

Physique : DS1

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie A – Etude d'une installation nucléaire REP

Ce sujet comporte un document réponse à rendre avec la copie. Les données numériques utiles sont fournies en fin d'énoncé.

La France compte 19 centrales nucléaires en exploitation, dans lesquelles tous les réacteurs (58 au total) sont des réacteurs à eau pressurisée. Actuellement, ces installations produisent près de 80% de l'électricité produite en France. Chaque centrale est soumise à un référentiel de normes de sûreté et de sécurité évoluant en fonction des enseignements des incidents passés nationaux ou internationaux.

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects liés au fonctionnement d'une centrale nucléaire REP, ainsi que plusieurs dispositions prises en matière de sûreté nucléaire : contrôle des rejets de la centrale et surveillance sismique d'un site nucléaire.

I Circuit secondaire et enrichissement de l'uranium

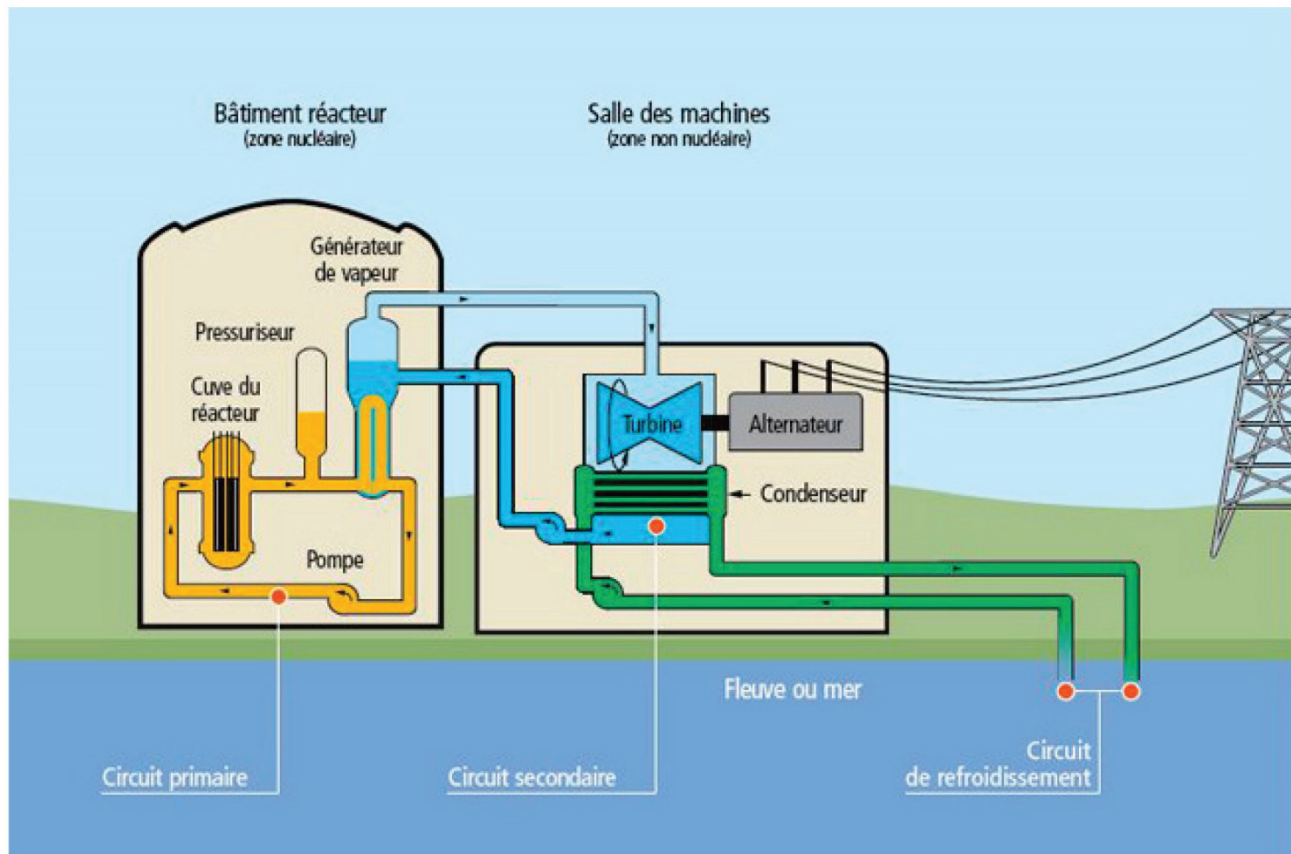


Figure 1 Schéma global d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir figure 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert

d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de 5000 m^2 (réseau de tubulures).

I.A – Description du circuit secondaire de la centrale

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique $P_e = 900 \text{ MW}$. Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau.

I.A.1) Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température T_{ch} et T_{fr} ($T_{\text{fr}} < T_{\text{ch}}$).

a) Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement de Carnot associé à ce cycle.

b) Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant $T_{\text{ch}} = 543 \text{ K}$ et $T_{\text{fr}} = 303 \text{ K}$, les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.

c) Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique $P_t = 2785 \text{ MW}$, que vaut le rendement thermodynamique réel de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

I.A.2) Cycle de Rankine

L'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la figure 2)

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55 \text{ bar}$ jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état B) ;
- de B à C : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression P_2 à la pression $P_1 = 43 \text{ mbar}$;
- en C , le fluide est diphasé ;
- de C à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

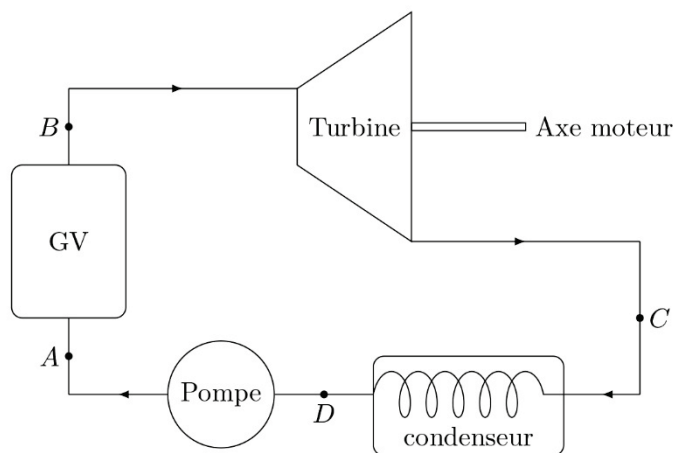


Figure 2 Cycle de Rankine

a) Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P, v) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes T_B , T_D et T_{critique} , cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points A , A' , B , C et D .

b) D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points A' , B et D ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.

c) Dans le document réponse figure le diagramme enthalpique (P, h) de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points A' , B , C , D du cycle. On explicitera la méthode.

d) Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques. Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q .

e) Exprimer le travail massique w_{BC} reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique, en s'aidant du diagramme enthalpique.

- f) Exprimer le transfert thermique massique $q_{AA'}$ reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température T_A à la température $T_{A'}$ dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique : on considérera $T_A \approx T_D$.
- g) Exprimer le transfert thermique massique $q_{A'B}$ reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.
- h) Calculer alors le rendement de Rankine de l'installation. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.
- i) Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente de la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

I.A.3) Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir figure 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine « haute pression » puis dans une turbine « basse pression ». D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un « surchauffeur ». Les transformations sont maintenant modélisées par

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55$ bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B) ;
- de B à C' : détente adiabatique réversible dans la turbine « haute pression », de la pression P_2 à la pression $P_3 = 10$ bar ;
- de C' à B' : échauffement isobare à la pression P_3 , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B') ;
- de B' à C'' : détente adiabatique réversible dans la turbine « basse pression », de la pression P_3 à la pression $P_1 = 43$ mbar ;
- de C'' à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

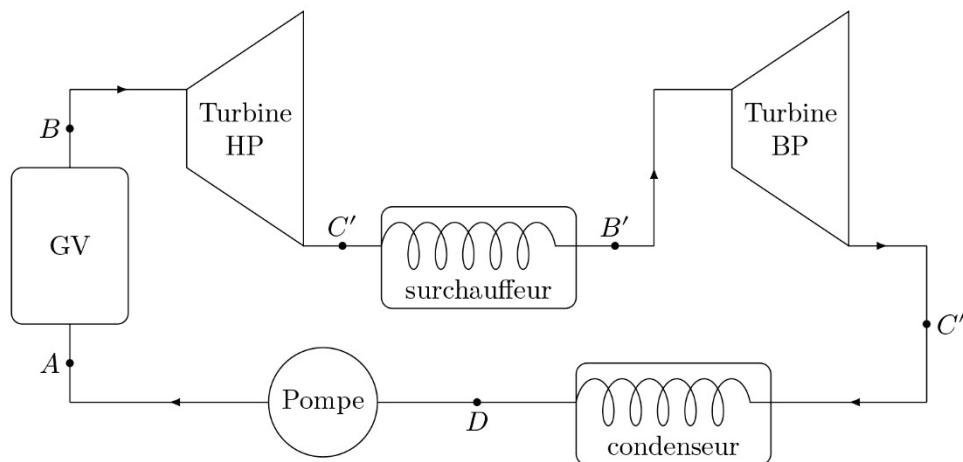


Figure 3 Cycle de Rankine avec une détente étagée

- a) Placer les nouveaux points C' , B' , C'' sur le diagramme enthalpique du document réponse.
- b) Comparer les titres massiques en vapeur des points C' et C'' au titre massique en vapeur du point C . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- c) À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer le nouveau rendement du cycle. Commenter.

Données

Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau

θ (°C)	P_{sat} (bar)	Liquide saturant			Vapeur saturante sèche		
		v_l (m ³ ·kg ⁻¹)	h_l (kJ·kg ⁻¹)	s_l (J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)	v_v (m ³ ·kg ⁻¹)	h_v (kJ·kg ⁻¹)	s_v (J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,03505	2788,46	5,9226

θ température

s_l entropie massique du liquide saturant

P_{sat} pression de vapeur saturante

v_v volume massique de la vapeur saturante sèche

v_l volume massique du liquide saturant

h_v enthalpie massique de la vapeur saturante sèche

h_l enthalpie massique du liquide saturant

s_v entropie massique de la vapeur saturante sèche

Capacité thermique massique isobare de l'eau

$$c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Potentiels standard d'oxydo-réduction (à 25 °C)

$$E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,00 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

Masses atomiques

Atome	F	²³⁵ U	²³⁸ U
Masses atomiques (u)	19,0	235,0	238,0

Constantes diverses

Unité de masse atomique unifiée

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$F = 96500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$$

On prendra

$$0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$$

Formulaire

Expression du gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Partie B – Cycle de Claude

Les calculatrices sont autorisées

La découverte du boson de Higgs au CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) n'aurait jamais été possible sans les installations frigorifiques perfectionnées nécessaires pour refroidir en particulier les aimants supraconducteurs du LHC (Large Hadron Collider).

Ce problème propose dans une première partie d'étudier, en la simplifiant largement, une installation de liquéfaction de l'hélium à la température de 4,2 K.

Est abordée dans une deuxième partie la modélisation d'un échangeur de chaleur dont le but est d'assurer à l'hélium liquide de rester à la température nécessaire au refroidissement des aimants supraconducteurs.

Dans une troisième partie, est abordé de manière succincte l'écoulement de l'hélium dans une ligne de distribution cryogénique.

La quatrième partie permet d'étudier un procédé de refroidissement de l'hélium liquide permettant de le faire passer de la température de 4,2 K à la température de 1,9 K.

Une cinquième et dernière partie se propose d'étudier différents procédés de mesure et de contrôle des paramètres température, pression, débit volumique et hauteur du bain d'hélium liquide.

Les différentes parties sont indépendantes les unes des autres.
L'annexe en page X regroupe les principales données.

A – Etude du cycle de Claude pour la liquéfaction de l'hélium.

A.1. Bilan énergétique d'un système en écoulement.

Un fluide s'écoule en passant de l'état thermodynamique ① à l'état thermodynamique ② en traversant une machine thermique où il échange du travail et de la chaleur. L'écoulement est considéré comme permanent (figure 1).

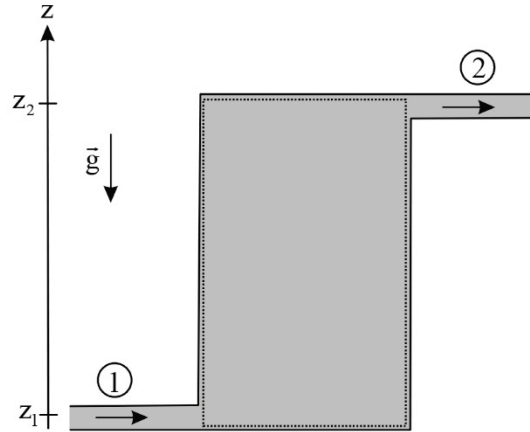


Figure 1 : système en écoulement

Pour une masse dm de fluide circulant entre l'état ① et l'état ②, le bilan énergétique appliqué à cette masse s'écrit :

$$dm \left[\left(h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + gz_2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + gz_1 \right) \right] = \delta W_u + \delta Q$$

A.1.1. Préciser la signification de chaque terme de la relation précédente.

A.1.2. Réécrire ce bilan énergétique en faisant apparaître les puissances et le débit massique D_m du fluide.

A.2. Cycle de Claude.

On souhaite refroidir de l'hélium selon un cycle de Claude. Dans ce cycle, on pré-refroidit l'hélium avant de le liquéfier partiellement en lui faisant subir une détente de Joule-Thomson. Le principe de la machine thermique est représenté en figure 2, page 3.

On y distingue :

- le compresseur C où l'énergie est injectée pour comprimer l'hélium à température ambiante ;
- une boîte froide thermiquement isolée dans laquelle sont placés les différents échangeurs de chaleur E1 à E5 ainsi que le détendeur D. La boîte froide ne consomme pas d'énergie mais en rejette sous forme mécanique par l'intermédiaire des turbines T1 et T2.

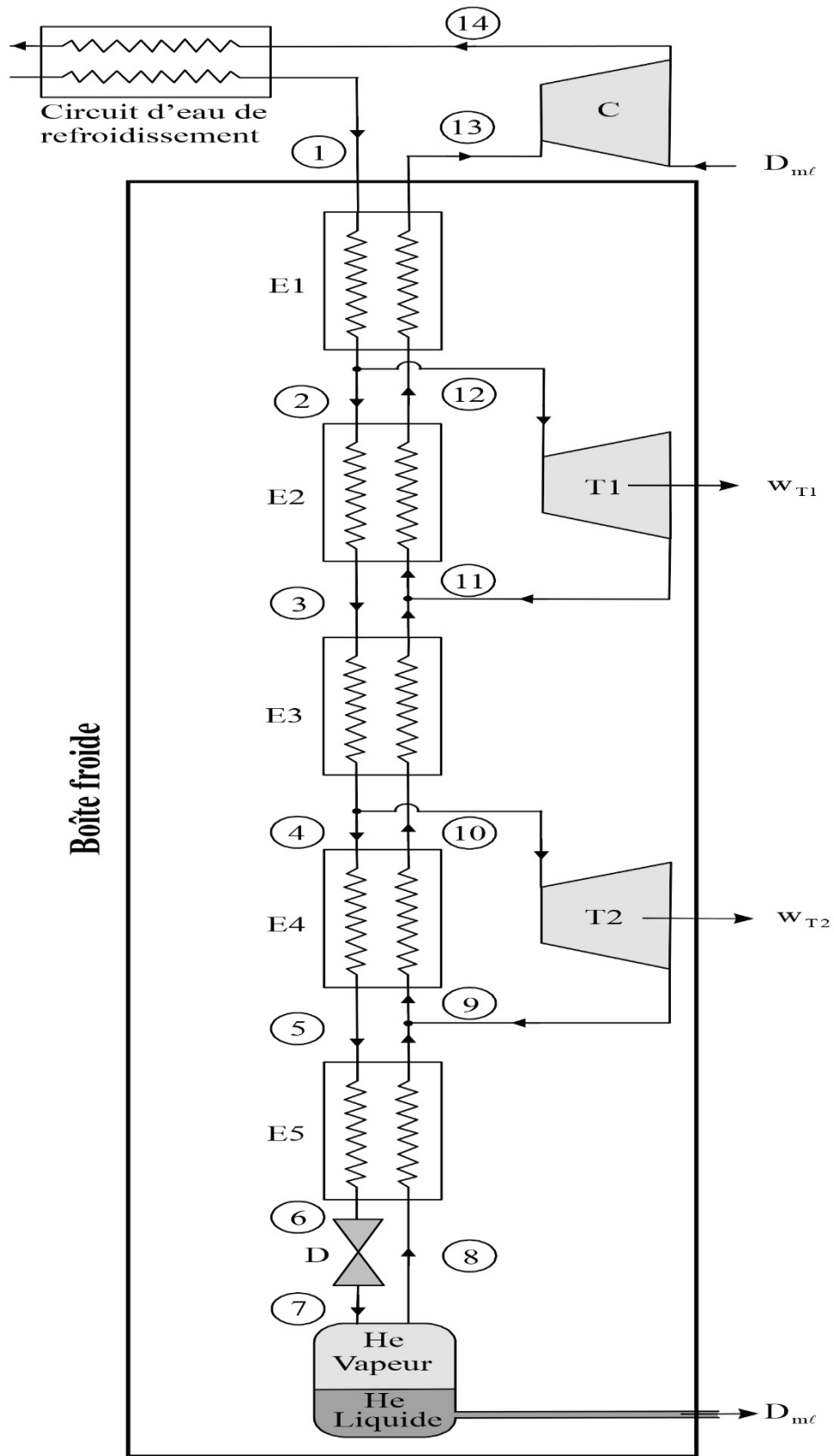


Figure 2 : cycle de Claude

Au repère ①, l'hélium gazeux entre à la pression $P_2 = 20$ bar et à la température T_1 avec le débit massique $D_m = 1\,600$ g.s⁻¹.

Une fraction massique x_1 du gaz en sortie de l'échangeur E1 est prélevée pour lui faire subir une détente dans la turbine T1. De même, une fraction massique x_2 du gaz sortant de l'échangeur E3 est prélevée pour lui faire subir une détente dans la turbine T2.

Les débits massiques aux repères ② et ④ sont donc respectivement :

$$D_{m2} = (1 - x_1)D_m \text{ et } D_{m4} = (1 - x_1)(1 - x_2)D_m.$$

Le gaz sortant de l'échangeur E5 passe dans le détendeur D où il subit une détente isenthalpique, amenant le fluide de la pression $P_2 = 20$ bar (repère ⑥) à la pression $P_1 = 1$ bar (repère ⑦).

L'hélium liquide formé avec un débit massique D_{ml} est prélevé en sortie.

Le gaz sortant du détendeur passe dans l'échangeur E5 (repère ⑧) pour refroidir le gaz circulant à contre-courant. Le gaz sortant de la turbine T2 se rajoute au gaz sortant de l'échangeur E5 (repère ⑨).

De même, le gaz sortant de la turbine T1 se rajoute au gaz sortant de l'échangeur E3 (repère ⑩).

Le compresseur C comprime le gaz de la pression $P_1 = 1$ bar à la pression $P_2 = 20$ bar. Un circuit d'eau de refroidissement permet alors de ramener le gaz à la température T_1 . On injecte la quantité de gaz nécessaire pour que le débit massique en ① soit à nouveau D_m .

Les écoulements dans les différents échangeurs de chaleur sont supposés isobares.

On notera :

- h_i l'enthalpie massique du fluide dans l'état thermodynamique n (i), correspondant sur la figure 2 au repère noté i ;
- h_{liq} et h_{vap} l'enthalpie massique de l'hélium liquide et vapeur à la pression P_1 ;
- \mathcal{P}_{T1} et \mathcal{P}_{T2} les puissances cédées par les gaz dans les turbines 1 et 2 respectivement. Ces puissances sont utilisées pour entraîner partiellement le compresseur.

On négligera systématiquement les variations d'énergie cinétique et potentielle de pesanteur.

Les soutirages et l'injection de fluide se font sans addition de puissance.

Les données relatives à l'hélium sont regroupées en annexe, page 15.

A.2.1. Donner l'expression du débit massique entrant dans le compresseur (repère ⑬) en fonction de D_m et D_{ml} .

A.2.2. En considérant les puissances entrantes et sortantes de la boîte froide, écrire une relation reliant les grandeurs D_m , D_{ml} , h_1 , h_{13} , h_{liq} , \mathcal{P}_{T1} et \mathcal{P}_{T2} .

A.2.3. Par un bilan énergétique sur la turbine T1, écrire une relation entre les variables x_1 , D_m , \mathcal{P}_{T1} , h_2 et h_{11} .

A.2.4. Par un bilan énergétique sur la turbine T2, écrire une relation entre les variables x_1 , x_2 , D_m , \mathcal{P}_{T2} , h_4 et h_9 .

On définit le taux de liquéfaction de la machine comme le rapport $y = \frac{D_{m\ell}}{D_m}$.

A.2.5. Montrer que $y = \frac{h_1 - h_{13} + x_1(h_{11} - h_2) + x_2(1 - x_1)(h_9 - h_4)}{h_{liq} - h_{13}}$.

A.2.6. En faisant un bilan énergétique sur le premier échangeur de chaleur E1, exprimer le débit massique $D_{m\ell}$ en fonction de D_m et des enthalpies massiques h_1 , h_2 , h_{12} et h_{13} .

En déduire la valeur du taux de liquéfaction. Faire l'application numérique.

A.2.7. En faisant un bilan énergétique sur le deuxième échangeur de chaleur, exprimer et calculer la fraction massique x_1 .

A.2.8. Par un raisonnement analogue, exprimer et calculer la fraction massique x_2 .

Vérifier que la relation établie en **A.2.5.** permet bien de retrouver la valeur de y calculée précédemment.

A.2.9. Relier le titre en liquide x_ℓ du mélange diphasé en sortie du détendeur aux grandeurs h_6 , h_{liq} et h_{vap} . En déduire une nouvelle expression du taux de liquéfaction et comparer avec celle calculée à la question **A.2.6.**

A.2.10. En déduire l'expression du débit volumique $D_{V\ell}$ de l'hélium liquide formé à la température de 4,2 K et calculer sa valeur que l'on exprimera en $L.s^{-1}$.

La puissance frigorifique équivalente $\mathcal{P}_{f,eq}$ est définie comme la puissance à prélever au gaz froid de débit massique $D_{m\ell}$ pour le liquéfier : $\mathcal{P}_{f,eq} = D_{m\ell}L_{vm}$ où L_{vm} représente la chaleur latente massique de vaporisation.

A.2.11. Calculer la puissance frigorifique équivalente pour l'hélium à la température de 4,2 K. On considère que les puissances \mathcal{P}_{T1} et \mathcal{P}_{T2} , que les gaz cèdent dans les turbines T1 et T2, sont intégralement récupérées par le compresseur.

A.2.12. Donner l'expression de la puissance mécanique \mathcal{P}_C qu'il reste à fournir au compresseur pour que celui-ci comprime effectivement le gaz de la pression P_1 à la pression P_2 .

A.2.13. En déduire la puissance à fournir à l'installation pour prélever une puissance frigorifique équivalente de 1 kW. Comparer le rendement de l'installation à celui du cycle idéal de Carnot fonctionnant entre les températures $T_F = 4,2$ K et $T_C = 280$ K.

Les installations du CERN sont capables quant à elles de produire plusieurs kilogrammes d'hélium liquide par seconde. Leur rendement par rapport au cycle de Carnot atteint 30 %, soit un des meilleurs rendements possibles actuellement.

ANNEXE

- **Masse molaire de l'hélium** : $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$
- **Constante des gaz parfaits** : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- **Viscosité dynamique de l'hélium à $T = 4,2 \text{ K}$** : $\eta = 3,6.10^{-6} \text{ Pa.s}$
- **Célérité du son dans l'hélium liquide à la température $T = 4,2 \text{ K}$** : $c = 178 \text{ m.s}^{-1}$

Données relatives à l'hélium à l'état diphasé

Température $T = 4,2\text{K}$	Masse volumique (kg.m^{-3})	Enthalpie (kJ.kg^{-1})
Liquide	125,4	9,90
Vapeur	16,49	30,74

Température $T = 1,9\text{K}$	Masse volumique (kg.m^{-3})	Enthalpie (kJ.kg^{-1})
Liquide	145,5	1,186
Vapeur	0,609	24,63

Données relatives à l'hélium à l'état gazeux

Etat	Pression (bar)	Température (K)	Enthalpie (kJ.kg^{-1})
1	20	280	1 476
2	20	200	1 060
3	20	100	540,3
4	20	50	277,4
5	20	20	110,5
6	20	7,15	29,3
7	1	4,2	
8	1	4,2	30,74
9	1	19,9	118
10	1	45,2	250
11	1	98,5	527,2
12	1	193	1 017,9
13	1	277	1 454,2
14	20	370	1 900

Fin de l'énoncé

Partie C : Décantation des boues résiduelles

L'assainissement des eaux usées dans une station d'épuration nécessite de débarrasser les effluents domestiques ou industriels des sables, graisses, déchets ménagers et agents polluants. On s'intéressera ici plus spécifiquement au pré-traitement et au traitement primaire des eaux dans la station (voir [figure 1](#)). Les termes employés seront définis au fur et à mesure du problème.

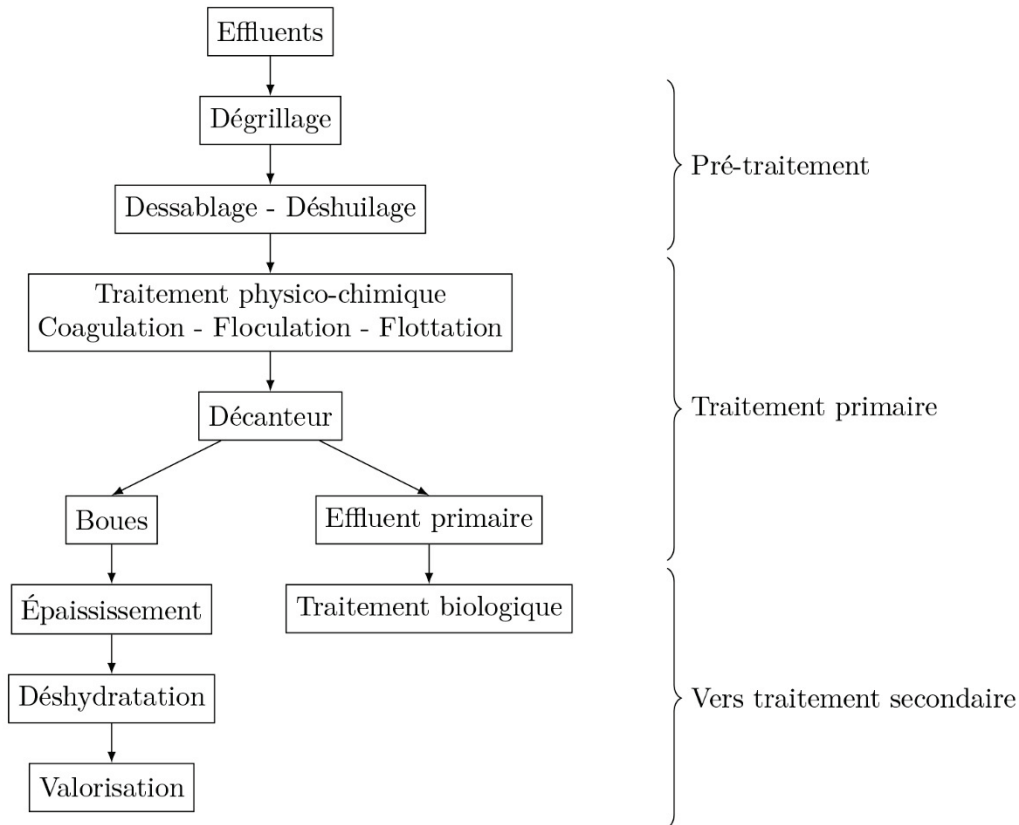


Figure 1 Traitements successifs des effluents dans une station d'épuration

La [partie I](#) étudie le principe de débitmètres adaptés aux conditions particulières des stations d'épuration et est complètement indépendante des parties suivantes. Les [parties II et III](#) s'intéressent à des procédés physiques de purification des eaux usées et sont largement indépendantes entre elles.

II Dessablage - Déshuilage

On étudie dans cette partie la sédimentation ou la remontée à la surface de particules dans le bac de pré-traitement des eaux usées (*dessablage - déshuilage*), l'effluent ayant déjà traversé à l'entrée de la station d'épuration une grille qui retient les déchets solides les plus volumineux (*dégrillage*).

On modélise l'une de ces particules par une sphère homogène de masse volumique ρ_s et de rayon r . On note $d = \rho_s/\rho_e$ sa densité, où ρ_e est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$.

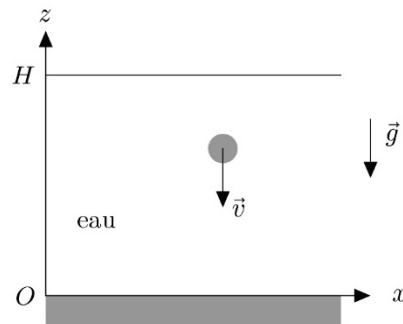


Figure 7 Particule sphérique plongée dans l'eau

II.A – On suppose que la force de traînée \vec{F}_t s'écrit sous la forme d'une force de Stokes :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta r\vec{v}$$

où η est la viscosité dynamique de l'eau.

II.A.1) Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la bille dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen.

II.A.2) Déterminer la vitesse limite de chute v_ℓ de la bille en fonction de r , d , g et $\nu = \eta/\rho_e$, viscosité cinématique de l'eau. À quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface ?

II.B – Pour les différentes particules proposées dans le tableau 1, calculer la vitesse limite v_ℓ et le temps t_c nécessaire pour parcourir une hauteur $H = 2$ m, en supposant que la vitesse limite est immédiatement atteinte. On prendra $\nu = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $d = 2,65$ (densité du quartz) et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

III Décantation des boues résiduelles

Cette partie s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein du décanteur primaire, sous l'action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon $r \leq 1 \mu\text{m}$ et de densité d . On note $n^*(z, t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules $\cdot \text{m}^{-3}$.

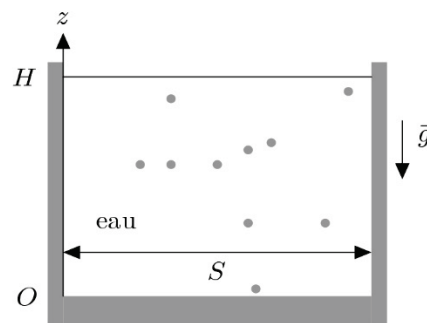


Figure 9 Particules en suspension dans un bac décanteur

III.A – Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $H = 2$ m et de section S .

III.A.1) On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules n^* au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

a) La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules \vec{j}_D . De la même façon que la diffusion thermique dans un milieu se traduit par un flux thermique \vec{j}_Q proportionnel et opposé au gradient de température $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ (loi de Fourier), la diffusion de particules se traduit par un flux de particules

proportionnel et opposé au gradient de concentration, soit ici $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^*$. La constante D est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

Exprimer \vec{j}_D en fonction de D , $\frac{\partial n^*}{\partial z}$ et d'un vecteur unitaire.

b) En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse v_ℓ . Déterminer l'expression du flux de particules \vec{j}_C associé à la convection, en fonction de $n^*(z, t)$ et v_ℓ . En déduire le flux total de particules $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_C$.

c) Montrer que l'évolution de $n^*(z, t)$ est régie par l'équation de Mason-Weaver :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}$$

III.A.2) On cherche le profil de concentration $n_\infty^*(z)$ en régime stationnaire.

a) Donner la forme de la solution générale pour $n_\infty^*(z)$, en introduisant une longueur caractéristique λ . Écrire la condition limite pour le flux total \vec{j} en $z = 0$, et en déduire la nouvelle forme de $n_\infty^*(z)$, que l'on exprimera en fonction de $n_0^* = n_\infty^*(z = 0)$, λ et z .

b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement de la force de Stokes :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

Montrer que la répartition des particules $n_\infty^*(z)$ peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, $n_\infty^*(z)$ est proportionnelle au facteur $\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$, e_p étant l'énergie potentielle associée à une particule et k_B la constante de Boltzmann.

On pourra utiliser le résultat de la question II.A.

c) Pour $T = 300$ K, estimer numériquement λ pour $r = 1$ μm , $r = 0,1$ μm et $r = 0,01$ μm . Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

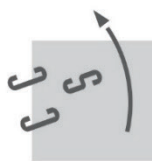
Données numériques

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Accélération du champ de pesanteur terrestre	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Annexe partie I :

NOM : _____
 Prénom : _____
 Épreuve de Physique-chimie 2 Filière MP

Signature :



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

NUMÉRO DE PLACE

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir rempli complètement l'en-tête

2016-02-24 12:52:11

dans la partie barrée

Ne rien écrire

2015-016-DR

Les températures sont exprimées en °C

