

# Physique : DM13

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## Physique en arctique

Ce sujet aborde différentes questions relatives aux propriétés physiques particulières aux régions polaires. Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème ainsi qu'un formulaire sont regroupés à la fin de l'énoncé.

Les exemples seront tous traités dans le cas des régions polaires nord (également appelées arctiques ou boréales). Les notations géographiques usuelles sont également rappelées en fin d'énoncé. Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.

Les trois parties sont indépendantes.

### I. — Pôles géographiques et magnétiques

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires.

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique  $\vec{m}$  de norme constante  $m$ , la direction du vecteur  $\vec{m}$  étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical ( $\Delta$ ) dirigé par le vecteur  $\vec{e}_r$  local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

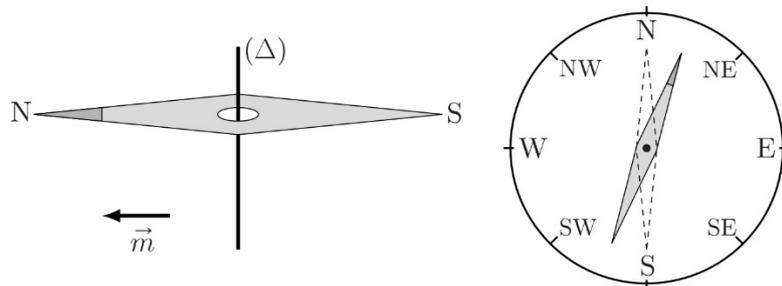


FIGURE 1 – Boussole de navigation

□ 1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note  $I$  le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation ( $\Delta$ ); légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période  $\tau_{\text{osc}}$ .

□ 2 — Montrer que la connaissance de  $m$ ,  $\tau_{\text{osc}}$  et  $I$  permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$  disposé au centre  $O$  de la Terre (assimilée à une sphère de rayon  $R_T$ ), l'axe ( $Oz$ ) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 5). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques  $\varphi$  (longitude) et  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$  (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et  $y$  a pour intensité  $B_E$ .

□ 3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de  $\mu_0$  (perméabilité du vide),  $M_0$  et  $R_T$ .

□ 4 — Préciser le signe de  $M_0$  puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point  $P$  de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction  $\vec{e}_N$  du champ géomagnétique  $\vec{B}$ , projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle  $D$  formé par  $\vec{B}$  avec le nord magnétique local; la déclinaison magnétique est positive si  $\vec{B}$  est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de  $D$ ? Calculer  $\tan(D)$  en fonction de la latitude  $\lambda$  puis tracer l'allure de la courbe donnant  $D$  en fonction de  $\lambda$  pour toutes les valeurs de  $\lambda$  du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles »? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud?

## II. — La glace de la banquise

L'existence de couverts de glace de grande épaisseur au-dessus des océans polaires est bien sûr une caractéristique remarquable des régions polaires. On étudie ici deux propriétés de ces couverts de glace :

- quelques propriétés mécaniques d'un traîneau glissant sur sa surface (partie II.A) ;
- un modèle simple de croissance de l'épaisseur de la glace en hiver (partie II.B).

### II.A. — Un traîneau sur la glace

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale  $M$  (le pilote, ou *musher*, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage)  $\mu_s$  et dynamique (en mouvement)  $\mu_d$ .

□ 6 — Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Montrer qu'un tel élément de corde transmet les tensions et que celles-ci sont colinéaires à la corde.

□ 7 — Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer  $\mu_d$  par  $\mu'_d$ , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale  $F$  exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse  $v$  et on adoptera le modèle  $F = F_0 - \beta v$  où  $F_0$  et  $\beta$  sont des constantes positives. On prendra les valeurs  $M = 5,0 \times 10^2$  kg,  $\alpha = 0$ ,  $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$  et  $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$ .

□ 8 — Déterminer la valeur minimale de  $F_0$  permettant le démarrage du traîneau.

□ 9 — La vitesse du traîneau en régime stationnaire est  $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , atteinte à 5% près au bout d'un temps  $t_1 = 5$  s. Exprimer d'une part  $\beta$  en fonction de  $M$  et  $t_1$  et d'autre part  $F_0$  en fonction de  $\beta$ ,  $v_0$ ,  $\mu_d$ ,  $M$  et  $g$ . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante  $v_0$ , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  (cf. fig. 2). Les chiens (modélisés ici en un seul point  $C$ ) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.

□ 10 — Déterminer en fonction des données la tension  $\vec{T}$  de la corde et l'angle  $\theta$  entre la force de traction et la trajectoire.

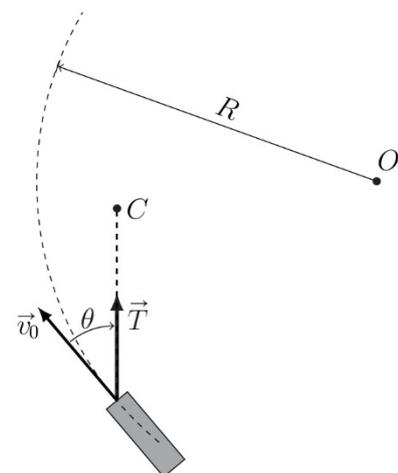


FIGURE 2 – Trajectoire circulaire du traîneau

## II.B. — Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante (cf. fig. 3) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à  $T_1 = 4^\circ\text{C}$  par les courants océaniques. Sur une hauteur constante  $e$  sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  à l'altitude  $z = 0$  de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante  $z_g(t)$  qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante  $T_2 = -40^\circ\text{C}$ . On notera  $\lambda_e$  et  $\lambda_g$  les conductivités thermiques et  $c_e$  et  $c_g$  les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace,  $\rho_g$  et  $l_f$  la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

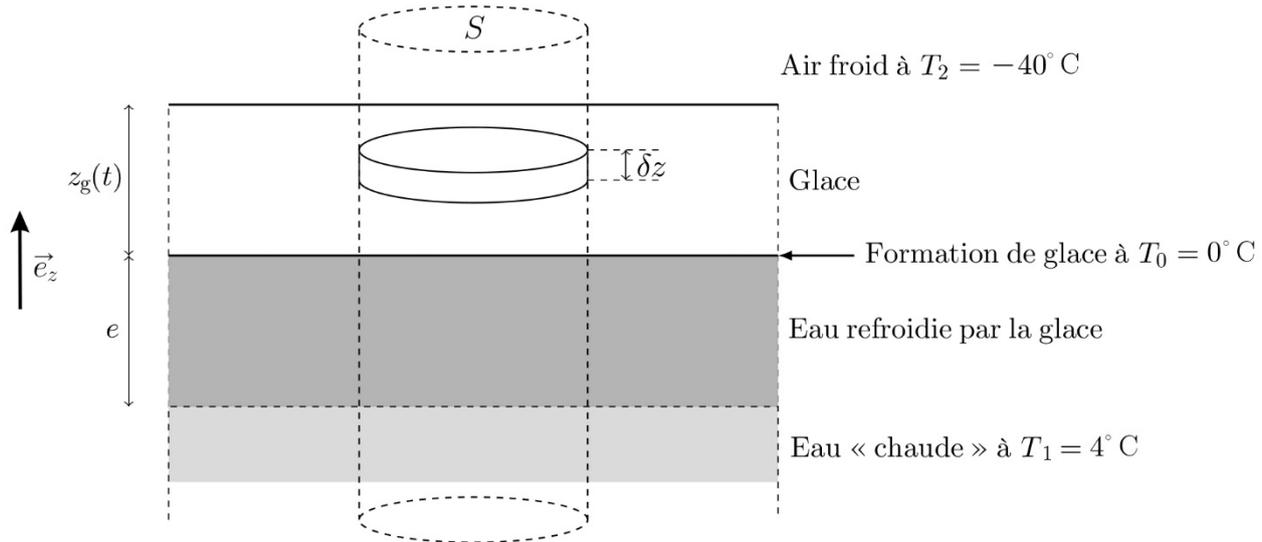


FIGURE 3 – L'océan sous la banquise en formation

L'épaisseur de glace  $z_g(t)$  augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface  $S$  unité (cf. fig. 3) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

□ **11** — Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur  $\delta z$  prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température  $T_g(z,t)$  au sein de la glace.

□ **12** — Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée  $\Delta t$  de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur  $\Delta z$ . Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température  $T_g$  ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entend par « assez lentes ».

*On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi-statiques.*

□ **13** — Définir et exprimer les résistances thermiques  $R_g$  et  $R_e$ , pour une aire donnée  $S$ , des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto-conductifs) : la puissance échangée par unité d'aire de cette surface vérifie  $|\mathcal{P}_u| = h|T_s - T_2|$  où  $T_s$  est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient  $h > 0$  de la loi de Newton est supposé connu et constant.

- 14 — Exprimer la résistance thermique  $R_i$ , pour une aire  $S$ , de l'interface entre l'air et la glace.
- 15 — Montrer que le régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure 4 et préciser l'expression du « courant »  $\Phi$  du « générateur de courant » en fonction notamment de  $l_f$ ,  $\rho_g$  et de la vitesse de croissance  $v_g = \frac{dz_g}{dt}$  de la couche de glace.

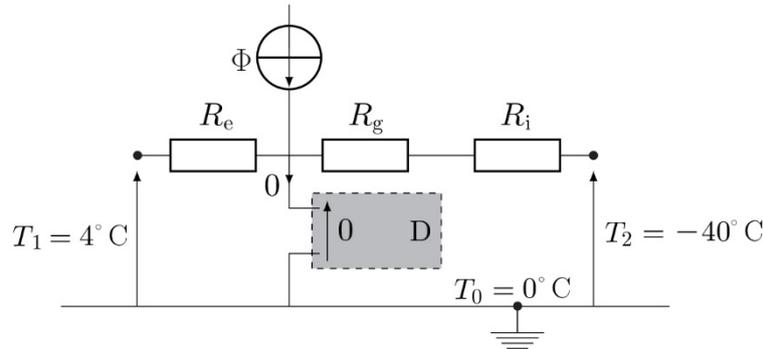


FIGURE 4 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace

- 16 — En *électricité*, connaissez-vous un dispositif D permettant d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant ? Si oui, comment faut-il le brancher ? En *thermodynamique*, pour quelle raison la différence de température aux bornes de D est-elle maintenue nulle ?
- 17 — Établir l'équation différentielle vérifiée par  $z_g(t)$ . On suppose que pour toutes les valeurs de  $t$  considérées on a  $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$ , en déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche de glace sous la forme  $\tau_g [\ell_g z_g(t) + z_g^2(t)] = \ell_g^2 t$  où l'exprimera les grandeurs  $\tau_g$  et  $\ell_g$  en fonction des paramètres du modèle. L'instant  $t = 0$  correspond au début de la formation de la banquise.
- 18 — Tracer et commenter l'allure de la courbe donnant  $z_g$  en fonction de  $t$ . On montrera notamment l'existence de deux régimes successifs.

### III. — La spirale d'Ekman

Lors de diverses expéditions en direction du pôle nord, on a pu constater que les navires pris dans les glaces du pack arctique dérivent systématiquement à *droite* de la direction du vent.

On interprète ces résultats par la différence de direction d'écoulement du vent (qui entraîne la surface de l'eau) et de l'eau profonde (qui entraîne les glaces dérivantes du pack) du fait de la rotation propre de la Terre autour de l'axe polaire (on parle ici d'*effet Coriolis*). L'entraînement des couches de plus en plus profondes de l'océan est dû aux effets de viscosité de l'eau.

Ce changement graduel de direction en fonction de la profondeur possède une forme de spirale. Elle prend le nom de l'océanographe suédois Vagn Walfrid Ekman qui l'expliqua dans sa thèse en 1907.

- 19 — La viscosité de l'eau liquide à basse température (sous les glaces du pack arctique) est-elle, à votre avis, plus ou moins élevée qu'à température ambiante ?

L'étude qui suit est réalisée dans un référentiel terrestre ( $Oxyz$ ) dans lequel ( $Oz$ ) est vertical ascendant, ( $Ox$ ) dirigé dans la direction du vent. L'océan occupe toute la région  $z < 0$ ; on le modélise comme un écoulement incompressible, visqueux, de pression  $P$ . Le champ de vitesse  $\vec{v}$  de cet écoulement est stationnaire horizontal ( $v_z = 0$ ), il ne dépend que de la profondeur ( $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$ ), et il est entièrement situé à proximité du pôle nord (latitude  $\lambda = \pi/2$ ). La pression atmosphérique est uniforme et notée  $P_0$ .

▣ **20** — Expliciter les forces de pesanteur et des pseudo-forces d'inertie exercées par unité de masse d'eau en fonction de  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $g_0$  (accélération de la pesanteur polaire) et de  $T_0$  (durée du jour). Que dire des forces d'inertie d'entraînement ?

▣ **21** — Écrire l'équation locale qui traduit le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule mésoscopique d'eau (Équation de Navier–Stokes). Montrer que la pression  $P$  ne dépend que de  $z$  et déterminer son expression.

▣ **22** — Montrer que les fonctions  $v_x(z)$  et  $v_y(z)$  sont reliées par deux équations différentielles couplées du second ordre, que l'on établira et qui feront apparaître un paramètre commun noté  $\delta$ , homogène à une longueur, que l'on exprimera en fonction de  $\eta_e$ ,  $T_0$  et  $\rho_e$ .

▣ **23** — On note  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  la vitesse de surface de l'eau océanique située en  $z = 0$ . Déterminer  $v_x(z)$  et  $v_y(z)$  en supposant que le fond de l'océan correspond à la limite  $z \rightarrow -\infty$ .

▣ **24** — Ces résultats sont-ils compatibles avec l'observation expérimentale suivante : *la vitesse de dérive des navires pris dans la banquise est de l'ordre de 2% de celle du vent avec une dérive de 20° à 40° à droite de ce dernier ?*



## Données et formulaire utiles pour l'ensemble du sujet

### Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau liquide à 4°C	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Viscosité dynamique de l'eau liquide à 4°C	$\eta_e = 1,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Logarithme népérien du nombre 20	$\ln(20) \simeq 3,0$

### Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire  $\vec{M}$  placé à l'origine  $O$  des coordonnées est donné au point  $P$  par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire  $\vec{m}$  soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  sont décrites par l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  et par le couple des actions électromagnétiques  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .

### Coordonnées sphériques et géographiques

On notera  $(Oxyz)$  les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Les coordonnées sphériques d'un point  $P$  sont notées  $(r, \theta, \varphi)$  avec la base locale associée  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ , cf. fig. 5 à gauche. On note aussi  $\varphi$  (longitude) et  $\lambda$  la latitude d'un point  $P$  de la surface terrestre ; le point  $A$  est situé sur l'équateur dans le méridien origine ( $\varphi = 0$ ) ; celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich  $G$ , cf. fig. 5 à droite.

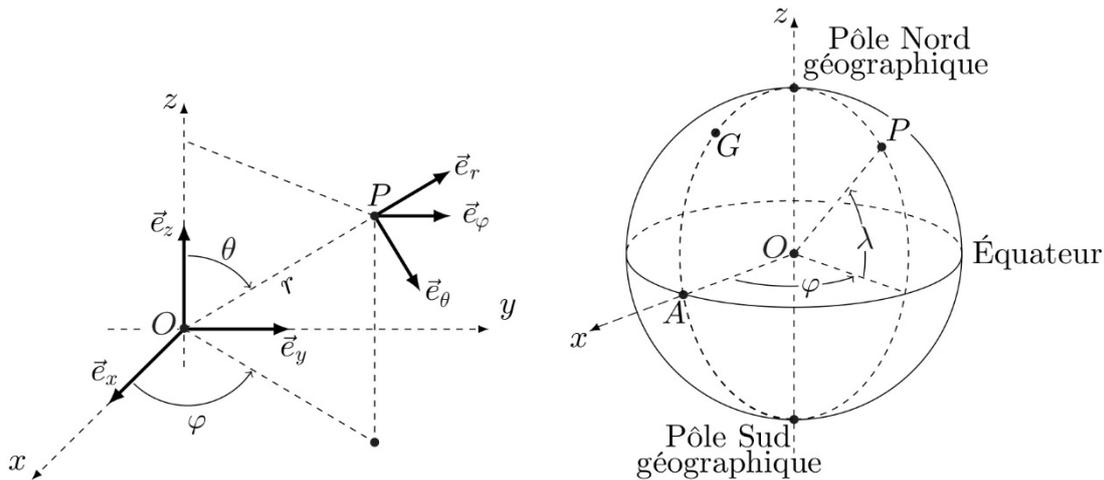


FIGURE 5 – Coordonnées sphériques et géographiques

**FIN DE L'ÉPREUVE**