

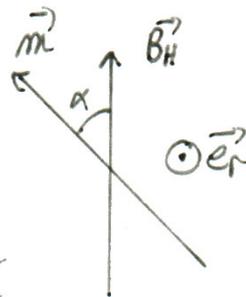
Physique : DM13

Physique en arctique (Mines-Ponts PC / 2019)

1) Pour un dipôle magnéto-statique : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, donc la position d'équilibre stable correspond à \vec{m} et \vec{B} alignés et de \vec{m} sens.

\Rightarrow l'aiguille est dirigée vers le nord magnétique

2) D'après le TMC : $\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \Sigma d\vec{l}_0 \otimes \vec{v}$



Suivant \vec{e}_r : $I\ddot{\alpha} = -mB_H \sin\alpha$ si on néglige les frottements.

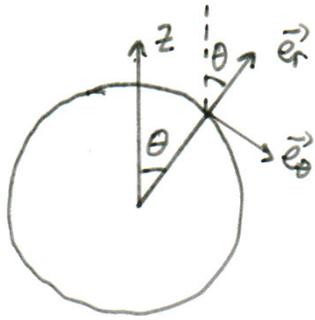
$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mB_H}{I} \alpha = 0 \quad \text{où } \sin\alpha \simeq \alpha.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{mB_H}{I} \Rightarrow T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}}$$

D'où $B_H = \frac{4\pi^2 I}{m T_{osc}^2}$ C'est la composante horizontale que l'on peut déterminer par cette méthode.

3) D'après l'annexe : $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}'(\vec{n} \cdot \vec{R}') - R'^2 \vec{d}\vec{b}}{R'^5}$ où $\vec{R}' = r\vec{e}_r$

$$\text{or } d\vec{b} = dl_0 \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R^3} \cdot [3\vec{e}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) - \vec{e}_z]$$



$$\text{d'où } \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R_T^3} \left[3\cos\theta \vec{e}_r - (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \right]$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R_T^3} \left[2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\text{Or } \lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R_T^3} \left[2\sin\lambda \vec{e}_r + \cos\lambda \vec{e}_\theta \right]$$

$$4) \text{ A l'équateur } \lambda = 0 \text{ et } \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}_{\text{eq}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R_T^3} \left[-\vec{e}_z \right]$$

Or \vec{B}_{eq} est dirigé du sud vers le nord donc $I_0 < 0$

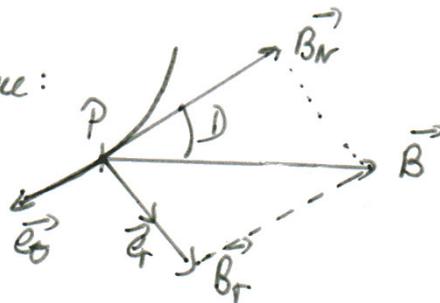
$$\bullet \text{ D'où : } I_0 = - \frac{4\pi R_T^3 B_{\text{eq}}}{\mu_0} \approx - 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

$$\bullet \text{ Aux pôles magnétiques : } \begin{cases} \vec{B}_{\text{Nord}} = 2 |B_{\text{eq}}| (-\vec{e}_r) = 2 |B_{\text{eq}}| (-\vec{e}_z) \\ \vec{B}_{\text{Sud}} = 2 |B_{\text{eq}}| (+\vec{e}_r) = 2 |B_{\text{eq}}| (-\vec{e}_z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{Nord}} = \vec{B}_{\text{Sud}} = 6 \cdot 10^{-5} (-\vec{e}_z) \text{ en Tesla.}$$

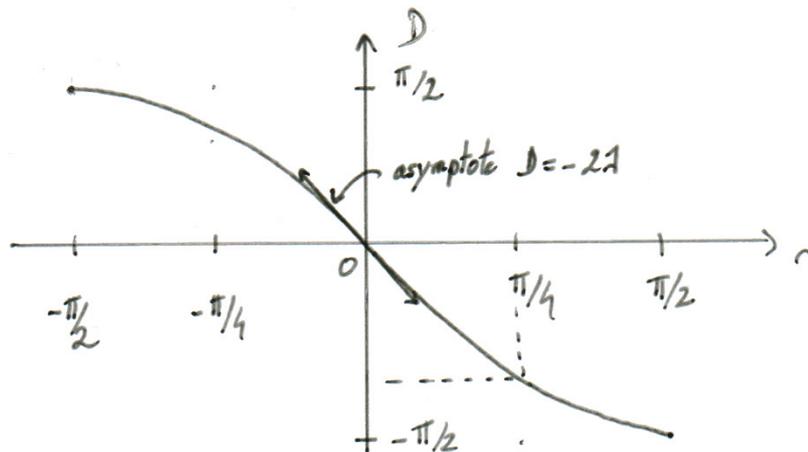
5) D'après l'énoncé l'angle D est tel que :

$$\text{d'où } \begin{cases} B_N / B = \cos D \\ B_r / B = \sin D \end{cases}$$



$$\text{or } B_N = -B_\theta \Rightarrow \tan D = - \frac{B_r}{B_\theta} = - 2 \tan \lambda \Rightarrow \underline{\tan D = - 2 \tan \lambda}$$

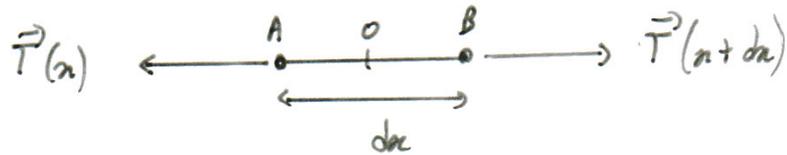
D'où le tracé de $D = \text{Arctan}[-2 \tan d]$



Pour $d = \pi/4$: $D = \text{Arctan}(-2) \approx -63^\circ$.

- Aux pôles, $B_H = 0$, si bien qu'on va mesurer les fluctuations du champ magnétique au niveau de la boussole \Rightarrow les boussoles s'affolent à proximité des pôles.
- Dans l'hémisphère Nord l'aiguille plonge vers le sol.
 — " — Sud — " pointe vers le ciel.
 \Rightarrow Il faut donc utiliser la boussole dans un plan vertical, et observer si l'aiguille pointe vers le sol ou le ciel.

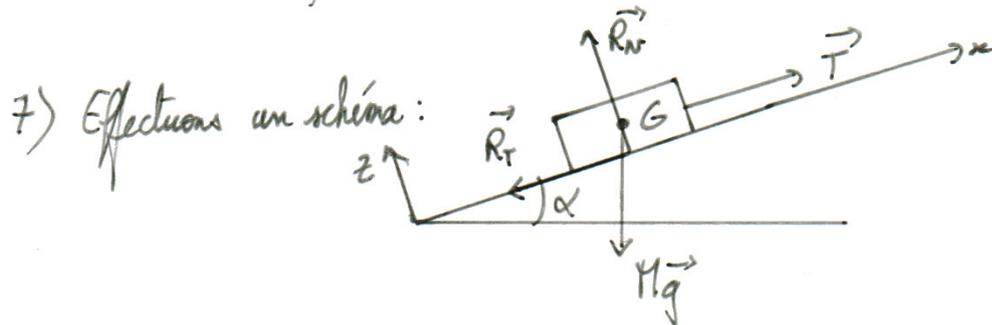
6) Soit l'élément de corde dx suivant :



Si on applique le PFD et le BMC à cet élément de corde on a

$$\begin{cases} \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx) = \vec{0} \\ \frac{dx}{2} \vec{a} \wedge \left[\vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) \right] = \vec{0} \\ \quad \quad \quad = -2 \vec{T}(x) \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} |T(x)| = |T(x+dx)| \Rightarrow \text{transmet les tensions} \\ \text{et} \\ \vec{T}(x) \text{ colinéaire à } \vec{e}_x \Rightarrow \text{les tensions sont colinéaires à la corde.} \end{cases}$



D'après le PFD appliqué au tréneau : $M \frac{dV}{dt} = \vec{R}_T + \vec{R}_N + M\vec{g} + \vec{T}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ox} : M \frac{dV}{dt} = T - R_T - Mg \sin \alpha & (1) \\ \text{Oz} : 0 = R_N - Mg \cos \alpha & (2) \end{cases}$$

Dans le cas où cela glisse : $R_T = \mu_s R_N$, (1) donne :

$$M \frac{dV}{dt} = T - \mu_s \overbrace{(Mg \cos \alpha)}^{R_N} - Mg \sin \alpha$$

Si le glissement était uniquement horizontal : $M \frac{dV}{dt} = T - \mu_s Mg$.

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_d' = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha \\ \text{et si } \alpha \ll 1 : \mu_d' = \mu_d + \alpha \end{array} \right.$$

8°) Si le traineau est immobile :

$$\left\{ \begin{array}{l} (O_x) : F_0 - R_T = 0 \\ (O_z) : R_N - Mg = 0 \end{array} \right.$$

On il n'y a pas de mouvement tant que $R_T < \mu_s R_N$
 $\Leftrightarrow F_0 < \mu_s Mg$

D'où la valeur limite de F_0 : $\underline{F_0 = \mu_s Mg} = \underline{400 \text{ N}}$

9°) de PFD s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (O_x) : M \frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - R_T \quad (1) \\ (O_z) : 0 = R_N - Mg. \quad (2) \end{array} \right.$$

(1) $\Rightarrow M \frac{dv}{dt} + \beta v = F_0 - \mu_d Mg$ (glissement)

$\Rightarrow v(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}$ où $\tau = \frac{M}{\beta}$

or $v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 (1 - e^{-t/\tau})$ où $\left\{ \begin{array}{l} \tau = M/\beta \\ v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta} \end{array} \right.$

or $v(t_1) = 0,95 v_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = 0,95 \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = 0,05$

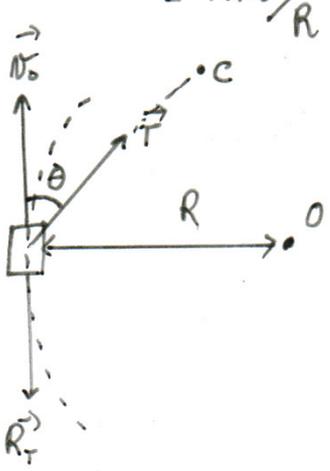
$\Leftrightarrow t_1 = \tau (-\ln 0,05)$

$\Leftrightarrow t_1 = \tau \ln 20$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{M}{\beta} \ln 20 \quad \Leftrightarrow \beta = \frac{M}{t_1} \ln 20 = \underline{\underline{300 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

$$\text{Et: } \underline{\underline{F_0 = \beta v_0 + \mu_s M g}} = \underline{\underline{1,1 \text{ kN}}}$$

10) Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est radiale d'où :

$$- M v_0^2 / R \vec{e}_r = \vec{T} + \vec{R}_T \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{e}_r) : - \frac{M v_0^2}{R} = - T \sin \theta \\ (\vec{e}_\theta) : 0 = T \cos \theta - R_T \end{cases}$$


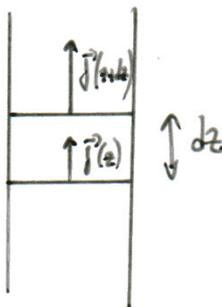
$$\Leftrightarrow \begin{cases} - M v_0^2 / R = - T \sin \theta \\ 0 = T \cos \theta - \mu_s M g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T \sin \theta = M v_0^2 / R \\ T \cos \theta = \mu_s M g \end{cases}$$

$$\text{D'où } \tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_s R g} \quad \text{et } T^2 = (M v_0^2 / R)^2 + (\mu_s M g)^2$$

$$\Leftrightarrow T = M \sqrt{(v_0^2 / R)^2 + (\mu_s g)^2}$$

11)



D'après le premier principe : $dU = \delta W + \delta Q$. On suppose l'évolution à pression constante d'où : $dH = \delta Q$.

$$\rho g c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot S dz = (p(z,t) - p(z+dz,t)) S dt.$$

$$\Leftrightarrow c_p c_p \frac{\partial T}{\partial t} dz = - \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

D'après la loi de Fourier : $q_R = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ d'où :

$$\rho_g c_g \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ où } D = \frac{\lambda}{\rho_g \cdot c_g}$$

12) . En ordre de grandeur on peut écrire : $\frac{T^*}{\Delta t} \sim D \frac{T^*}{(\Delta z)^2}$

$$\Rightarrow \Delta t = (\Delta z)^2 / D$$

. Si la durée de formation de l'épaisseur de glace $z_g(t)$ est supérieure à Δt , on pourra alors considérer la température dans la glace indépendante du temps : régime quasi-stationnaire

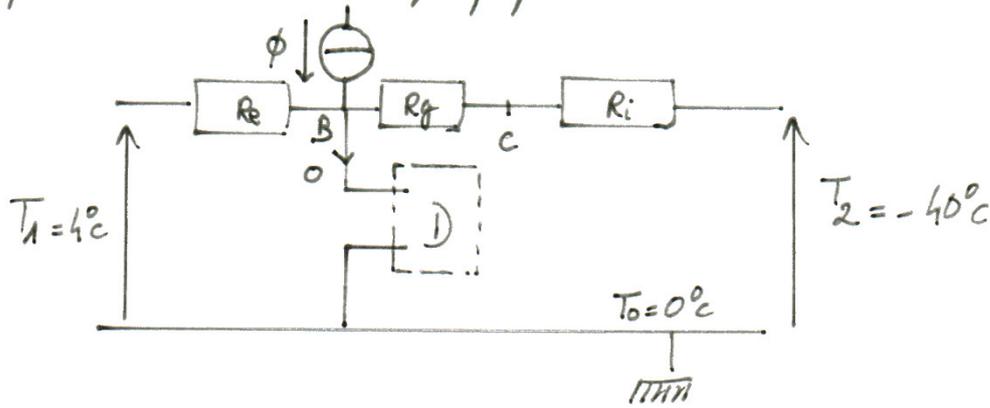
13) En coordonnées cartésiennes : $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ d'où :

$$R_g = \frac{z_g}{\lambda_g S} \text{ et } R_e = \frac{e}{\lambda_e S}$$

14) D'après la loi de Newton : $|P_{eu}| = h(T_s - T_2)$
 puissance surfacique.

$$\text{a } R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi} \Rightarrow R_i = \frac{|T_s - T_2|}{S |P_{eu}|} \Rightarrow R_i = \frac{1}{hS}$$

15). Reprenons le schéma électrique proposé :



. Essayons de représenter l'analogie de la partie sèche



La partie représentée par le flux ϕ est due au changement d'état de l'eau liquide en vapeur. Le reste correspond à l'association des résistances thermiques.

. Pendant dt , il se solidifie une masse d'eau $dm = \rho_g \cdot S dz_g$.

$$\Rightarrow dH = dm \cdot l_f$$

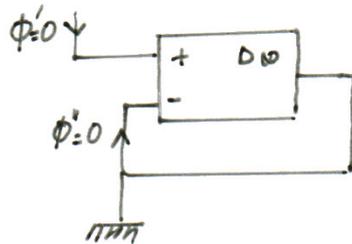
$$\Rightarrow dH = \rho_g \cdot S dz_g \cdot l_f$$

$$\text{or } dH = \phi dt$$

$$\Rightarrow \phi = \rho_g \cdot S \frac{dz_g}{dt} l_f$$

$$\text{D'où } \underline{\phi = \rho_g \cdot S v_g \cdot l_f} \quad \text{où } v_g: \text{ vitesse de croissance de la couche de glace.}$$

16) Le dispositif connu pour ce type de fonction est l'ALI idéal. On peut le brancher en montage suiveur.



La différence de potentiel est nulle ce qui correspond au fait que la transformation se fait de manière isotherme car p est fixé: polier de changement d'état

17) Appliquons la loi des nœuds en B :

$$\phi + \frac{T_1 - T_0}{R_e} + \frac{T_2 - T_0}{R_g + R_i} = 0 \quad (\text{on passe jusqu'à } T_0, \text{ pour éviter l'inconnue } T_c)$$

$$\Leftrightarrow \rho_g l_f \nu_g S + \frac{T_1 - T_0}{e/\lambda_e S} + \frac{T_2 - T_0}{z_g/\lambda_g S + 1/h} = 0$$

$$\text{Or } \begin{cases} |T_1 - T_0| = \frac{1}{\lambda_0} |T_2 - T_0| \\ \frac{d}{dt} \\ e/\lambda_e \gg z_g/\lambda_g + 1/h \end{cases} \Rightarrow \rho_g l_f \nu_g + \frac{T_2 - T_0}{z_g/\lambda_g + 1/h} \approx 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz_g}{dt} \left(\frac{1}{h} + \frac{z_g}{\lambda_g} \right) = - \frac{T_2 - T_0}{\rho_g l_f}$$

$$\Rightarrow dz_g \left(\frac{1}{h} + \frac{z_g}{\lambda_g} \right) = - \frac{T_2 - T_0}{\rho_g l_f} dt$$

$$\text{On intègre : } \frac{z_g^2}{2\lambda_g} + \frac{z_g}{h} = - \frac{T_2 - T_0}{\rho_g l_f} t + \text{cste} \quad \text{avec cste} = 0 \text{ car } z_g(0) = 0$$

que l'on doit mettre sous la forme: $\underbrace{G_g}_{\text{temps}} [l_g z_g + z_g^2] = \underbrace{l_g^2 t}_{(\text{longueur})^2}$

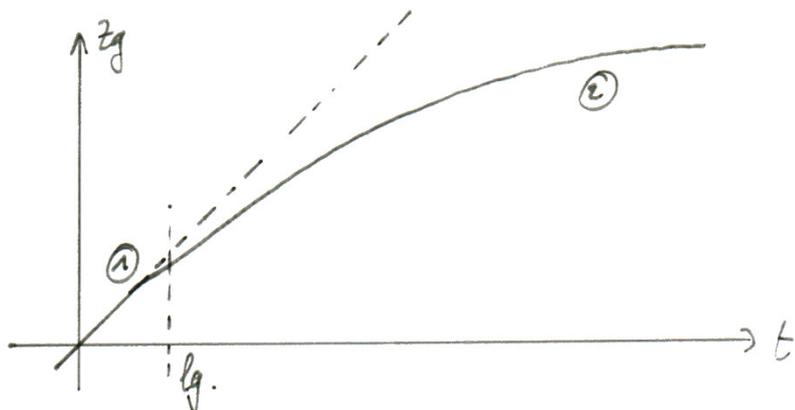
$$\begin{cases} [l] = \text{Wm}^{-1} \text{s}^{-1} \\ [h] = \text{Wm}^{-2} \text{s}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{2dg}{h} \right] = m.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } z_g^2 + \frac{2dg}{h} z_g &= -\frac{T_2 - T_0}{C_g l_g} \cdot 2dg \cdot t \\ &= \frac{T_0 - T_2}{C_g l_g} \cdot \frac{h^2}{2dg} \cdot \left(\frac{2dg}{h} \right)^2 t \end{aligned}$$

$$\text{Donc } C_g (l_g z_g + z_g^2) = l_g^2 t \quad \text{cui } \left\{ \begin{array}{l} 2dg/h = l_g \\ G_g = \frac{2dg \cdot C_g \cdot l_g}{T_0 - T_2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 18) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } z_g \ll l_g \text{ alors: } z_g \sim \frac{l_g}{C_g} t. \quad \textcircled{1} \\ \text{Si } z_g \gg l_g \text{ alors } z_g^2 \sim \frac{l_g^2}{C_g} \cdot t \Leftrightarrow z_g \sim \frac{l_g}{\sqrt{C_g}} \sqrt{t}. \quad \textcircled{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

D'où le tracé à l'aide des deux comportements asymptotiques:



19) Dans le cas de l'eau la viscosité diminue lorsque la température augmente :

$$\underline{\eta_e(4^\circ) > \eta_e(25^\circ)}$$

20) La force de pesanteur massique s'écrit : $\vec{f}_p = \frac{\delta \vec{F}_p}{\delta m} = + \vec{g}_0 = -g_0 \vec{e}_z$

_____ d'inertie de Coriolis _____ : $\vec{f}_{ic} = \frac{\delta \vec{F}_{ic}}{\delta m} = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

$$\Leftrightarrow \vec{f}_{ic} = -2 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \vec{e}_z \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\vec{f}_{ic} = \frac{4\pi}{T_0} \cdot [-v_x \vec{e}_y + v_y \vec{e}_x]}$$

La force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = \frac{\delta \vec{F}_{ie}}{\delta m} = \Omega^2 \vec{r} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$

\Rightarrow Cependant cette force est incluse dans le poids par définition.

21) Equation de Navier Stokes : $\rho_e \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e \Delta \vec{v} + \frac{4\pi}{T_0} (-v_x \vec{e}_y + v_y \vec{e}_x) \cdot \rho_e$

$$\text{Sur } Oz : \rho_e \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) v_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e \Delta v_z$$

$$\text{Or } v_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_e \cdot g_0 \Rightarrow p = -\rho_e \cdot g_0 z + f(x, y)$$

$$\text{or en } z=0, p(0) = p_0 \quad \forall (x, y) \text{ d'où : } \underline{p = p_0 - \rho_e \cdot g_0 z}$$

22) D'après l'énoncé : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0} \text{ et } \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0} \text{ d'où } (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0} \text{ (car } v_z = 0) \\ \text{écoulement stationnaire : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \end{array} \right.$

$$\text{D'où } \left\{ \begin{array}{l} (Ox) : \eta_e \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho_e \cdot \frac{4\pi}{T_0} v_y = 0 \\ (Oy) : \eta_e \cdot \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \rho_e \cdot \frac{4\pi}{T_0} v_x = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{1}{\delta^2} v_y = 0 \\ \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2} v_x = 0 \end{cases} \quad \text{où } \delta = \frac{\eta_e \tau_0}{h \pi e}$$

23) Cela rappelle les équations de couplage du mouvement "cyclotron", utilisons la même méthode de résolution:

$$\text{Posons } u = v_x + j v_y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} - j \frac{u}{\delta^2} = 0$$

$$\Rightarrow u'' - \left(\frac{j^{1/2}}{\delta}\right)^2 u = 0$$

$$\Rightarrow u'' - \left(\frac{e^{j\pi/4}}{\delta}\right)^2 u = 0$$

$$\Rightarrow u'' - \underbrace{\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}\delta}\right)^2}_r u = 0 \quad \Rightarrow u = A e^{rz} + B e^{-rz}$$

or si $z \rightarrow -\infty$, u ne doit pas diverger d'où: $B = 0$

si $z = 0$, $u = v_0 \Rightarrow A = v_0$

$$\text{donc } u = v_0 \cdot e^{\frac{1+j}{\sqrt{2}\delta} z}$$

$$= v_0 e^{\frac{z}{\sqrt{2}\delta}} \cdot \left[\cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) + j \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \right]$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} v_x = v_0 e^{z/\sqrt{2}\delta} \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \\ v_y = v_0 e^{z/\sqrt{2}\delta} \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \end{cases}$$

24) Supposons qu'il y a continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface $\Rightarrow \frac{1}{\tau_0} = v_x'(0)$

$$\text{d'où } u'(0) = \frac{1}{\tau_0} = r A \Leftrightarrow A = \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{\sqrt{2}\delta}{1+j} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\tau_0} \cdot \delta e^{-j\pi/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{\delta}{\tau_0} e^{z/\sqrt{2}\delta} \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta} - \pi/4\right) \\ v_y = \frac{\delta}{\tau_0} e^{z/\sqrt{2}\delta} \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta} - \pi/4\right) \end{cases} \quad \text{Donc la vitesse de l'eau en surface est à } 45^\circ \text{ à droite de celle du vent ce qui est assez proche des } 20 \rightarrow 40^\circ \text{ de l'énoncé}$$