

Physique : DM10

Vers une nouvelle définition du Kelvin (Centrale PC 2016)

I. L'Agitation thermique

I.A.1) a) Soit $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -m_v mg$

or $p = m_v k_B T$ d'où $\frac{dp}{dz} = -p \cdot \frac{mg}{k_B T}$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} + \frac{p}{H} = 0 \text{ où } H = \frac{k_B T}{mg}$$

$$\Rightarrow p = p(0) e^{-z/H} \text{ où } H = \frac{k_B T}{mg}$$

b) Or $p = m_v k_B T \Rightarrow m_v(z) = N_0 e^{-mgz/k_B T}$ avec $N_0 = \frac{p(0)}{k_B T}$

. Pour une molécule $E_{pp} = mgz =$ énergie potentielle de pesanteur.

I.A.2) . On pose $H = \frac{k_B T}{mg}$

. Conservation de l'E_m : $\frac{1}{2} m v_e^2 = mgH \Rightarrow v_e = \sqrt{2gH}$
 $\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

Par conséquent $v_e < v_g = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ mais du même ordre de grandeur.

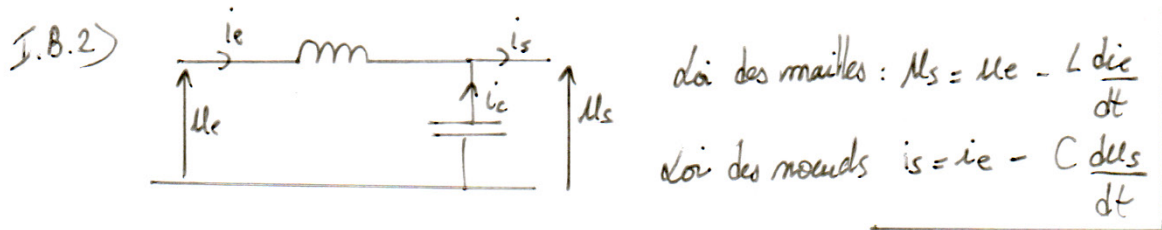
I.A.3) Considérons une balle de $m = 100g$ et $T = 300K$ ainsi si on compare l'énergie thermique à l'E_{pp} alors :

$$mg \delta z = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \delta z = \frac{3/2 k_B T}{mg} = 6 \cdot 10^{-21} m$$

Sous l'agitation thermique, le centre de gravité de la balle se déplace très légèrement.

I.B) Agitation thermique dans un circuit électrique

I.B.1) Dans un métal on a $v_q = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \approx 1,1 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1} \ll c$
 $\Rightarrow$ on peut utiliser la physique non relativiste



I.B.3) a) D'après le schéma:

$$\begin{cases} u(x+dx, t) = u(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ i(x+dx, t) = i(x, t) - C \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} dx = -C \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

b) Par conséquent : $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $c^2 = \frac{1}{LC}$ (3)

c) Equation de d'Alembert où $u(x, t) = U e^{i(\omega t - kx)}$

(3) devient : $-\omega^2 U = c^2 (-k^2) U \Rightarrow \omega = kc$ (4)

(1) donne : $-ikU = -L i\omega U$ d'où $R_c = \frac{U}{i} = \frac{L\omega}{i} = Lc$.

(2) donne : $-ikU = -C i\omega U$ — " $R_c = \frac{U}{i} = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{Ckc}$

Donc $L = R_c / c$ et $C = \frac{1}{R_c c}$

1.B.4) a) D'après ③ : $-\omega^2 U(x) \cos(\omega t) = C e^2 \cos(\omega t) U''(x)$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 U = C e^2 U''$$

$$\Leftrightarrow U'' + \frac{\omega^2}{C e^2} U = 0 \quad (\Leftrightarrow U'' + k^2 U = 0)$$

$$\Rightarrow U(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{t.q.} \begin{cases} U(0) = 0 = A \\ U(D) = 0 = B \sin(kD) \end{cases}$$

D'où $U(x) = B \sin(k_m x)$ où $k_m D = m\pi$

$$\Rightarrow U_m(x) = U_{0m} \sin(k_m x) \quad \text{où } k_m = m\pi/D \Rightarrow \omega_m = \frac{m\pi C e}{D}$$

⑥ des fréquences f_m sont t.q. : $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{m C e}{2D}$ avec m entier. Dans l'intervalle Δf , il y a N modes propres avec : $N = \frac{\Delta f}{f_m - f_{m-1}} \quad (\Rightarrow N = \frac{2D \Delta f}{C e})$

⑦ D'après ② : $\frac{\partial m}{\partial x} = + \gamma U_{0m} \sin(k_m x) (\omega) \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow i_m(x, t) = - \frac{\gamma \omega U_{0m}}{k_m} \cos(k_m x) \sin(\omega t) + \underbrace{\text{cte}(t)}_{=0 \text{ car } i_m = 0 \text{ si } U_{0m} = 0}$$

$$\Rightarrow i_m(x, t) = - \gamma C e U_{0m} \dots$$

$$\Rightarrow i_m(x, t) = - \frac{U_{0m}}{R e} \cos(k_m x) \sin(\omega_m t)$$

1.B.5) a) Soit $d_{em}(x, t) = \frac{1}{2} \gamma dx U_m^2 + \frac{1}{2} dx i_m^2$

$$= \frac{1}{2} dx \left[\gamma U_{0m}^2 \sin^2(k_m x) \cos^2(\omega_m t) + \frac{U_{0m}^2}{R e^2} \cos^2(k_m x) \sin^2(\omega_m t) \right]$$

or $\frac{\lambda}{R e^2} = \frac{\lambda}{R e} \times \frac{1}{R e} = \frac{1}{C e} \cdot \gamma C e = \gamma$

$$d'où d_{em} = \frac{1}{2} \gamma U_{0m}^2 dx \left[\sin^2(k_m x) \cos^2(\omega_m t) + \cos^2(k_m x) \sin^2(\omega_m t) \right]$$

$$\Rightarrow \langle d_{em} \rangle_t = \frac{1}{2} \gamma U_{0m}^2 dx \left[\frac{1}{2} \sin^2(k_m x) + \frac{1}{2} \cos^2(k_m x) \right]$$

$$\text{d'où } \langle \text{dem} \rangle_t = \frac{1}{L} \int_0^L U_{on}^2 dx$$

$\Rightarrow$ Elle ne dépend pas de x vu que l'onde est stationnaire.

$$\textcircled{b} \text{ Donc } \langle E_m \rangle = \int_0^D \langle \text{dem} \rangle = \int_0^D \frac{1}{L} \int_0^L U_{on}^2 dx$$

$$\Rightarrow \langle E_m \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L U_{on}^2 dx \text{ avec } \gamma = \frac{1}{R c \epsilon}$$

$$\Rightarrow \langle E_m \rangle = \frac{1}{L} \frac{U_{on}^2 D}{R c \epsilon}$$

$$\textcircled{1.B.6} \textcircled{a} \text{ Soit } \langle E_m \rangle = k_B T = \frac{1}{L} \frac{U_{on}^2 D}{R c \epsilon}$$

$$\Rightarrow U_{on}^2 = \frac{4 k_B T R c \epsilon}{D}$$

$$\text{Or } u_{eff,m}^2(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u_m^2(x,t) dt = \frac{1}{2} U_{on}^2 \sin^2(k_m x)$$

$$\Rightarrow u_{eff,m}^2(x) = \frac{2 k_B T R c \epsilon}{D} \sin^2(k_m x) \Rightarrow U_{eff,m}^2 = \frac{2 k_B T R c \epsilon}{D}$$

$$\textcircled{b} \text{ Soit } U_{eff}^2 = \sum_{m=1}^N U_{eff,m}^2 = \frac{2 N k_B T R c \epsilon}{D} \text{ ou } N = \frac{2 D \Delta f}{c}$$

$$\Rightarrow U_{eff}^2 = 4 k_B T \Delta f R$$

$$\Rightarrow U_{eff} = \sqrt{4 k_B T \Delta f R}$$

$\textcircled{1.B.7} \textcircled{a}$ Sur les courbes on remarque que $\ln u_{eff} = \text{cte} + \alpha \ln R$

ou $\alpha \approx \frac{1}{2} \Rightarrow U_{eff} \propto R^{1/2}$ des courbes vérifient la loi de Nyquist

On choisit un point de mesure pour mesurer k_B sachant que :

$$U_{\text{eff trace}} = 500 \text{ V}_{\text{eff réel}} \\ = 500 \sqrt{4k_B T R \Delta f}$$

$$\Leftrightarrow k_B = \frac{U_{\text{eff trace}}^2}{4A^2 T R \Delta f}$$

Pour $R = 2 \Omega$, $\Delta f = 100 \text{ Hz}$ on $U_{\text{eff trace}} = 9.10^{-7} \text{ V}$

$$\Rightarrow k_B = 1,35.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$$

⑤. Les valeurs de U_{eff} mesurées sont très faibles, il faut donc protéger les mesures de parasites extérieurs.

Sur plusieurs jours il sera difficile de maintenir les températures constantes
 $\Rightarrow$ utilisation de thermostat

① Mesure acoustique

B.A.1) D'après l'énoncé $l \geq l_{\text{inter}}$ avec $n_{\text{lim}} = \left(\frac{1}{l_{\text{inter}}}\right)^3$

$$\alpha \quad p = n k_B T \Leftrightarrow p = \frac{k_B T}{l^3}$$

$$\text{d'où } p \leq p_{\text{lim}} \text{ avec } p_{\text{lim}} = \frac{k_B T}{(l_{\text{inter}})^3} = 0,3 \text{ bar}$$

B.A.2) On va linéariser les équations selon l'approximation acoustique

$$\text{Euler: } \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p \text{ devient } \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\text{Conservation masse: } \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \text{ devient } \frac{\partial \mu'}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

$$\text{Hypothèse adiabatique: } \chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s \text{ devient: } \chi_s = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{\mu'}{v} \quad (3)$$

③ et ② donnent : $\mu_0 \chi_s \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}$

$$\Rightarrow \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t \partial x}$$

or ① : $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \text{ où } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_s}$$

⑥ Pour un GP : $\mu = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \chi_T = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T = \frac{M}{\mu RT} = \frac{1}{P} \Rightarrow \begin{cases} \chi_T = 1/P \\ \chi_s = \chi_T = \frac{1}{P} \end{cases}$

$$\text{D'où } c^2 = \frac{\delta P}{\mu_0} = \frac{\delta RT}{M} = \frac{\delta N_A k_B T}{M} = c^2$$

⑦ On a $c_a = c_{a,GP} \left(1 + \beta P \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\Delta c_a}{c_{a,GP}} = \frac{\beta P}{2} \leq 10^{-6}$
 $\Rightarrow P \leq \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\beta} \approx 1,5 \text{ bar}$

II.A.3) Formule de composition des incertitudes

$$\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 + \left(2 \frac{\delta c_a}{c_a} \right)^2 + \left(\frac{\delta N_A}{N_A} \right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta c_a}{c_a} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\delta k_B}{k_B} \right)^2 - \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 - \left(\frac{\delta N_A}{N_A} \right)^2 - \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta c_a}{c_a} \leq 0,64 \cdot 10^{-6}$$

II.B) Onde acoustique sphérique

II.B.1) ② Soit $\vec{r} = r(r,t) \vec{e}_r \Rightarrow \text{rot } \vec{r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_\phi = \vec{0}$
 d'où $\vec{\sigma} = \text{grad } \phi$

Par conséquent l'équation d'Euler (4) s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{où } \vec{\sigma} = \vec{\text{grad}} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r \quad (\text{invariance suivant } \theta \text{ et } \varphi)$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\text{donc } \Pi(r,t) = - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{cte}(t)$$

$$\text{Or } \phi=0 \Leftrightarrow \Pi(r,t)=0 \Rightarrow \underline{\Pi(r,t) = - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\textcircled{b} \text{ Soit } \Delta \Pi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta \phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \beta(r)$$

$$\text{Posons } \beta(r) = - \Delta \alpha(r) \Rightarrow \Delta(\phi + \alpha) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (\phi + \alpha)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Comme } \phi \text{ est défini à une cste près on peut écrire } \Delta \phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

II.B.2) de confinement va entraîner une quantification de ω_n

• des parois étant indéformables : $\sigma(r=a,t) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r}(a,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{f'(r=a,t) = 0}$$

$$\text{II.B.3) Soit } \vec{p}(r,t) = \Pi(r,t) \vec{\sigma}(r,t) = - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$= - \mu_0 f(r) f'(r) \cos(\omega t) (-\omega \sin(\omega t)) \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{p} = \mu_0 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) f(r) f'(r) \vec{e}_r} \quad \text{d'où } \underline{\langle \vec{p} \rangle = \vec{0}}$$

I.B.4) Soit $\phi(r) = f(r) \cos(\omega t)$ d'où D'Alembert :

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \downarrow \text{Expression en cylindriques ?}$$

$$\text{s'écrit : } \cos(\omega t) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_a^2} (-\omega^2) \cos(\omega t) f = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} f \times r = 0$$

$$\text{Posons } u = r f \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} u = 0$$

$$\text{Posons } k^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2} \Rightarrow u = A \cos(kr) + B \sin(kr)$$

$$\Rightarrow f = \frac{A}{r} \cos(kr) + \frac{B}{r} \sin(kr)$$

$$\text{or } f(0) \text{ ne doit pas diverger} \Rightarrow f(r) = \frac{B}{r} \sin(kr)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{B}{r} \sin(kr) \cos(\omega t)$$

I.B.5) Or $f'(a) = 0$ t.q $f'(r) = \left[-\frac{1}{r^2} \sin(kr) + \frac{1}{r} (k) \cos(kr) \right] B$

$$\Rightarrow + \frac{1}{a} \sin(ka) = k \cos(ka)$$

$$\rightarrow ka \cos ka - \sin ka = 0$$

$$\text{Posons } g(x) = x \cos x - \sin x \text{ d'où } x_n \text{ t.q } g(x_n) = 0$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{\omega_n a}{c_a} = 2\pi V_n \cdot \frac{a}{c_a}$$

$$\Rightarrow V_n = \frac{x_n c_a}{2\pi a}$$

I.B.6) Donc $c_a = \frac{2\pi V_n a}{x_n} = \underline{307,8245 \text{ ms}^{-1}}$

$$\text{t.q } \frac{\delta c_a}{c_a} = \sqrt{\left(\frac{\delta V_n}{V_n}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_n}{x_n}\right)^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-6} > \left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)_{\text{max}} \approx 0,64 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \underline{c_a = 307,8246 \pm 0,0006 \text{ ms}^{-1}}$$

II.B.7) Or $\frac{8k_B}{k_B} = \sqrt{\left(\frac{5M}{M_1}\right)^2 + \left(\frac{25Ca}{Ca}\right)^2 + \left(\frac{5Na}{Na}\right)^2 + \left(\frac{5T}{T}\right)^2}$

$$= 3,9 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow k_B = \underbrace{(1,380649 \pm 0,000006)}_{7 \text{ chiffres significatifs}} 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

III Spectroscopie Laser

III.A.1) L'azote possède un doublet non liant t.q. AX_3E_1 (Gillespie)

$\Rightarrow$ Conformations pyramidales les plus stables en $x = b$.

$\Rightarrow$ en $x = 0$ conformation instable due à la forte répulsion des liaisons $N-H$ et du doublet non liant.

$\Rightarrow$ en $|x| > b$ $\epsilon_p \nearrow$ car on tend à casser les liaisons $N-H$.

III.A.2) Au pt triple de l'eau $k_B T = 0,024 \text{ eV} < V_0$, l'inversion est impossible en mécanique classique

- Pour l'inversion il faut $k_B T_{\min} = V_0 \Leftrightarrow T_{\min} = 2900 \text{ K}$, pourtant on observe des inversions à des températures basses $\Rightarrow$ description en mécanique quantique.

III.B.1) Soit $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$ avec $\Psi = \underbrace{\varphi}_{f} e^{-it\hbar}$

$$\Rightarrow i\hbar \left(-i\frac{t}{\hbar}\right) \varphi f = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' f + \varphi \varphi f$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \varphi = 0}$$

III.B.2) a) $\varphi_{\text{localisé}} \Rightarrow \int_D |\varphi|^2 dG = 1$

b) Il faut que le produit $V\varphi$ ne diverge pas $\varphi = 0$ en dehors des puits

$$\text{Continuité de } \varphi: \begin{cases} \varphi_A(-x_0 - \epsilon) = \varphi_A(-x_0) = 0 \\ \varphi_B(x_0) = \varphi_B(x_0 + \epsilon) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{c} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_0+l} |\psi_B|^2 dx = 1 \\ \text{et} \\ \int_{-x_0-l}^{-x_0} |\psi_A|^2 dx = 1 \end{array} \right.$$

M.B.3) $\textcircled{a}$ Particule libre : $\psi'' + k^2 \psi = 0$ où $k^2 = \frac{2mt}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \psi_A = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \textcircled{3}$$

avec $\begin{cases} \psi(-x_0-l) = 0 \\ \psi(-x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A e^{-ik(x_0+l)} + B e^{ik(x_0+l)} = 0 \quad \textcircled{1} \\ A e^{-ikx_0} + B e^{ikx_0} = 0 \quad \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow A = -B e^{2ikx_0} \quad \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ s'écr : $B e^{ikx_0} [-e^{-ikl} + e^{ikl}] \Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow \underline{k_n = \frac{n\pi}{l}}$

D'où $\textcircled{3}$: $\psi_A = -B e^{2ikx_0} e^{ikx} + B e^{-ikx}$
 $= B e^{ikx_0} [-e^{ik(x+x_0)} + e^{-ik(x+x_0)}]$
 $= B e^{ikx_0} \times 2i \times \sin(-k(x+x_0))$
 $= -2i B e^{ikx_0} \sin(k(x+x_0))$

Notons $\underline{\psi_A(x) = B_A \sin k(x+x_0)}$

or $\int_{-x_0-l}^{-x_0} |\psi_A|^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{l B_A^2}{2} = 1$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} \psi_{A,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_n(x+x_0)) \\ \text{et} \\ E_n^A = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m l^2} \end{array} \right.$

$\textcircled{b}$ De $\hat{m}$: $\left\{ \begin{array}{l} \psi_{B,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin k_n(x-x_0) \\ \text{et} \\ E_n^B = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m l^2} \end{array} \right.$

③ ψ_A est non nul si $x \in]-x_0-l; -x_0[\Rightarrow \underline{P_{x_0, x_0+l}^A = 0 \quad \forall t}$

$\Rightarrow$ de double puits infini ne peut expliquer l'inversion de l'ammoniac.

III.B.4) Vu la symétrie du problème notons :

$$\psi_B(x) = A \cos k(x-x_0-l) + B \sin k(x-x_0-l)$$

$$\alpha \begin{cases} \psi_B(x_0) = 0 \\ \psi_B(x_0+l) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cos kl - B \sin kl = 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\psi_B(x) = B \sin k(x-x_0-l)}$$

III.B.5) a) l'équation de Schrödinger s'écrit : $\psi'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}_{<0} \psi = 0$

Poseons $K^2 = -\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \Rightarrow \underline{K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}$

⑥ Si $V(x)$ est borné alors ψ et ψ' sont continues d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_B(x_0) = \psi_C(x_0) \text{ et } \psi'_B(x_0) = \psi'_C(x_0) \\ \text{et} \\ \psi_A(-x_0) = \psi_C(-x_0) \text{ et } \psi'_A(-x_0) = \psi'_C(-x_0) \end{array} \right.$$

III.B.6) a) Si la fonction d'onde est $\psi_C(x) = \psi(x, 0)$ alors.

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_1^{\text{sym}}(x) e^{-i\epsilon_1^{\text{sym}} t/\hbar} + \psi_1^{\text{anti}}(x) e^{-i\epsilon_1^{\text{anti}} t/\hbar} \right]$$

⑥ Seul la densité de probabilité a un sens physique. Or $|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2$

$\Rightarrow \psi_2 = \psi_1 e^{i\alpha}$ représente le même état physique.

⑦ Soit $|\psi|^2 = \psi\psi^* = \frac{1}{2} \left[|\psi_1^{\text{sym}}|^2 + |\psi_1^{\text{anti}}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\psi_1^{\text{sym}} \psi_1^{\text{anti}*} e^{-i(\epsilon_1^{\text{sym}} - \epsilon_1^{\text{anti}})t/\hbar}) \right]$

$$\Rightarrow |\psi|^2 = \frac{1}{2} \left[|\psi_1^{\text{sym}}|^2 + |\psi_1^{\text{anti}}|^2 + 2 \psi_1^{\text{sym}} \psi_1^{\text{anti}} \cos(\delta\epsilon t/\hbar) \right]$$

Ainsi la densité $|\psi|^2$ oscille à la fréquence f t.q $\delta\epsilon \frac{t}{\hbar} = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\delta\epsilon}{\hbar} \Rightarrow \underline{f = \frac{\delta\epsilon}{2\pi\hbar}}$

$$\text{Donc } f = \frac{\delta E}{h} = \underline{23,8 \text{ GHz}}$$

$$\textcircled{d}. \text{ Soit } \psi(x, \frac{G}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{E_1^{\text{sym}} G}{2\hbar}} \left[\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x) e^{-i \delta E G / 2\hbar} \right]$$

$$\text{or } e^{-i \delta E G / 2\hbar} = e^{-i\pi} = -1$$

$$\Rightarrow \psi(x, \frac{G}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{E_1^{\text{sym}} G}{2\hbar}} \left[\varphi_1^{\text{sym}}(x) - \varphi_1^{\text{anti}}(x) \right]$$

$\varphi_1(x)$ d'après figure 12.

. la molécule dont l'énergie est inférieure à la barrière de potentiel est passée d'un puits à l'autre par effet tunnel ce qui lui serait interdit en mécanique classique

$$\textcircled{e}. \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} \delta E = \frac{4\pi^2 \hbar^3}{m l^3} e^{\left(-2x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar \right)} \\ \text{et } f = \frac{\delta E}{2\hbar\pi} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{e^{-10x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2mV_0}} \cdot \frac{\sqrt{2mV_0}}{e^{-2x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e^{-10x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}}{e^{-1 \cdot x_0 \sqrt{2mV_0} / \hbar}}$$

$$\Rightarrow f' = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ Hz} \quad \text{d'où } \frac{G'}{2} = 55 \text{ jours}$$

d'inversion est peu probable (car très lente)

$$\text{Th.C.7) Soit } \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E} / \partial t = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E} / \partial t \end{array} \right.$$

$$\text{or } \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\vec{\Delta} \vec{E} + \text{grad}(\text{div } \vec{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{or } \vec{E}(x, t) = \vec{e}_x e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow -k^2 = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) + \mu_0 \delta i\omega$$

$$\Rightarrow \underline{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \omega \delta}$$

M.C.2) (a) Soit $\underline{k} = k_r - ik_i$
 $\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k_i x} e^{i(\omega t - k_r x)} \vec{e}_y$

Or x croît donc pour éviter une amplification il faut $k_i > 0$.

(b) On a $I = \langle \vec{\Pi} \rangle$
 où $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \left(i \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \frac{i \vec{k}}{\mu_0 \omega} E^2$ car OPPH.
 donc I est proportionnel à E^2 c'est-à-dire à $e^{-2k_i x}$
 $\Rightarrow I(L) = I_0 e^{-\alpha L}$ où $\alpha = 2k_i$

M.C.3) (a) Soit $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 10,354204 \mu\text{m}$
 et $E_\gamma = h\nu_0 = 0,12 \text{ eV}$

(b) L'énergie du niveau excité est définie à $8E$ près donc celle du photon permettant la transition sera définie de la même façon d'où :

$$\Delta E = \frac{8E}{h} = 4,8 \text{ MHz}$$

M.C.4) (a) Soit $\phi = \omega t - kx = \omega_0 \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = 2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) = \phi$

(b) De plus $x' = (\vec{O'O} + \vec{OO'}) \cdot \vec{u}_x = x - v_x t$.

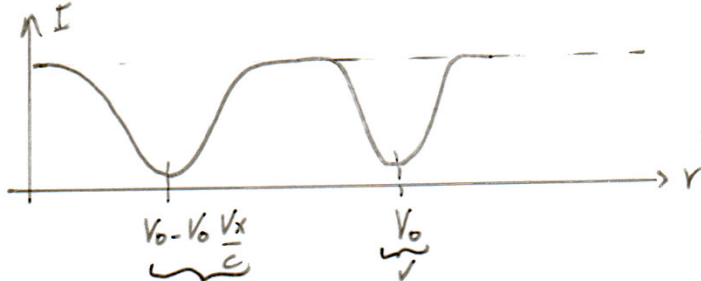
Donc ϕ peut s'écrire dans R' : $\phi = 2\pi \nu' \left(t - \frac{x'}{c} \right)$
 $= 2\pi \nu' \left[t - \frac{x}{c} + \frac{v_x t}{c} \right]$
 $= 2\pi \nu' \left[t \left(1 + \frac{v_x}{c} \right) - \frac{x}{c} \right]$
 $= 2\pi \nu' \left(1 + \frac{v_x}{c} \right) \left[t - \frac{x/c}{1 + v_x/c} \right]$

or $\frac{v_x}{c} \ll 1$ d'où : $\nu = \nu' \left(1 + \frac{v_x}{c} \right)$

$$\Rightarrow \nu' \approx \nu \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) \text{ ou } v_x = c \frac{\nu - \nu'}{\nu}$$

- L'effet Doppler Fizeau est utilisé en astronomie pour mesurer la vitesse radiale des étoiles ou galaxies.

③ le spectre va être identique mais décalé t.q $\Delta r = r' - r = -r \frac{v_x}{c}$



M.C.5) Soit $n_x = c \frac{v - v'}{v} = c \frac{v_0 - v}{v_0}$ d'où $dv_x = c \frac{dv}{v_0}$

$$\Rightarrow dP(v, v_0) = \frac{ck_B}{v} e^{-\frac{mc^2(v_0 - v)^2}{2k_B T v_0^2}} dv = \frac{\delta m}{m_0}$$

M.C.6) (a) A cause de l'agitation thermique, il y a élargissement de la raie naturelle (au repos) par effet Doppler.

(b) D'après l'énoncé si $f = e^{-(u-u_0)^2/2a^2}$ alors $\Delta u = 2a$

$$\text{d'où : } \Delta r = 2 \times \frac{\sqrt{k_B T}}{\sqrt{m_a}} \frac{v_0}{c} \Leftrightarrow \Delta r = 2 \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m_a}} = 2,4 \cdot 10^{-6} v_0$$

③ $\Rightarrow \Delta r = 70,6 \text{ MHz}$

$$\text{Or } k_B = \frac{c^2 (\Delta r)^2}{v_0^2} \cdot \frac{m_a}{T} \times \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\delta m_a}{m_a}\right)^2}_{2,9 \cdot 10^5} + 4 \underbrace{\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2}_{0,14} + 4 \underbrace{\left(\frac{\delta v_0}{v_0}\right)^2}_{1,8 \cdot 10^{-5}} + \underbrace{\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}_{1,8 \cdot 10^{-5}} + 4 \underbrace{\left(\frac{\delta c}{c}\right)^2}_{1,8 \cdot 10^{-5}}}$$

$\Rightarrow \frac{\delta k_B}{k_B} \approx 2 \frac{\delta \Delta r}{r} = 0,14$, on ne peut pas négliger cette dernière car elle empêche d'obtenir la précision voulue.