

Physique : DS3

Mesures de champs magnétiques (Mines PSI - 2016)

I - La balance de Cotton

1°) Il y a deux forces présentes le poids et la réaction de l'axe en O a'vide, d'où à l'équilibre :

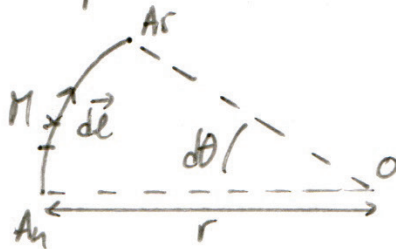
$$\vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{OG} \text{ colinéaire à } \vec{u}_z \text{ donc G est sur la verticale de O}}$$

2°) Soit $d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Intéressons-nous aux parties en arc de cercle.



$$\Rightarrow d\vec{F}_L (A_n A_r) = -i r d\theta \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z = -i B r d\theta \vec{u}_r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{M}_O(d\vec{F}_L) &= \vec{OA}_r \wedge d\vec{F}_L \\ &= r \vec{u}_r \wedge dF_L \vec{u}_r \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ le moment des forces sur les parties en arc de cercle $(A_n A_r)$ et $(A_n A_s)$ est nul

3°) Soit $d\vec{M}_O = \vec{OA}_r \wedge d\vec{F}_L = r \vec{u}_r \wedge [i d\vec{l} \wedge \vec{B}]$

$$\begin{aligned} \text{Sur le tronçon } A_3 A_4 \text{ on a donc : } d\vec{M}_O &= r \vec{u}_r \wedge [i dr \vec{u}_r \wedge B \vec{u}_z] \\ &= r \vec{u}_r \wedge i B dr \vec{u}_\theta \\ &= i B r dr \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{M}_0 = iB \int_{d_1 - l/2}^{d_1 + l/2} \Omega dr \vec{u}_z = iB \left[\frac{(d_1 + l/2)^2}{2} - \frac{(d_1 - l/2)^2}{2} \right] \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0(\vec{F}_L) = iB d_1 l \vec{u}_z$$

À l'équilibre on a : $\|\vec{M}_0(\vec{F}_L)\| = \|\vec{M}_0(\vec{P})\|$

$$\Leftrightarrow iB d_1 l = mg d_2$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{mg d_2}{i l d_1}$$

4°) Soit $\delta B = 5 \text{ m.} \frac{g d_2}{i l d_1} \approx \underline{\underline{1 \text{ mT}}}$

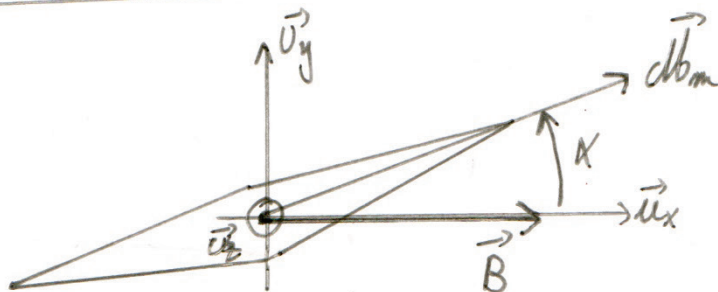
Cette balance est donc utilisable pour mesurer :

- le champ magnétique d'aimant permanent $\approx 100 \text{ mT}$.
- _____ d'une bobine de TP $\approx 1 \text{ T}$
- _____ " de bobine supraconductrice $\approx 10 \text{ T}$.

Mais inutilisable pour le champ magnétique terrestre $\approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ mT}$

② Utilisation d'une boussole

5°)



$$\text{Soit } J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{u}_z = \vec{I'} \text{ où } \vec{I'} = \vec{dl}_m \wedge \vec{B} = -dl_m B \sin \alpha \vec{u}_z = \vec{I'}$$

$$\Rightarrow J \ddot{\alpha} + dl_m B \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + KB \alpha = 0 \text{ où } K = dl_m / J$$

Donc : $\alpha = \alpha_0 \cos(\sqrt{kB} t)$

6°) Le champ créé par un fil infini est de la forme $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$, par sa dimension le résultat a retenu est :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{réponse (a)}$$

$$\begin{aligned} 7^\circ) \text{ Soit } \vec{B}(x) &= N\vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{x}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{x}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \\ &\stackrel{D.L.}{\approx} \frac{8}{5\sqrt{5}} N\vec{B}_0 \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{x}{R} - \frac{32}{25} \left(\frac{x}{R} \right)^3 \ominus \frac{144}{125} \left(\frac{x}{R} \right)^4 + o(x^4) \right. \\ &\quad \left. + 1 \ominus - \oplus - \ominus - \oplus + o(x^4) \right\} \\ &= \frac{8}{5\sqrt{5}} N\vec{B}_0 \left\{ 2 - \frac{288}{125} \left(\frac{x}{R} \right)^4 + o(x^4) \right\} \approx \underbrace{\frac{16}{5\sqrt{5}} N\vec{B}_0}_{\vec{B}(0)} \left\{ 1 - \frac{144}{125} \left(\frac{x}{R} \right)^4 \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent $\left| \frac{B(x) - B(0)}{B_0} \right| = \left| \frac{144}{125} \left(\frac{x}{R} \right)^4 \right| < 0,02$

$$\Leftrightarrow |x| < R \times \left(\frac{0,02 \times 125}{144} \right)^{1/4}$$

$$\Leftrightarrow |x| < 0,36 R$$

$$\Leftrightarrow \underline{|x| < 5,4 \text{ cm}}$$

$$\text{Et } B(0) = \frac{16}{5\sqrt{5}} N B_0 = \frac{16}{5\sqrt{5}} N \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} \Leftrightarrow B(0) = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{R} = \underline{\underline{1,2 \text{ mT}}}$$

$$8^\circ) \text{ Soit } T = \frac{2\pi}{\sqrt{kB}} \Leftrightarrow k = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{1}{B} \text{ donc } k \text{ s'exprime en } s^{-2} \cdot T^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K = 3,7 \cdot 10^5 s^{-2} T^{-1}}}$$

10°) L'axe de rotation de la boussole est vertical, si bien que l'on doit considérer seulement B_θ dans les calculs.

$$\Rightarrow |B_\theta| = \frac{4\pi^2}{T^2 k}$$

$$\Rightarrow |B_\theta \cos i| = \frac{4\pi^2}{T^2 k}$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{4\pi^2}{T^2 k \cos i} = \underline{\underline{4,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}}}$$

$$\bullet \text{ Or } M_T = \frac{B_0 \cdot 4\pi R_T^3}{\mu_0 \sin \theta} = \frac{4\pi^2}{T^2 k} \times \frac{4\pi R_T^3}{\mu_0 \sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow M_T = \frac{16\pi^3 R_T^3}{k T^2 \mu_0 \sin \theta} = \underline{\underline{7,5 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2}}$$

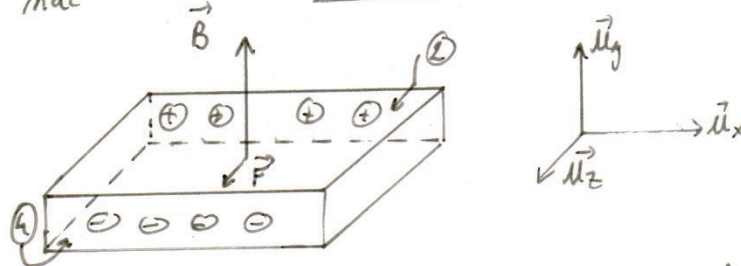
III) Utilisation d'une sonde à effet Hall

11°) Soit $I_0 = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j a c$ et $\vec{j} = -e n \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = - \frac{I_0}{e n a c} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \underline{\underline{3,2 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}}}$$

12°) Soit $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$= \frac{I B}{n a c} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \Rightarrow \vec{F} = \frac{I_0 B}{n a c} \vec{u}_z$$



- des e^- amènent une densité de charges surfaciques negative sur la face 4
- le conducteur étant neutre il se forme une densité positive sur la face 2

13°) En appliquant le PFD en régime permanent :

$$-e\vec{E}_H + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{E_H = \frac{I_0 B}{meac}}$$

$$\text{Or } \vec{E}_H = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{I_0 B}{meac} = -\frac{dV}{dz}$$

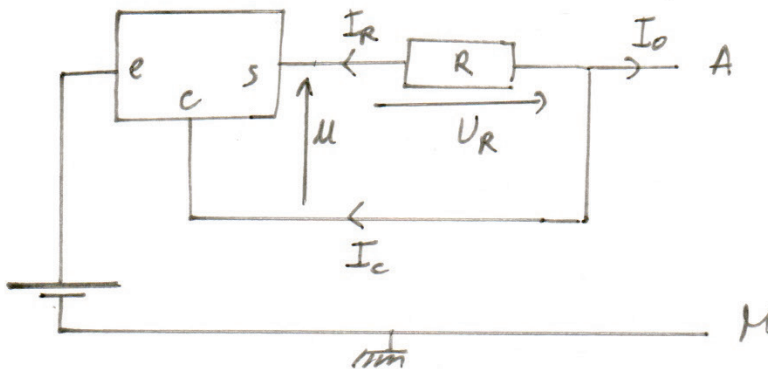
$$\Rightarrow V = -\frac{I_0 B}{meac} z + \text{cte}$$

$$\text{D'où } \mu_H = V_1 - V_2 = -\frac{I_0 B}{meac} (\overbrace{z_1 - z_2}^a)$$

$$\Rightarrow \mu_H = -\frac{I_0 B}{mec}$$

$$\Rightarrow \underline{\mu_H = \gamma B \text{ où } \gamma = -\frac{I_0}{mec} = -95 \text{ V.T}^{-1}}$$

14°)



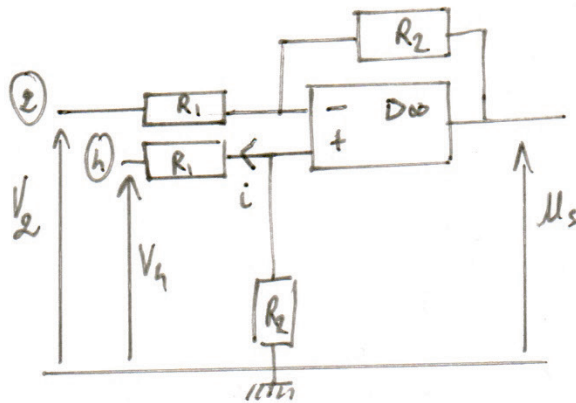
$$\text{Soit } \begin{cases} I_0 = -I_R - I_c & \textcircled{1} \\ \mu + \mu_R = 0 \Rightarrow \mu + RI_R = 0 \Rightarrow I_R = -\frac{\mu}{R} & \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{R = \frac{\mu}{I_0 + I_c} = 500 \Omega}$$

15°) Le montage ⑤ permet d'alimenter la plaquette semi-conductrice. Or d'après l'énoncé

le courant I_0 est orienté de la face 1 à 3 $\Rightarrow \begin{cases} A = \text{face 3} \\ M = \text{face 1} \end{cases}$

Or la figure 6 est t.q : $e^+ = \text{face 4}$ et $M = \text{face 2}$ $\Rightarrow$ les faces 1 et 2 sont reliées toutes les deux à la masse

16°). Cette fois la face 2 n'est plus à la masse $\Rightarrow$ problème résolu.



. Diviseur de tension en V_+ : $V_+ = V_4 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1}$

. Loi des mailles en V_- : $(V_- - V_2)/R_1 + (V_- - M_s)/R_2 = 0$

$$\Leftrightarrow V_- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = M_s/R_2 + V_2/R_1$$

$$\Leftrightarrow V_- = \frac{M_s R_1 + V_2 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{Or } V_- = V_+ \Rightarrow V_4 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1} = \frac{M_s R_1 + V_2 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow (V_4 - V_2) R_2 = M_s R_1 \Rightarrow \underline{M_s = M_h \frac{R_2}{R_1}}$$

Il faut $\frac{R_2}{R_1} > 1$ pour que M_h soit amplifié

$$17^\circ) \text{ Soit } V_4 = (R_2 + R_1) i \Rightarrow \frac{V_4}{i} = R_1 + R_2$$

$$\Rightarrow \underline{R_e = R_1 + R_2}$$

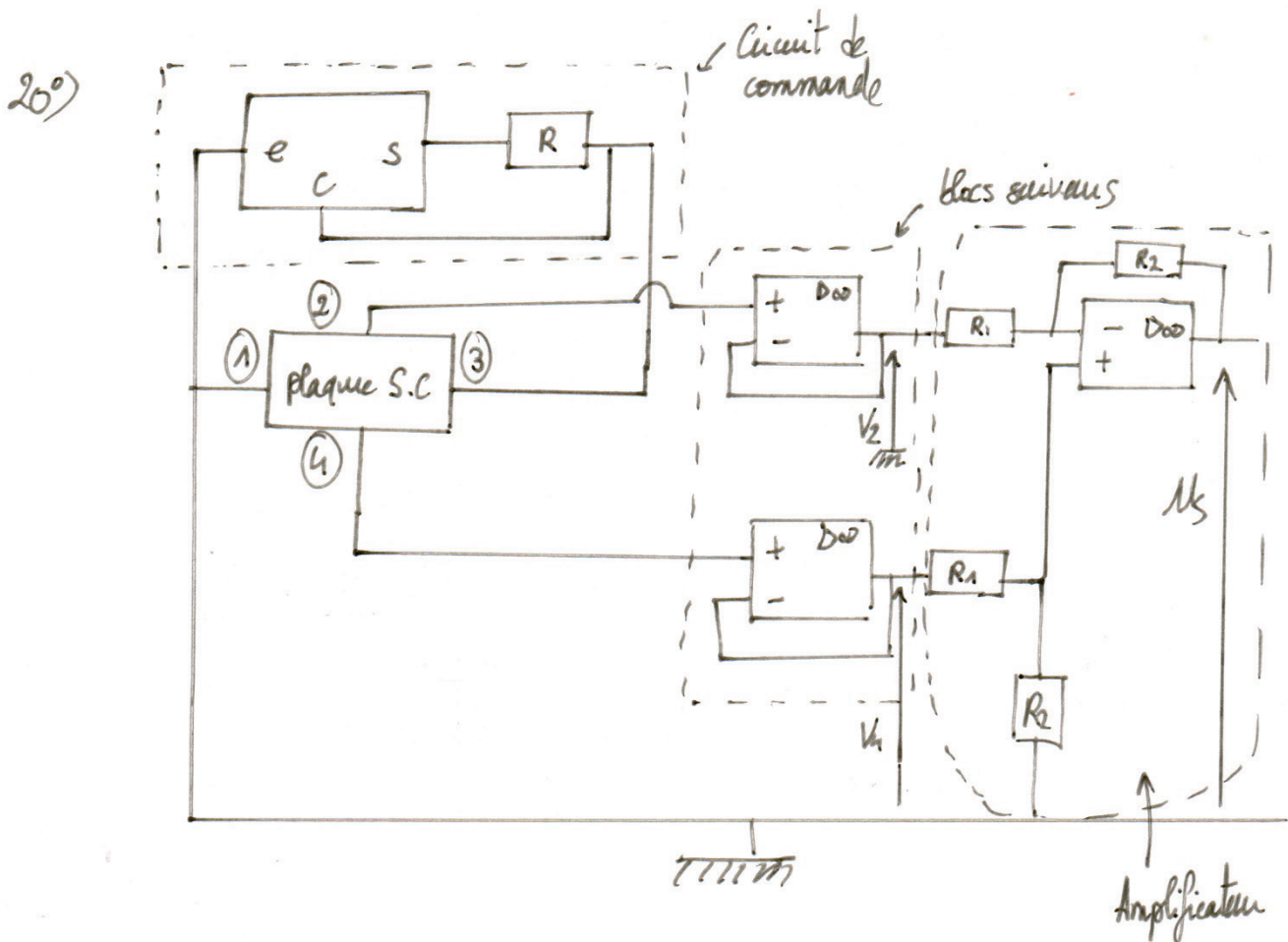
On a : $i = \frac{V_h}{R_1 + R_2}$ avec des résistances classiques i sera non négligeable et il risque de perturber le fonctionnement du système.

18°) Soit
$$\begin{cases} V_- = \frac{R}{R+R'} M_s \\ V_+ = M_e \end{cases}$$

Or $V_+ = V_- \Rightarrow M_s = \frac{R+R'}{R} M_e$

$$\Rightarrow M_s = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) M_e$$

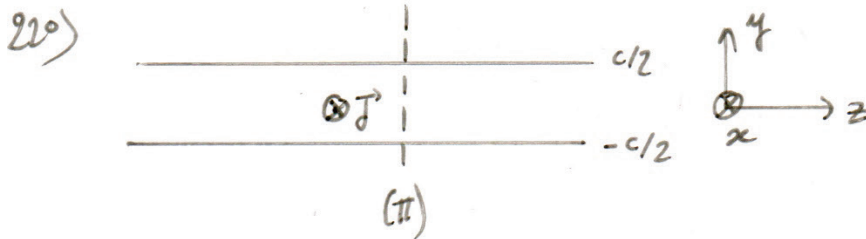
19°) On souhaite avoir une adaptation d'impédance. Cette fois $i = i_+ = 0$, on n'a plus le soucis de perturbation de la mesure. On peut choisir $\begin{cases} R \rightarrow \infty \\ R' \rightarrow 0 \end{cases}$ afin de retomber sur un montage suiveur t. q $M_s = M_e$.



$$21^{\circ}) \text{ Soit } \underbrace{V_1 - V_2}_{U_g} = \frac{R_1}{R_2} U_S \Leftrightarrow U_h = \frac{R_1}{R_2} U_S = \gamma B.$$

$$\Rightarrow B = \frac{R_1}{R_2} \frac{U_S}{\gamma} = -21 \mu T$$

D'où $|B| = 21 \mu T$ on reconnaît la valeur de B_h (terrestre)



$$\left. \begin{array}{l} \text{(Pi) est un plan de symétrie donc } \vec{B} = B \vec{u}_z \\ \text{Invariance suivant } (O_x) \text{ et } (O_z) \Rightarrow B = B(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\vec{B} = B(y) \vec{u}_z}$$

$$\text{Or rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & B(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 j \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} B = \mu_0 j \quad (1)$$

$$\text{or } I_0 = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j ac. \Leftrightarrow j = \frac{I_0}{ac} \quad (2) \text{ (question 11)}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \underline{\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\mu_0 I_0}{ac}}$$

$$\text{Donc } B = \frac{\mu_0 I_0 y}{ac} + \text{cste} \text{ or } (xOz) \text{ est plan de symétrie} \Rightarrow B(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I_0 y}{ac} \vec{u}_z \text{ pour } -c/2 \leq y \leq c/2}$$

$$\text{d'où } B_{\max} = B_0 \left(\pm \frac{C}{2} \right)$$

$$\Rightarrow B_{\max} = \frac{I_0 \mu_0}{2a} = \underline{\underline{2,1 \mu T}}$$

On ne peut pas négliger cette contribution dans les calculs de champ magnétique

terrestre : $\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{terrestre}} \neq \vec{B}_{\text{terrestre}}$

(IV) Utilisation de la magnéto-résistance

23°) Il y a invariance { par rotation autour de Oz
— translation suivant Oz

$$\Rightarrow \underline{V(r, \theta, z) = V(r)}$$

Il n'y a pas de charges volumiques d'où $\Delta V = 0$ (Laplace)

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$\Rightarrow r \frac{dV}{dr} = C_1$$

$$\Rightarrow V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$\text{or } \begin{cases} V(r_1) = V_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \\ V(r_2) = V_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 - V_2 = C_1 \ln r_1 / r_2 \Rightarrow C_1 = (V_1 - V_2) / \ln(r_1 / r_2) \\ C_2 = V_2 - C_1 \ln r_2 \Rightarrow C_2 = V_2 - \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1 / r_2)} \ln r_2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } V(r) = \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1 / r_2)} \ln r + V_2 - \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1 / r_2)} \ln r_2$$

$$\text{Donc } V(r) = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln(r/r_2) \quad \text{ou} \quad V_1 + \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_1}$$

Calculons $\vec{E}$:

$$\text{Soit } \vec{E} = - \frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

$$24^o) \text{ En régime permanent: } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \lambda \vec{v} - e\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -e \begin{vmatrix} E_r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -e E_r - \lambda v_r - e B v_\theta = 0 \\ -\lambda v_\theta + e B v_r = 0 \\ \boxed{v_z = 0} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda v_r = -e B v_\theta - e E_r \\ \lambda v_\theta = e B \left[\frac{-e B v_\theta - e E_r}{\lambda} \right] \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1): v_\theta (1 + e^2 B^2 / \lambda^2) = -e^2 B / \lambda^2 E \\ (2): v_r = -\frac{e E}{\lambda} - \frac{e B}{\lambda} \left(\frac{-e^2 B E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \right) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} v_\theta = \frac{-e^2 B E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_r = \frac{-e E (\lambda^2 + e^2 B^2) + e^2 B^2 E}{\lambda (\lambda^2 + e^2 B^2)} \end{cases}$$

$$\text{D'où: } \begin{cases} v_r = \frac{-\lambda e E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_\theta = \frac{-e^2 B E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \frac{m e^2 dE}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ \theta = \frac{m e^2 B E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 25^{\circ}) \text{ soit } I(r) &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint j_r \cdot dS_r = \iint j_r \cdot r d\theta dz \\
 &= 2\pi r h \cdot \frac{me^2 \lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \times \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \times \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(r) = \frac{2\pi h \cdot me^2 \lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \cdot \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\text{or } R = \left| \frac{V_1 - V_2}{I} \right| \Rightarrow R = \frac{(\lambda^2 + e^2 B^2) (\ln(r_2/r_1))}{2\pi h me^2 \lambda}$$

$$\text{De plus } R_0 = R(B=0) = \frac{\lambda^2 \ln(r_2/r_1)}{2\pi h me^2 \lambda}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \left| \frac{R - R_0}{R_0} \right| = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}$$

$$\text{A.N. : } \begin{cases} \mathcal{E} = 7,9 \cdot 10^{-4} \\ R_0 = 112 \Omega \end{cases}$$

la variation relative de R est infime (si $B = 1\text{T}$, $\mathcal{E} = 7,9 \cdot 10^{-5}$). Pour des champs de l'ordre de 10^{-5}T cette méthode ne semble pas adaptée.