = k/m} \\ 2\xi\omega_0 = \dfrac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \xi = \dfrac{\alpha}{2m\omega_0} = \dfrac{\alpha}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} \Leftrightarrow \boxed{\xi = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{mk}}} \end{cases}$

- ω_0 est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement
- ξ est le facteur d'amortissement, il croît proportionnellement à α.

2°) 1er cas $\xi = 0$

Dans ce cas (1) s'écrit $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \Rightarrow X = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Or $\begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = X_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

2ème cas : $0 < \xi < 1$

Dans ce cas le polynôme caractéristique s'écrit : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

t.q $\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$

Les solutions sont du type : $X = \left[A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$ où $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

Or $\begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = -\xi\omega_0 A + B\omega_a. \end{cases}$

car $\dot{X} = -\xi\omega_0\left[A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t} + \omega_a\left[-A\sin(\omega_a t) + B\cos(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$

Donc $V_0 = -\xi\omega_0 X_0 + B\omega_a$

$$\Leftrightarrow B = \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_a}$$

Donc $$\boxed{X(t) = \left(X_0\cos(\omega_a t) + \frac{1}{\omega_a}(V_0 + \xi\omega_0 X_0)\sin\omega_a t\right)e^{-\xi\omega_0 t}}$$

On observe des pseudo-oscillations.

- L'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$ car $\vec{F_v} = +\beta\dot{x}\,\vec{u_x}$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

- Si $\beta > \alpha$, l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.

3°). (1) s'écrit avec l'ajout de cette force $\vec{F} = \vec{F_0} + \vec{F_1}\cos(\omega t)$

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left[X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right] = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

or $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$

- On pose $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ et $\underline{F_1} = F_{1m} e^{i(\omega t)}$

$$\Rightarrow \underline{Y}\left(-\omega^2 + 2\xi\omega_0(i\omega) + \omega_0^2\right) = -\frac{\underline{F_1}}{m} = -\underline{\epsilon}$$

D'où $$\underline{Y} = \frac{-\underline{\epsilon}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(2\xi\omega_0\omega)} = \frac{-\underline{\epsilon}/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}$$

Donc $$\boxed{\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1-\Omega^2+2i\xi\Omega}}$$

4°) Une résonance se produit si $|\underline{H}|$ présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur.

Soit $$|\underline{H}| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\Omega^2\xi^2}}$$

t.q $$\frac{dH}{d\Omega} = 0 \Leftrightarrow -4\Omega(1-\Omega^2)+8\Omega\xi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \text{ (cas non intéressant car minimum)} \\ (1-\Omega^2) = 2\xi^2 \end{cases}$$

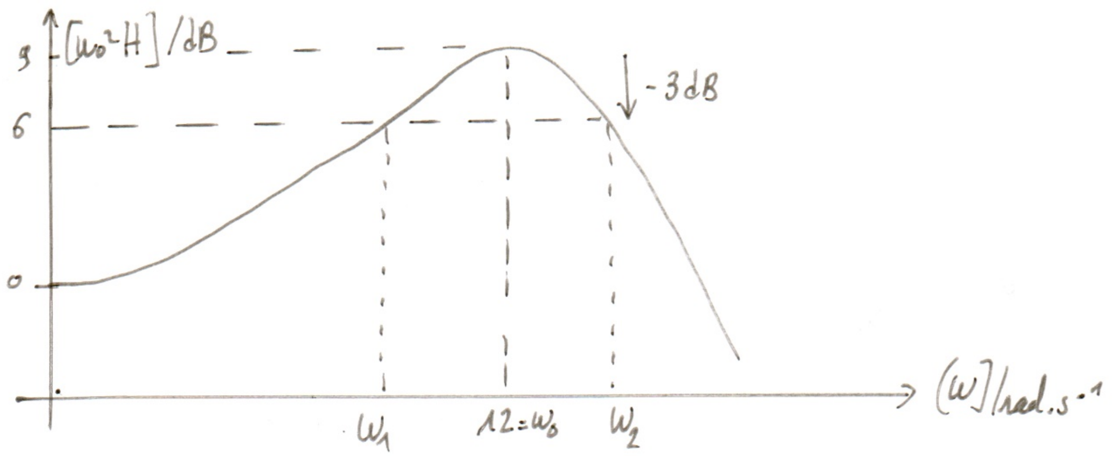
D'où $\Omega^2 = 1-2\xi^2 \rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$

A la résonance : $$|\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4+(1-2\xi^2).4.\xi^2}}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^2-\underbrace{4\xi^4}_{\ll 4\xi^2}}}$$

Vu que $\xi^2 \ll 1 \Rightarrow \boxed{|\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1}{2\omega_0^2\xi}}$

5°)



. Pour $\xi^2 \ll 1$ on a $\omega_r = \omega_0 \simeq 12\,rad.s^{-1}$

. Or on sait que la bande passante est t.q : $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 2\xi$

Avec $\Delta\omega = 14{,}2 - 9{,}5 = 4{,}7\,rad.s^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}} = \frac{4{,}7}{2 \times 12} = \underline{\underline{0{,}2}}$$

6°) Il est important de connaître les fréquences de résonance d'une structure pour éviter qu'elle ne soit excitée à leur voisinage. Exciter sur une résonance un pont ou une tour peuvent être détruites : <u>pont de Tacoma à Washington</u>

7°) On peut fixer sur la structure des accéléromètres (ou des capteurs à induction).

8°) . Le signal proposé a une période de 0,5s donc une fréquence de 2Hz. Il faut donc une fréquence d'échantillonage d'au moins 4Hz. On peut calculer la fréquence d'échantillonage par : $N T_{éch} = t_{max} - t_{min}$

$$\Leftrightarrow \boxed{f_{éch} = \frac{N}{t_{max} - t_{min}}}$$

Pour le graphe 1 on obtient : 1,7Hz
2 — " : 11,5Hz
3 — " : 3,4Hz
4 — " : 33,2Hz

Cependant sur le spectre 2 possède des pics fantômes en 3,3Hz et 5,5Hz qui correspondent aux pics réels 6 et 8Hz : $f_{fantôme} = f_e - f_{réel} = 11{,}5 - 6$ ou $11{,}5 - 8 \# 3{,}3Hz$.

. Seul le graphe 4 est facilement exploitable avec : - une composante continue
- un fondamental à 2Hz
- des harmoniques à 4, 6, 8, 10, 12 Hz

. Vu l'échelle logarithmique on a le pic 3 à 6Hz qui a une amplitude divisé par 10

. Ce qui laisse envisager une décroissance en $1/n^2$ comme un signal triangulaire : $A_n = \frac{A_0}{n^2}$.

. Par rapport à la fréquence, la fréquence de la marche est de 1Hz, mais celle de la force est de 2Hz. Celle-ci est double car on est des bipèdes.

9) . D'après la figure trois la fréquence de résonance du pont est de 2Hz, ce qui correspond à la fréquence de la marche d'un piéton.

$\Rightarrow$ d'importantes oscillations si aucune précaution n'est prise

. L'ajout des amortisseurs déplacent les résonances en 1,2Hz et 2,4Hz, mais surtout crée une anti-résonance à la fréquence de la marche.

. En plus, l'amplitude à 2Hz a été abaissée de 9 dB à 1dB et les nouvelles résonances ne correspondent à aucune fréquence de la figure 4.4 $\Rightarrow$ le système d'amortissement remplit bien son rôle.

II Système élastique continu

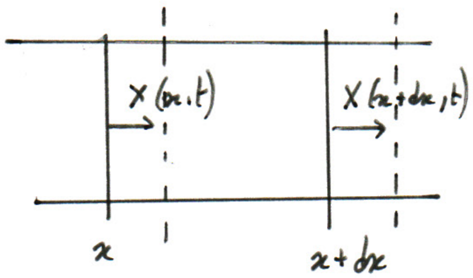
10) Le module d'Young vérifie : $F = ES.\dfrac{\Delta L}{L}$

d'où $[E] = [F]/[S]$

$= \dfrac{MLT^{-2}}{L^2}$

Donc <u>E s'exprime en Pa</u> ou $kg.m^{-1}.s^{-2}$

11)



Appliquons le PFD à la mésotranche de largeur dx :

$$S\rho\,dx\,\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = F(x+dx,t) - F(x,t) \quad ①$$

or $F(x,t) = ES\,\dfrac{\Delta L_x}{L}$

$$= ES\,\frac{X(x+dx,t) - X(x,t)}{dx} = ES.\frac{\partial X}{\partial x}$$

d'où ① s'écrit : $\rho S\,dx\,\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES\left[\dfrac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \dfrac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x}\right]$

$$\Leftrightarrow \rho \cancel{S}\,\cancel{dx}\,\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = E\cancel{S}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.\cancel{dx}.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \text{ : équation de d'Alembert}}$$

12) Pour le modèle de la corde :

$$\mu \, dl \, \vec{a} = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)$$

On projette sur Ox : $0 = T_x(x+dx,t) - T_x(x,t)$ car les mouvement sont uniquement verticaux.

$$\Leftrightarrow T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t) = 0$$

Or $\alpha \ll 1 \Rightarrow \underline{T(x+dx,t) \simeq T(x,t) = T_0} \Rightarrow$ <u>la norme est indépendante de x</u>

13) Sur (Oy) : $\mu dl \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\left[\sin\alpha(x+dx,t) - \sin\alpha(x,t)\right]$

or $\begin{cases} dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} = \tan\alpha \simeq \sin\alpha \end{cases}$

d'où $\mu dx \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\left[\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ où } c_\ell = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

III) Modèle de la poutre élancée

14) Si $y(x,t) = f(x).g(t)$ alors il s'agit d'ondes stationnaires. Ce type d'onde apparaît lorsqu'une onde réfléchie se superpose à une onde incidente après réflexion sur un obstacle. C'est les conditions aux limites (comme la corde vibrante par exemple) qui imposent de telles ondes.

15) Soit $\rho S.\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$

d'où : $\rho S.\ddot{g} f + IE.f^{4}.g = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ddot{g}}{g}}_{F(t)} = \underbrace{-\frac{IE}{\rho S}.\frac{f^4}{f}}_{G(x)} = C$$

Comme $F(t) = G(x)$ $\forall (x,t)$ on peut dire que les deux termes sont égaux à une constante C.

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{g} - Cg = 0 \\ f^4 + \dfrac{\rho S}{IE}C = 0 \end{cases}$$

Par hypothèses on s'intéresse à des mouvements bornées donc on on pose $C = -\omega^2$

$\Rightarrow g(t) = A\cos(\omega t + \phi)$: fonction périodique de pulsation ω

• L'équation différentielle vérifiée par f : $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2} - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f = 0$ est du quatrième ordre $\Rightarrow$ on a 4 constantes à déterminer.

• Pour g on a deux constantes à déterminer.

D'où $y(x,t) = A\cos(\omega t + \phi)\left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + A_3 f_3(t) + A_4 f_4(t)\right]$

On peut poser $A = 1$ et ainsi il reste 5 constantes à déterminer.

16) Soit : $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}_{\alpha} f = 0$ d'où le polynôme caractéristique :

$\Rightarrow r^4 - \alpha = 0$

$\Rightarrow r^4 = \alpha \Rightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{\alpha} \\ \text{ou} \\ r^2 = -\sqrt{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \alpha^{1/4} \\ r_2 = -\alpha^{1/4} \\ r_3 = j\cdot\alpha^{1/4} \\ r_4 = -j\cdot\alpha^{1/4} \end{cases}$

D'où la solution : $f = \underbrace{A'e^{r_1 x}}_{f_1} + \underbrace{B'e^{r_2 x}}_{f_2} + \underbrace{C'e^{r_3 x}}_{f_3} + \underbrace{D'e^{r_4 x}}_{f_4}$

f_1 et f_2 peuvent s'écrire à l'aide fonctions hyperboliques
f_3 et f_4 — " — " — sinusoïdales

$$\Rightarrow f(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\,ch(\beta x) + D\,sh(\beta x)$$

où $\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}$

17) . Les conditions aux limites :

- $y(0,t)=0$ impose $f(0)=0 \Rightarrow A+C=0$
- $y''(0,t)=0$ impose $f''(0)=0 \Rightarrow -\beta^2 A+\beta^2 C=0 \Rightarrow A-C=0$

D'où $\underline{A=0 \text{ et } C=0}$

- $y(L,t)=0 \Rightarrow f(L)=0 \Rightarrow B\sin(\beta L)+D\,\mathrm{sh}(\beta L)=0$ ③
- $y''(L,t)=0 \Rightarrow f''(L)=0 \Rightarrow -\beta^2 B\sin(\beta L)+\beta^2 D\,\mathrm{sh}(\beta L)=0$ ④

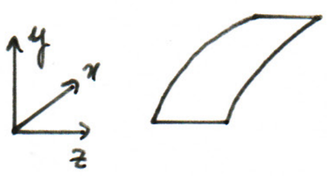
D'où $\begin{cases} ③+④/\beta \Rightarrow 2D\,\mathrm{sh}(\beta L)=0 \Rightarrow D=0 \\ ③-④/\beta \Rightarrow 2B\sin(\beta L)=0 \Rightarrow \begin{cases} B=0 \ (\Rightarrow f=0 \text{ impossible}) \\ \underline{\beta L = n\pi.} \end{cases} \end{cases}$

d'où $\beta_n L = n\pi$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\rho S}{IE}\right)^{1/4} \omega_n^{1/2} L = n\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}}$$

18) On a vu que : $y_n(x,t) = A_n.\cos(\omega_n t+\varphi_n)\sin(\beta_n x)$ donc l'amplitude y_n ne dépend pas de z par exemple c'est le cas du mode ⓐ :



mais pas des modes ⓑ, ⓓ, ⓖ, ⓗ dont y dépend de z.

$\Rightarrow$ Les modes à conserver sont : a, c, e, f.

Le mode : a possède 2 nœuds aux extrémités en $x=0$ et $x=L$.

: c — " — " — " et un nœud en $x=\frac{L}{2}$

: e ——————— et deux nœuds en $x=\frac{L}{3}$ et $\frac{2L}{3}$

: f ——————— et trois nœuds en $\frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}$

D'où les valeurs de n :

a	c	e	f
1	2	3	4

19) Calculons les fréquences des quatre modes obtenus.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{IE}{\rho S}} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

Avec les valeurs proposées on obtient : $f_n = \frac{n^2}{L^2} \cdot 9{,}17.10^3$ d'où le tableau avec f en Hz :

L (m)	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
$L_1 = 70$	0,50	2,0	4,5	8,0
$L_2 = 144$	0,12	0,47	1,1	1,9
$L_3 = 108$	0,21	0,84	1,9	3,4

Si on considère la marche des piétons à $f = 2$ Hz alors 3 modes peuvent être excités :

$n = \{2, 3, 4\}$

On remplace I' par I en inversant les rôles de b et h d'où $I' = \frac{1}{12} b^3 h$

$$\Leftrightarrow I' = \frac{b^2}{h^2} I \simeq 16 I$$

D'où les nouvelles fréquences multipliées par 4 environ.

L (m)	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
$L_1 = 70$	1,9	7,5	17	30
$L_2 = 144$	0,44	1,8	4,0	7,2
$L_3 = 108$	0,79	3,1	7,1	12,4

Cependant l'oscillation du Millénium sur cet axe est due à l'action latérale des piétons avec une alternance pied gauche et pied droit. Il faut donc comparer à $f = 1{,}0\,Hz$ cette fois.

Le mode qui pose problème à cette fréquence est le mode 1 avec $f_1(L_3) = 0{,}79\,Hz \# 1{,}0\,Hz$.

C'est ce mode qui a posé problème dans la construction du Millénium Bridge.